Теория меры, лекция 4: мера Лебега

Миша Вербицкий

14 марта 2015

НМУ

Булевы кольца (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Булево кольцо** есть кольцо, все элементы которого - идемпотенты.

ЗАМЕЧАНИЕ: **В булевом кольце $1+1=0$.** Действительно, $(1+1)^2 = 1+1+1+1 = 1+1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Булева алгебра** есть булево кольцо, снабженное операциями пересечения $x, y \to x \wedge y$ и объединения $x, y \to x \vee y$, где $x \wedge y = xy$ и $x \vee y = xy + x + y$.

ТЕОРЕМА: **(Маршалл Стоун)** Пусть $\mathcal{U}$ есть набор подмножеств в S, замнутый относительно операций объединения, пересечения, дополнения, и содержащий S и $\emptyset$. Тогда **$\mathcal{U}$ есть булева алгебра.** Более того, **все булевы алгебры получаются таким образом.**

Булевы идеалы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A – булева алгебра, а $I \subsetneq A$ – подмножество в A. Оно назывется **идеалом**, если I замкнуто относительно операций $\vee$, $\wedge$ и $\neg$, и для каждых $a \in A, \xi \in I$, имеет место $a \wedge \xi \in I$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если булева алгебра A построена по булеву кольцу R, то **булевы идеалы в A – то же самое, что обычные идеалы в кольце R (проверьте).**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $I \subsetneq A$ – булев идеал. Определим такое соотношение в A: $x \sim_I y$, если для каких-то $\xi, \xi' \in I$, имеем $x \vee \xi = y \vee \xi'$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\sim$ – соотношение эквивалентности, и на факторе $A/\sim_I$ возникает естественная структура булевой алгебры (проверьте это). Такая булева алгебра называется **фактор-алгеброй по булеву идеалу I**, и обозначается A/I.

ЗАМЕЧАНИЕ: Булевы идеалы в A/I взаимно-однозначно соответствуют булевым идеалам в A, содержащим I (проверьте это).

Неотрицательные меры (повторение)

Пусть задано множество S. Множество всех подмножеств S обозначается 2^S. Оно снабжено естественной структурой булевой алгебры. Зафиксируем булеву подалгебру $\mathfrak{U} \subset 2^S$.

ЗАМЕЧАНИЕ: На множестве $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ определена операция сложения, таким образом, что $x + \infty = \infty$ и $\infty + \infty = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $\mu : \mathfrak{U} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется **конечно-аддитивной мерой**, если для любых непересекающихся $A, B \in \mathfrak{U}$, $\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B)$. Мера называется **неотрицательной**, если к тому же $\mu(A) \geqslant 0$, для любого A.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из неотрицательности следует, что μ монотонна по отношению к частичному порядку: **если $a \subset b$, то $\mu(a) \leqslant \mu(b)$ (проверьте).**

ЗАМЕЧАНИЕ: Также из аддитивности следует, что $\mu(\emptyset) = 0$. **Действительно, $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \coprod \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)$.**

Метрика, построенная по мере

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим множество I_μ всех $a \in A$ с $\mu(a) = 0$. **Легко видеть, что это булев идеал.** В самом деле, $\mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b) = \mu(a) + \mu(b) = 0$ для $a, b \in I_\mu$. К тому же, для любого x и $a \in I_\mu$, $x \wedge a \preccurlyeq a$, значит $\mu(x \wedge a) \leqslant \mu(a) = 0$ в силу монотонности меры по отношению к частичному порядку.

ТЕОРЕМА: Пусть μ – конечно-аддитивная, неотрицательная мера на булевой алгебре A, а I_μ – идеал всех a с $\mu(a) = 0$. Определим отображение $d: \ (A/I_\mu) \times (A/I_\mu) \to [0, \infty]$ формулой $d(a, b) := \mu(a \triangle b)$, где $\triangle$ обозначает симметрическую разность. **Тогда d задает метрику на A/I_μ.** Более того, булевы операции $\wedge, \vee$ и $\neg$ непрерывны в топологии, заданной такой метрикой.

Доказательство. Шаг 1: Симметричность и рефлексивность метрики очевидны. Неравенство треугольника:

$$d(a, b) + d(b, c) = \mu(a \triangle b) + \mu(b \triangle c) = \geqslant \mu(a) + \mu(c) - \mu(a \cap b \cap c) \geqslant \mu(a \triangle c) = d(a, c).$$

Чтобы доказать непрерывность $\wedge, \vee$ и $\neg$, достаточно доказать непрерывность операций $\triangle, \cap = \wedge$ остальные через них выражаются.

Метрика, построенная по мере (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть μ – конечно-аддитивная, неотрицательная мера на булевой алгебре A, а I_μ – идеал всех a с $\mu(a) = 0$. Определим отображение $d: (A/I_\mu) \times (A/I_\mu) \to [0, \infty]$ формулой $d(a, b) := \mu(a \triangle b)$, где $\triangle$ обозначает симметрическую разность. **Тогда d задает метрику на A/I_μ.** Более того, булевы операции $\wedge, \vee$ и $\neg$ непрерывны в топологии, заданной такой метрикой.

Шаг 2: Непрерывность $\triangle$ очевидна, ибо для любой последовательности $\{z_i\}$, сходящейся к z, имеем

$$d(z_i \triangle y, z \triangle y) = \mu((z_i \triangle y) \triangle (z \triangle y)) \leqslant \mu(z_i \triangle z) = d(z_i, z),$$

значит, $z_i \triangle y$ сходится к $z \triangle y$.

Непрерывность $\wedge$ следует из того, что $d(x \cap z_i, z \cap x) = \mu(x \cap (z_i \triangle z)) \leqslant d(z, z_i)$, в силу монотонности, значит, для любой последовательности $\{z_i\}$, сходящейся к z, последовательность $x \wedge z_i$ сходится к $z \wedge x$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть A – булево кольцо, снабженное неотрицательной, аддитивной мерой μ, I_μ – идеал всех $a \in A$ с $\mu(a) = 0$, а $\hat{A}_\mu$ – пополнение A/I_μ по метрике d, определенной выше. **Тогда $\hat{A}_\mu$ – тоже булево кольцо.** ■

σ-алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: σ-алгебра есть булева алгебра подмножеств S, замкнутая относительно счетных объединений.

ЗАМЕЧАНИЕ: Булева алгебра $(A, \preccurlyeq)$ является σ-алгеброй, если у каждого счетного семейства элементов A есть точная верхняя грань.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset 2^S$ – кольцо подмножеств, а μ – конечно-аддитивная, неотрицательная мера. Мера μ называется **σ-аддитивной,** или же **счетно-аддитивной**, если для любого покрытия $\bigcup X_i \supset X$ множества $X \in A$ счетным набором множеств, имеет место $\mu(X) \leqslant \sum \mu(X_i)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть A – кольцо подмножеств, снабженное счетно-аддитивной мерой. **Тогда для каждого набора непересекающихся множеств $X_i \in A$, имеет место $\mu(\coprod X_i) = \sum \mu(X_i)$.** В самом деле, $\coprod X_i$ содержит любое конечное объединение X_i, и, в силу монотонности меры, удовлетворяет $\mu(\coprod X_i) \geqslant \sum_{i\in\mathfrak{S}} \mu(X_i)$ для любого конечного (а значит, и бесконечного) набора индексов $\mathfrak{S}$. Это дает неравенство $\mu(\coprod X_i) \geqslant \sum \mu(X_i)$ для любой аддитивной, неотрицательной меры. Обратное неравенство следует из σ-аддитивности.

σ-алгебра борелевских множеств

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **σ-алгебра, порожденная набором подмножеств $A \subset 2^S$**, есть кольцо подмножеств, порожденных пересечениями, дополнениями и счетными объединениями элементов A.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Если $A \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ – алгебра многогранников, то порожденная ей σ-алгебра содержит все открытые множества.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Возьмем какое-то открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ и представим его в виде счетного объединения компактов K_i (докажите, что это возможно). Каждая точка $z \in U$ имеет шарообразную окрестность $U \ni z$, содержащуюся в U; вписывая куб в шар, мы получим покрытие U многогранниками, содержащимися в U. Выбирая конечное покрытие у каждого K_i, мы получим счетное покрытие U многогранниками. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство. **Борелевская σ-алгебра** есть σ-алгебра, порожденная всеми открытыми множествами.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы только что доказали, что **кольцо многогранников порождает борелевскую σ-алгебру.**

Пополнение булевой алгебры относительно меры

ТЕОРЕМА: Пусть A – булева алгебра подмножеств S, а μ конечно-аддитивная мера, такая, что $\mu(S)$ конечно. **Тогда пополнение $\hat{A}_\mu$ является σ-алгеброй.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – счетный набор непересекающихся элементов $\hat{A}_\mu$. Чтобы доказать, что A_μ есть сигма-алгебра, достаточно продемонстрировать, что у него есть точная верхняя грань. **Если последовательность $\{Y_n := \bigcup_{i=1}^n X_i\}$ является последовательностью Коши, ее предел и будет такой точной верхней гранью.** Действительно, $a_n := d(Y_n, \bigcup_{i=1}^\infty X_i) = \sum_{i=0}^\infty d(Y_{n+i}, Y_{n+i+1})$ а $\lim_n a_n = 0$ тогда и только тогда, когда Y_n – последовательность Коши.

Шаг 2: Поскольку $\mu(S)$ конечно, ряд $\sum \mu(X_i)$ сходится. Значит, $a_n := \mu\left(\bigcup_{i=n}^\infty X_i\right)$ стремится к нулю. С другой стороны, для $k < l$, имеем

$$d(Y_k, Y_l) = \sum_{i=k}^{l} \mu(X_i) \leqslant a_k$$

значит $\{Y_i\}$ – последовательность Коши. ■

Измеримые множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset 2^S$ – булева алгебра подмножеств S, снабженная счетно-аддитивной, неотрицательной мерой μ, а $R \subset S$ – какое-то подмножество. Мы говорим, что R **имеет меру 0**, если для каждого $\varepsilon > 0$, множество R можно покрыть счетным объединением $X_i \in A$, с $\sum \mu(X_i) < \varepsilon$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **счетное объединение множеств меры 0 имеет меру 0.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебра измеримых множеств** есть σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$, порожденная борелевскими множествами и множествами меры 0.

ЗАМЕЧАНИЕ: Множества меры нуль образуют булев идеал в алгебре измеримых множеств (докажите это).

Мера Лебега

ЗАМЕЧАНИЕ: **Псевдометрика** на M есть функция $d: \ M\times M: \ \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}\cup\infty$, удовлетворяющая $d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,x) = 0$, $d(x,y) \leqslant d(y,z) + d(x,z)$ (все те же условия, что у метрики, без строгой положительности).

ПРИМЕР: Объем многогранника задает такую псевдометрику на кольце многогранников: $d(X,Y) = \operatorname{Vol}(X\triangle Y)$.

ТЕОРЕМА: Пусть A – алгебра многогранников в единичном кубе, $\mu = \operatorname{Vol}$ объем многогранника, а $\hat{A}_\mu$ – пополнение A/I_μ, построенное по псевдометрике $d(X,Y) = \operatorname{Vol}(X\triangle Y)$. **Тогда $\hat{A}_\mu$ изоморфно фактору $\hat{A}/I$ алгебры $\hat{A}$ измеримых множеств по идеалу множеств меры нуль.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно доказать, что в каждое открытое множество U можно вписать последовательность увеличивающихся многогранников U_i, добиваясь, чтобы $\cup U_i = U$ **(проверьте это).** ■

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **функция** Vol **непрерывна (и даже 1-липшицева) в топологии, заданной псевдометрикой, определенной выше.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция Vol, продолженная по непрерывности на алгебру измеримых множеств $\hat{A}_\mu$, называется **мера Лебега**.

Свойства меры Лебега

ЗАМЕЧАНИЕ: Мера Лебега конечно-аддитивна: для имеем $\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B)$. Это равенство верно для многогранников, значит, сохраняется при переходе к пополнению.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мера Лебега монотонна: для $A \subset B$, имеем $\mu(A) \leqslant \mu(B)$. Это следует из ее конечной аддитивности и неотрицательности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Конечно-аддитивная мера μ на σ-алгебре называется **σ-аддитивной** или **счетно-аддитивной**, если $\mu(\coprod_i A_i) = \sum \mu(A_i)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Мера Лебега σ-аддитивна.

Доказательство. Шаг 1: Если $\sum \mu(A_i) = \infty$, то $\mu(\coprod_i A_i) = \infty$ в силу монотонности μ.

Шаг 2: Если $\sum \mu(A_i) < \infty$, то последовательность $B_n = \coprod_{i=0}^N A_i$ есть последовательность Коши, потому что $\mu(B_n \triangle B_{n+k}) = \sum_{i=0}^k \mu(B_{n+i})$, а эта сумма стремится к нулю при $n \to \infty$. Значит, $\mu(\coprod_i A_i) = \lim_i \mu(B_i) = \sum \mu(A_i)$. ■

Измеримые функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Мера** на сигма-алгебре A есть счетно-аддитивная функция $A \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$. **Мера** на топологическом пространстве есть мера на его борелевской алгебре.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Мера μ на σ-алгебре A называется **σ-конечной**, если для любого $Z \in A$, можно покрыть Z объединением $Z_i \in A$, $Z \subset \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} Z_i$, где все Z_i имеют конечную меру.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мера Лебега, очевидно, σ-конечна. **В дальнейшем все меры по умолчанию предполагаются σ-конечными.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, μ) есть пространство с заданной на нем мерой. Функция $M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется **измеримой**, если прообраз каждого борелевского множества измерим.

ЗАМЕЧАНИЕ: Непрерывные функции измеримы.

ЗАМЕЧАНИЕ: Композиция измеримых функций **не обязательно измерима (найдите контрпример самостоятельно)**.

Определение интеграла

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Рассмотрим множество V всех измеримых функций на (M,μ) со значениями в $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. **Интеграл Лебега**, или просто **интеграл** есть функционал $V \xrightarrow{\int_\mu} [0,\infty]$, обладающий следующими свойствами.

1. **Линейность:** $\int_\mu (f+g) = \int_\mu f + \int_\mu g$, и $\int_\mu \lambda f = \lambda \int_\mu f$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$.

2. **Неотрицательность:** $\int_\mu f \geqslant 0$ для каждой функции $f \geqslant 0$, причем равенство имеет место только если $f = 0$ вне множества меры 0.

3. **Совместимость с мерой:** если χ – характеристическая функция измеримого множества Z с конечной мерой, то $\int_\mu \chi = \mu(Z)$.

4. **σ-аддитивность:** если $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$ – разложение функции в бесконечную сумму неотрицательных функций, то $\int_\mu f = \sum_i \int_\mu f_i$.

ТЕОРЕМА: **Интеграл существует, и определен однозначно, исходя из этих четырех аксиом.**

(доказательство будет дальше.)

Определение интеграла (продолжение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Интеграл измеримой функции $f: M \to \mathbb{R}$ определяется как

$$\int_\mu f = \frac{1}{2}\left[\int_\mu (|f| + f) - \int_\mu (|f| - f)\right].$$

Эта формула задает линейный функционал на пространстве всех измеримых функций, для которых $\int_\mu |f|$ конечен (проверьте это). Интеграл принимает конечное значение, если оба члена в квадратных скобках конечны, он равен ∞ если первый из них бесконечен, а второй конечен, и $-\infty$, если первый конечен, а второй бесконечен. Если они оба равны ∞, интеграл не определен.

Ступенчатые функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Ступенчатая функция** на множестве с заданной на нем σ-алгеброй $\mathfrak{A}$ есть функция f, принимающая счетное (или конечное) число значений, причем $f^{-1}(c)$ лежит в $\mathfrak{A}$ для любого c.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $f: M \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ – ступенчатая функция на пространстве (M, μ) с мерой, $\{c_i\}$ – множество ее значений, а $Z_i := f^{-1}(c_i)$ – соответствующие подмножества M. Определим **интеграл f** как сумму $\int_\mu f := \sum_i c_i \mu(Z_i)$. Интеграл принимает значения в $[0, \infty]$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Интегралы ступенчатых функций **удовлетворяют условиям 1-4 из определения интеграла (проверьте это).**

L^1-норма

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Почти всюду** значит "вне множества меры 0".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Определим **L^1-норму** на пространстве ступенчатых функций формулой $\|f\| := \int_\mu |f|$. Она принимает значения в $[0, \infty]$. Определим **L^1-метрику** формулой $d(f,g) := \|f-g\|$.

ЗАМЕЧАНИЕ: На самом деле L^1-норма и L^1-метрика не являются нормой и метрикой на пространстве ступенчатых функций: они зануляются на функциях, которые равны нулю почти всюду. Нормы и метрики, которым разрешается зануляться, называются **псевдометрики** и **псевдонормы**. Корректнее было бы сказать, что $\|f\| := \int_\mu |f|$ **это псевдонорма,** задающая **норму на факторпространстве ступенчатых функций по пространству ступенчатых функций, которые равны нулю почти всюду.**

Равномерная сходимость

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $f_i : M \to \mathbb{R}$ – последовательность функций. Напомним, что f_i **равномерно сходится** к $f : M \to \mathbb{R}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется N такой, что $|f - f_i| < \varepsilon$ при $i > N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть f – измеримая функция на пространстве M с σ-алгеброй. **Тогда существует последовательность $\{f_i\}$ ступенчатых функций, $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant ...$ которая равномерно сходится к f.** Если, к тому же, само пространство M имеет конечную меру, то f_i есть последовательность Коши относительно L^1-метрики, и все такие последовательности Коши эквивалентны.

Доказательство: Обозначим за f_n функцию вида $x \xrightarrow{f_n} \frac{1}{2^n}[2^n f(x)]$, где $[\cdot]$ обозначает целую часть. **Тогда f_n равномерно сходится к f.** ■

Существование и единственность интеграла

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть f – измеримая функция на пространстве M с σ-алгеброй и сигма-аддитивной мерой μ, такой, что $\mu(M) < \infty$. **Определим $\int_\mu f$ как $\lim_i \int_\mu f_i$, где $\{f_i\}$ – последовательность ступенчатых функций, равномерно сходящихся к f.**

ЗАМЕЧАНИЕ: $\int_\mu f$ не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности f_i. Действительно, каждая такая f_i является последовательностью Коши в норме L^1, следовательно, $\int_\mu f$ **получается как продолжение L^1-нормы на метрическое пополнение пространства ступенчатых функций.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Таким образом определенный интеграл $f \to \int_\mu f$ **удовлетворяет условиям 1–4 из определения интеграла,** потому что ступенчатые функции им удовлетворяют, а при переходе к пополнению эти условия сохраняются.

ЗАМЕЧАНИЕ: Единственность интеграла, заданного условиями 1–4, тоже очевидна. В самом деле, если $0 \leqslant f - f_i \leqslant \varepsilon$, имеем $0 \leqslant \int_\mu (f - f_i) \leqslant \varepsilon\mu(M)$, а значит, $\lim_i \int_\mu f_i = \int_\mu f$. Но $\int_\mu f_i$ задан условиями 1–4 однозначно, потому что f_i ступенчатая.

Мы доказали существование и единственность интеграла.