Теория меры, лекция 5: полнота L^1

Миша Вербицкий

4 апреля 2015

НМУ

Булевы кольца (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Булево кольцо** есть кольцо, все элементы которого - идемпотенты.

ЗАМЕЧАНИЕ: **В булевом кольце $1+1=0$.** Действительно, $(1+1)^2 = 1+1+1+1 = 1+1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Булева алгебра** есть булево кольцо, снабженное операциями пересечения $x, y \to x \wedge y$ и объединения $x, y \to x \vee y$, где $x \wedge y = xy$ и $x \vee y = xy + x + y$.

ТЕОРЕМА: **(Маршалл Стоун)** Пусть $\mathcal{U}$ есть набор подмножеств в S, замнутый относительно операций объединения, пересечения, дополнения, и содержащий S и $\emptyset$. Тогда **$\mathcal{U}$ есть булева алгебра.** Более того, **все булевы алгебры получаются таким образом.**

Булевы идеалы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A – булева алгебра, а $I \subsetneq A$ – подмножество в A. Оно назывется **идеалом**, если I замкнуто относительно операций $\vee$, $\wedge$ и $\neg$, и для каждых $a \in A, \xi \in I$, имеет место $a \wedge \xi \in I$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если булева алгебра A построена по булеву кольцу R, то **булевы идеалы в A – то же самое, что обычные идеалы в кольце R (проверьте).**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $I \subsetneq A$ – булев идеал. Определим такое соотношение в A: $x \sim_I y$, если для каких-то $\xi, \xi' \in I$, имеем $x \vee \xi = y \vee \xi'$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\sim$ – соотношение эквивалентности, и на факторе $A/\sim_I$ возникает естественная структура булевой алгебры (проверьте это). Такая булева алгебра называется **фактор-алгеброй по булеву идеалу I**, и обозначается A/I.

ЗАМЕЧАНИЕ: Булевы идеалы в A/I взаимно-однозначно соответствуют булевым идеалам в A, содержащим I (проверьте это).

Метрика, построенная по мере (повторение)

Пусть задано множество S. Множество всех подмножеств S обозначается 2^S. Оно снабжено естественной структурой булевой алгебры. Зафиксируем булеву подалгебру $\mathfrak{U} \subset 2^S$.

ЗАМЕЧАНИЕ: На множестве $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ определена операция сложения, таким образом, что $x + \infty = \infty$ и $\infty + \infty = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $\mu : \mathfrak{U} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется **конечно-аддитивной мерой**, если для любых непересекающихся $A, B \in \mathfrak{U}$, $\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B)$. Мера называется **неотрицательной**, если к тому же $\mu(A) \geqslant 0$, для любого A.

ТЕОРЕМА: Пусть μ – конечно-аддитивная, неотрицательная мера на булевой алгебре A, а I_μ – идеал всех a с $\mu(a) = 0$. Определим отображение $d : (A/I_\mu) \times (A/I_\mu) \to [0, \infty]$ формулой $d(a, b) := \mu(a \triangle b)$, где $\triangle$ обозначает симметрическую разность. **Тогда d задает метрику на A/I_μ.** Более того, булевы операции $\wedge, \vee$ и $\neg$ непрерывны в топологии, заданной такой метрикой.

σ-алгебры (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: σ-алгебра есть булева алгебра подмножеств S, замкнутая относительно счетных объединений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset 2^S$ – кольцо подмножеств, а μ – конечно-аддитивная, неотрицательная мера. Мера μ называется **σ-аддитивной,** или же **счетно-аддитивной**, если для любого покрытия $\bigcup X_i \supset X$ множества $X \in A$ счетным набором множеств, имеет место $\mu(X) \leqslant \sum \mu(X_i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **σ-алгебра, порожденная набором подмножеств** $A \subset 2^S$, есть кольцо подмножеств, порожденных пересечениями, дополнениями и счетными объединениями элементов A.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Если $A \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ – алгебра многогранников, то порожденная ей σ-алгебра содержит все открытые множества.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство. **Борелевская σ-алгебра** есть σ-алгебра, порожденная всеми открытыми множествами.

ТЕОРЕМА: Пусть A – булева алгебра подмножеств S, а μ конечно-аддитивная мера, такая, что $\mu(S)$ конечно. **Тогда пополнение $\widehat{A}_\mu$ является σ-алгеброй.**

Измеримые множества (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset 2^S$ – булева алгебра подмножеств S, снабженная счетно-аддитивной, неотрицательной мерой μ, а $R \subset S$ – какое-то подмножество. Мы говорим, что R **имеет меру 0**, если для каждого $\varepsilon > 0$, множество R можно покрыть счетным объединением $X_i \in A$, с $\sum \mu(X_i) < \varepsilon$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебра измеримых множеств** есть σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$, порожденная борелевскими множествами и множествами меры 0.

ЗАМЕЧАНИЕ: Множества меры нуль образуют булев идеал в алгебре измеримых множеств (докажите это).

Мера Лебега (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: **Псевдометрика** на M есть функция $d: \ M \times M: \ \to \mathbb{R}^{\geqslant 0} \cup \infty$, удовлетворяющая $d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,x) = 0$, $d(x,y) \leqslant d(y,z) + d(x,z)$ (все те же условия, что у метрики, без строгой положительности).

ПРИМЕР: Объем многогранника задает такую псевдометрику на кольце многогранников: $d(X,Y) = \operatorname{Vol}(X \triangle Y)$.

ТЕОРЕМА: Пусть A – алгебра многогранников в единичном кубе, $\mu = \operatorname{Vol}$ объем многогранника, а $\widehat{A}_\mu$ – пополнение A/I_μ, построенное по псевдометрике $d(X,Y) = \operatorname{Vol}(X \triangle Y)$. **Тогда $\widehat{A}_\mu$ изоморфно фактору $\widehat{A}/I$ алгебры $\widehat{A}$ измеримых множеств по идеалу множеств меры нуль.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно доказать, что в каждое открытое множество U можно вписать последовательность увеличивающихся многогранников U_i, добиваясь, чтобы $\cup U_i = U$ **(проверьте это).** ■

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **функция** Vol **непрерывна (и даже 1-липшицева) в топологии, заданной псевдометрикой, определенной выше.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция Vol, продолженная по непрерывности на алгебру измеримых множеств $\widehat{A}_\mu$, называется **мера Лебега**.

Свойства меры Лебега (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Мера Лебега конечно-аддитивна: для имеем $\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B)$. Это равенство верно для многогранников, значит, сохраняется при переходе к пополнению.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мера Лебега монотонна: для $A \subset B$, имеем $\mu(A) \leqslant \mu(B)$. Это следует из ее конечной аддитивности и неотрицательности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Конечно-аддитивная мера μ на σ-алгебре называется **σ-аддитивной** или **счетно-аддитивной**, если $\mu(\coprod_i A_i) = \sum \mu(A_i)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Мера Лебега σ-аддитивна.

Полнота алгебры измеримых множеств

ТЕОРЕМА: **σ-алгебра $\widehat{A}_\mu$ измеримых множеств полна относительно метрики d, заданной $X, Y \to \mu(X \triangle Y)$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\{X_i\}$ – последовательность Коши в $\widehat{A}_\mu$. Выберем из нее подпоследовательность такую, что $d(X_i, X_j) < \frac{1}{2^i}$ для каждого $i \geqslant j$. Пусть $Y_i := \bigcup_{j \geqslant i} X_j$. Тогда

$$Y_i \triangle Y_{i+k} \subset \bigcup_{j=0}^{k-1} X_{i+j} \triangle X_{i+j+1} \quad \text{и} \quad Y_i \triangle X_i \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} X_{i+j} \triangle X_{i+j+1}$$

Из первого следует, что $d(Y_i, Y_{i+k}) \leqslant \frac{1}{2^{i-1}}$, а из второго - что $d(X_i, Y_i) \leqslant \frac{1}{2^{i-1}}$, то есть $\{Y_i\}$ есть последовательность Коши, эквивалентная X_i.

Шаг 2: Предел монотонно убывающей последовательности Коши $Y_0 \supset Y_1 \supset ...$ равен $\bigcap Y_i$, который измерим, если Y_i измеримы. Значит, σ-алгебра измеримых множеств полна. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Шаг 1 дает следующую полезную лемму.

ЛЕММА: Пусть μ – неотрицательная мера на сигма-алгебре A, а $\{X_i\}$ – последовательность Коши на A в метрике d, заданной $X, Y \to \mu(X \triangle Y)$. Тогда $\{X_i\}$ эквивалентна последовательности Коши $\{Y_i\} \subset A$, которая монотонно убывает.

Измеримые функции (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Мера** на сигма-алгебре A есть счетно-аддитивная функция $A \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$. **Мера** на топологическом пространстве есть мера на его борелевской алгебре.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Мера μ на σ-алгебре A называется **σ-конечной**, если для любого $Z \in A$, можно покрыть Z объединением $Z_i \in A$, $Z \subset \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} Z_i$, где все Z_i имеют конечную меру.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мера Лебега, очевидно, σ-конечна. **В дальнейшем все меры по умолчанию предполагаются σ-конечными.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, μ) есть пространство с заданной на нем мерой. Функция $M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется **измеримой**, если прообраз каждого борелевского множества измерим.

ЗАМЕЧАНИЕ: Непрерывные функции измеримы.

ЗАМЕЧАНИЕ: Композиция измеримых функций **не обязательно измерима (найдите контрпример самостоятельно)**.

Определение интеграла (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Рассмотрим множество V всех измеримых функций на (M, μ) со значениями в $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. **Интеграл Лебега**, или просто **интеграл** есть функционал $V \overset{\int_\mu}{\to} [0, \infty]$, обладающий следующими свойствами.

1. **Линейность:** $\int_\mu (f+g) = \int_\mu f + \int_\mu g$, и $\int_\mu \lambda f = \lambda \int_\mu f$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$.

2. **Неотрицательность:** $\int_\mu f \geqslant 0$ для каждой функции $f \geqslant 0$, причем равенство имеет место только если $f = 0$ вне множества меры 0.

3. **Совместимость с мерой:** если χ – характеристическая функция измеримого множества Z с конечной мерой, то $\int_\mu \chi = \mu(Z)$.

4. **σ-аддитивность:** если $f = \sum_{i=0}^\infty f_i$ – разложение функции в бесконечную сумму неотрицательных функций, то $\int_\mu f = \sum_i \int_\mu f_i$.

ТЕОРЕМА: **Интеграл существует, и определен однозначно, исходя из этих четырех аксиом.**

L^1-норма

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – пространство с мерой Лебега, а $L^1(M)$ – факторпространства измеримых функций по функциям, которые равны 0 вне множества меры 0. **L^1-норма** на пространстве $L^1(M)$ есть норма, определенная формулой $\|f\| = \int_M |f|$.

ТЕОРЕМА: **Пространство $L^1(M)$ полно относительно L^1-нормы.**

(будет доказано в конце лекции)

ЗАМЕЧАНИЕ: Доказательство устроено так: строится поточечный предел последовательности, а потом доказывается, что он является пределом и по L^1-норме.

Измеримость поточечного предела

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Последовательность $\{f_i\}$ функций **поточечно сходится** к f, если $\lim_i f_i(x) = f(x)$ для любого x.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Поточечный предел измеримых функций всегда измерим.

Доказательство. Шаг 1: Пусть f_i – монотонно возрастающая последовательность, поточечно сходящаяся к f. Тогда $f^{-1}(]-\infty, a[) = \bigcap f_i^{-1}(]-\infty, a[)$; счетное пересечение измеримых множеств измеримо. С другой стороны, σ-алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}$ порождается полупрямыми вида $]-\infty, a[$. Это доказывает, что f^{-1} от борелевского множества измеримо.

Шаг 2: Предел любой последовательности f_i получается как предел $g_n := \sup_{i>n} f_i$, причем последовательность $\{g_n\}$ невозрастает, и каждое g_n получено как предел неубывающей последовательности: $g_n = \lim_N \sup_{i=n+1}^N f_i$. ■

Поточечный предел и интеграл

ЛЕММА: Пусть M – пространство с конечной мерой, а $\{f_i\}$ – монотонная последовательность измеримых функций $f_i: M \to [0, C]$, поточечно сходящаяся к нулю. **Тогда $\lim_i \int f_i = 0$.**

Доказательство. Шаг 1: Если f_i монотонно убывает и сходится к 0, для каждого $\varepsilon > 0$ имеем $\emptyset = f^{-1}(]\varepsilon, \infty[) = \bigcap f_i^{-1}(]\varepsilon, \infty[)$, значит, мера множества $V_i := f_i^{-1}(]\varepsilon, \infty[$ стремится к 0.

Шаг 2: По определению, $\int f_i \leqslant C\mu(V_i) + \varepsilon\mu(M \backslash V_i)$. Переходя к пределу по i и пользуясь $\lim_i \mu(V_i) = 0$, получаем $\lim_i \int f_i \leqslant \varepsilon\mu(M)$. ■

ЛЕММА: Пусть M – пространство с конечной мерой, а $\{f_i\}$ – (не обязательно монотонная) последовательность измеримых функций $f_i: M \to [0, C]$, поточечно сходящаяся к нулю. **Тогда $\lim_i \int f_i = 0$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $g_n := \sup_{i \geqslant n} f_i$. Очевидно, что последовательность $\{g_n\}$ невозрастает, и тоже сходится к 0. В силу предыдущей леммы, это дает $0 = \lim_i \int g_i$. С другой стороны, $g_n \geqslant f_n$, а значит $0 \geqslant \lim_i \int g_i \geqslant \lim_i \int f_i$. ■

Поточечный предел и интеграл (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть $\{f_i\}$ – последовательность измеримых функций на (M, μ), принимающих значения в отрезке $[-C, C]$, которая поточечно сходится к f, причем мера M конечна. **Тогда f тоже измерима, и $\int_\mu f = \lim_i \int f_i$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует из предыдущей леммы, примененной к $f_i - f + C$. ■

УПРАЖНЕНИЕ: Найдите контрпример к этой теореме, если $\mu(M)$ бесконечна, или же если f неограничена.

Интеграл и супремум

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $\{f_i\}$ – последовательность ограниченных, интегрируемых функций на пространстве конечной меры, причем $\|f_i - f_{i+1}\| = \alpha_i$. Предположим, что ряд $\sum \alpha_i$ сходится. Обозначим за g функцию $\sup_i f_i$. **Тогда $\|g - f_n\| \leqslant 2 \sum \alpha_i$, для любого n.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть a, b - интегрируемые функции, а $g = \max(a, b)$. Поскольку $|g - a| \leqslant |a - b|$, имеем $\|a - g\| \leqslant \|a - b\|$.

Шаг 2: Обозначим за g_n функцию $\max_{i=1}^n f_i$. Тогда $\|g_n, f_n\| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$. Доказательство этого утверждения ведется по индукции; пусть это уже верно для n. Поскольку $g_n = \max(g_{n-1}, f_n)$, в силу предыдущего шага, неравенства треугольника и предположения индукции, имеем

$$\|g_n - f_n\| \leqslant \|g_{n-1} - f_n\| \leqslant \|g_{n-1} - f_{n-1}\| + \alpha_{n-1} \leqslant \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i + \alpha_{n-1}.$$

Шаг 3: Для любого n, $\{g_i - f_n\}$ – неубывающая последовательность, поточечно сходящаяся к $g - f_n$. В силу теоремы об интеграле от поточечного предела, $\|g - f_n\| = \lim_i \int_\mu |g_i - f_n|$. С другой стороны, $\|g_k - f_n\| \leqslant \|g_k - f_k\| + \|f_k - f_n\| \leqslant 2 \sum \alpha_i$ для всех k. Значит, $\|g - f_n\| \leqslant 2 \sum \alpha_i$. ■

Полнота $L^1(M)$

Следствие 1: Пусть $\{f_i\}$ – последовательность Коши интегрируемых, ограниченных функций, а $g_n := \sup_{i \geqslant n} f_i$. **Тогда $\{g_i\}$ – последовательность Коши, эквивалентная $\{f_i\}$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $\|f_i - f_{i+1}\| = \alpha_i$. Поскольку $\{f_i\}$ – последовательность Коши, ряд $\sum \alpha_i$ сходится. В силу предыдущей теоремы, имеем $\|g_n - f_n\| \leqslant 2\sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i$, значит, $\{g_i\}$ эквивалентна $\{f_i\}$. ■

ТЕОРЕМА: Пространство $L^1(M)$ интегрируемых функций на (M, μ) полно относительно L^1-метрики.

Доказательство. Шаг 1: Разбив M в счетное объединение подмножеств M_i конечной меры, мы получим, что достаточно доказать полноту $L^1(M_i)$; действительно, произведение $\prod_i (M_i, d_i)$ полных метрических пространств с метрикой $\sum d_i$ полно. Поэтому **можно считать, что M – пространство конечной меры.**

Мы свели теорему к такому утверждению.

Полнота $L^1(M)$ (конечная мера)

ТЕОРЕМА: Пространство $L^1(M)$ интегрируемых функций на на пространстве (M,μ) конечной меры полно относительно L^1-метрики.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\{f_i\}$ – последовательность Коши в $L^1(M)$. Тогда $|f_i|$ тоже последовательность Коши **(проверьте это)**. Поэтому $\frac{f_i+|f_i|}{2}$ и $\frac{|f_i|-f_i}{2}$ – тоже последовательности Коши. Достаточно доказать сходимость последовательности Коши для этих функций, но они обе неотрицательны. Поэтому можно считать, что $f_i \geqslant 0$.

Шаг 2: Расмотрим функцию f_i^N, которая равна f_i в тех точках, где $f_i \in [N, N+1]$, равна N в тех точках, где $f_i \leqslant N$ и равна $N+1$ в тех точках, где $f_i \geqslant N+1$. Для каждого N, $\{f_i^N\}$ – последовательность Коши; если мы докажем, что она сходится к f^N, возьмем функцию f, которая равна f^N в тех точках x, где $N < f^N() < N+1$, и эта функция будет пределом f_i. Поэтому **можно считать, что функции f_i принимают значения в $[N, N+1]$.**

Мы свели теорему к такому утверждению.

Полнота $L^1(M)$ (конечная мера)

ТЕОРЕМА: Пространство $L^1(M)$ интегрируемых, ограниченных функций на на пространстве (M, μ) конечной меры полно относительно L^1-метрики.

Доказательство. Шаг 1: В силу Следствия 1, последовательность $\{f_i\}$ эквивалентна монотонно невозрастающей последовательности $\{g_i\}$. Заменив одну на другую, мы можем предположить, что $\{f_i\}$ монотонно невозрастает.

Шаг 2: Обозначим за f поточечный предел f_i (он существует, потому что эта последовательность монотонна). По теореме об интеграле от поточечного предела, последовательность $\{f_i\}$ сходится к f. ■