Теория меры, лекция 6: теорема Фубини

Миша Вербицкий

11 апреля 2015

НМУ

Булевы кольца (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Булево кольцо есть кольцо, все элементы которого - идемпотенты.

ЗАМЕЧАНИЕ: В булевом кольце $1+1=0$. Действительно, $(1+1)^2 = 1+1+1+1 = 1+1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Булева алгебра есть булево кольцо, снабженное операциями пересечения $x, y \to x \wedge y$ и объединения $x, y \to x \vee y$, где $x \wedge y = xy$ и $x \vee y = xy + x + y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A – булева алгебра, а $I \subsetneq A$ – подмножество в A. Оно назывется **идеалом**, если I замкнуто относительно операций $\vee$, $\wedge$ и $\neg$, и для каждых $a \in A, \xi \in I$, имеет место $a \wedge \xi \in I$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\sim$ – соотношение эквивалентности, и на факторе $A/\sim_I$ возникает естественная структура булевой алгебры (проверьте это). Такая булева алгебра называется **фактор-алгеброй по булеву идеалу I**, и обозначается A/I.

Метрика, построенная по мере (повторение)

Пусть задано множество S. Множество всех подмножеств S обозначается 2^S. Оно снабжено естественной структурой булевой алгебры. Зафиксируем булеву подалгебру $\mathfrak{U} \subset 2^S$.

ЗАМЕЧАНИЕ: На множестве $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ определена операция сложения, таким образом, что $x + \infty = \infty$ и $\infty + \infty = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $\mu : \mathfrak{U} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется **конечно-аддитивной мерой**, если для любых непересекающихся $A, B \in \mathfrak{U}$, $\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B)$. Мера называется **неотрицательной**, если к тому же $\mu(A) \geqslant 0$, для любого A.

ТЕОРЕМА: Пусть μ – конечно-аддитивная, неотрицательная мера на булевой алгебре A, а I_μ – идеал всех a с $\mu(a) = 0$. Определим отображение $d : (A/I_\mu) \times (A/I_\mu) \to [0, \infty]$ формулой $d(a, b) := \mu(a \triangle b)$, где $\triangle$ обозначает симметрическую разность. **Тогда d задает метрику на A/I_μ.** Более того, булевы операции $\wedge, \vee$ и $\neg$ непрерывны в топологии, заданной такой метрикой.

σ-алгебры (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: σ-алгебра есть булева алгебра подмножеств S, замкнутая относительно счетных объединений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset 2^S$ – кольцо подмножеств, а μ – конечно-аддитивная, неотрицательная мера. Мера μ называется **σ-аддитивной,** или же **счетно-аддитивной**, если для любого покрытия $\bigcup X_i \supset X$ множества $X \in A$ счетным набором множеств, имеет место $\mu(X) \leqslant \sum \mu(X_i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебра измеримых множеств** есть σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$, порожденная борелевскими множествами и множествами меры 0.

ЗАМЕЧАНИЕ: Множества меры нуль образуют булев идеал в алгебре измеримых множеств (докажите это).

ТЕОРЕМА: σ-алгебра измеримых множеств полна относительно метрики d, заданной $X, Y \to \mu(X \triangle Y)$.

Измеримые функции (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, μ) есть пространство с заданной на нем мерой. Функция $M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется **измеримой**, если прообраз каждого борелевского множества измерим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Рассмотрим множество V всех измеримых функций на (M, μ) со значениями в $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. **Интеграл Лебега**, или просто **интеграл** есть функционал $V \xrightarrow{\int_\mu} [0, \infty]$, обладающий следующими свойствами.

1. **Линейность:** $\int_\mu (f+g) = \int_\mu f + \int_\mu g$, и $\int_\mu \lambda f = \lambda \int_\mu f$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$.

2. **Неотрицательность:** $\int_\mu f \geqslant 0$ для каждой функции $f \geqslant 0$, причем равенство имеет место только если $f = 0$ вне множества меры 0.

3. **Совместимость с мерой:** если χ – характеристическая функция измеримого множества Z с конечной мерой, то $\int_\mu \chi = \mu(Z)$.

4. **σ-аддитивность:** если $f = \sum_{i=0}^\infty f_i$ – разложение функции в бесконечную сумму неотрицательных функций, то $\int_\mu f = \sum_i \int_\mu f_i$.

ТЕОРЕМА: **Интеграл существует, и определен однозначно, исходя из этих четырех аксиом.**

Теорема Фубини

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть f – неотрицательная, функция на $\mathbb{R}^n$, а Z – сегмент в $\mathbb{R}^{n+1}$, ограниченный $x_{n+1} = 0$ и ее графиком, который представлен как отображение из оси плоскости $x_{n+1} = 0$ в прямую x_{n+1}. Тогда **мера $\mu(Z)$ участка под графиком f равна ее интегралу, если f интегрируема.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Легко следует из единственности интеграла: **достаточно проверить свойства 1-4 из определения интеграла,** и убедиться, что сегмент под графиком измеримой функции измерим, что следует из приближения измеримой функции ступенчатыми. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Фубини есть обобщение этого факта на произведения произвольных пространств с мерой.

Заряды (signed measures)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Зарядом** (signed measure) называется счетно-аддитивная функция на σ-алгебре, принимающая значения в $]-\infty, \infty]$ или $[-\infty, \infty[$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть σ – заряд на сигма-алгебре $\mathfrak{A}$ подмножеств M, а $Z \in \mathfrak{A}$ – какое-то подмножество. Обозначим за $\sigma\Big|_Z$ **ограничение заряда на Z**, то есть σ-аддитивную функцию, которая делает из $X \in \mathfrak{A}$ число $\sigma(X \cap Z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Заряд σ называется **положительным**, если $\sigma(X) \geqslant 0$ для любого X, и **отрицательным**, если $-\sigma$ положительный. **Разложение Хана** для заряда σ есть представление M в виде дизъюнктной суммы $M = A \coprod B$, где $\sigma\Big|_A$ положительный, а $\sigma\Big|_B$ отрицательный.

Разложение Хана

ТЕОРЕМА: Пусть $\mathfrak{A}$ – сигма-алгебра подмножеств M, а σ – заряд на $\mathfrak{A}$. **Тогда для σ существует разложение Хана.**

Доказательство. Шаг 1: Определим функцию σ_+ на $\mathfrak{A}$ по формуле $\sigma_+(X) = \sup_{Z\subset X}\sigma(Z)$. Легко видеть, что σ_+ сигма-аддитивна и задает меру на $\mathfrak{A}$. Аналогично определим функцию $\sigma_-(X) = \inf_{Z\subset X}\sigma(Z)$.

Шаг 2: Зафиксируем $Z \in \mathfrak{A}$, и пусть для какого-то $Z_\varepsilon \subset Z$ выполнено $\sigma(Z_\varepsilon) \geqslant \sigma_+(Z) - \varepsilon$. Тогда **для любого $V \subset Z\backslash Z_\varepsilon$, имеем $\sigma(V) \leqslant \varepsilon$.** Действительно, в противном случае мы бы имели $\sigma(V \coprod Z_\varepsilon) = \sigma(V) + \sigma(Z_\varepsilon) > \sigma_+(Z) - \varepsilon + \varepsilon$. Аналогично, **для любого $V \subset Z_\varepsilon$, получаем $\sigma(V) \geqslant -\varepsilon$.**

Шаг 3: Пусть $Z_1, Z_2 \subset Z$, причем $\sigma(Z_1), \sigma(Z_2) \geqslant \sigma_+(Z) - \varepsilon$. Поскольку $Z_1\backslash Z_2$ лежит в $Z\backslash Z_2$, в силу предыдущего шага имеем $-\varepsilon \leqslant \sigma(Z_1\backslash Z_2) \leqslant \varepsilon$. Применяя тот же аргумент к $\sigma(Z_2\backslash Z_1)$ и складывая, получаем $-2\varepsilon \leqslant \sigma(Z_1 \triangle Z_2) \leqslant 2\varepsilon$. Для каждого подмножества $X \subset Z_1 \triangle Z_2$, верно то же самое: $-2\varepsilon \leqslant \sigma(X) \leqslant 2\varepsilon$.

Разложение Хана (продолжение)

Шаг 3: Пусть $Z_1, Z_2 \subset Z$, причем $\sigma(Z_1), \sigma(Z_2) \geqslant \sigma_+(Z) - \varepsilon$. Поскольку $Z_1 \backslash Z_2$ лежит в $Z \backslash Z_2$, в силу предыдущего шага имеем $-\varepsilon \leqslant \sigma(Z_1 \backslash Z_2) \leqslant \varepsilon$. Применяя тот же аргумент к $\sigma(Z_2 \backslash Z_1)$ и складывая, получаем $-2\varepsilon \leqslant \sigma(Z_1 \triangle Z_2) \leqslant 2\varepsilon$. Для каждого подмножества $X \subset Z_1 \triangle Z_2$, верно то же самое: $-2\varepsilon \leqslant \sigma(X) \leqslant 2\varepsilon$.

Шаг 4: Пусть $\{Z_i\}$ – последовательность подмножеств Z удовлетворяющих $\sigma(Z_i) \geqslant \sigma_+(Z) - \frac{1}{2^i}$. В силу предыдущего шага, это последовательность Коши относительно σ_+. Как было доказано на предыдущей лекции, $\{Z_i\}$ эквивалентна монотонной последовательности $Y_i := \bigcup j \geqslant i Z_j$. **Пересечение Y всех элементов Y_i удовлетворяет $\sigma_+(Y) = \lim_i \sigma_+(Z_i) = \sigma_+(Z)$.**

Шаг 5: Для любого подмножества $Z_0 \subset Z \backslash Y$, имеем $\sigma(Z_0) \leqslant 0$. Действительно, если $\sigma(Z_0) > 0$, то $\sigma(Z_0 \coprod Y) > \sigma_+(Z)$, что противоречит определению σ_+. Аналогично, для любого $Y_0 \subset Y$, имеем $\sigma(Y_0) \geqslant 0$.

Шаг 5: Мы разбили Z в объединение двух подмножеств, на одном из которых σ задает неотрицательную меру, на другом - положительную. ■

Hans Hahn
(September 27, 1879 - July 24, 1934)

Непрерывные меры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть S - пространство с сигма-алгеброй, а μ и ν две меры. Мы говорим, что ν **абсолютно непрерывна** относительно μ (обозначается $\nu \ll \mu$) если для любого измеримого множества A, из $\mu(A) = 0$ следует $\nu(A) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Непрерывная мера** на пространстве с мерой Лебега есть мера, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега.

ПРИМЕР: Пусть $x \in [0,1]$ – точка на отрезке, а μ_x – мера, такая, что $\mu_x(A) = 0$, если $A \not\ni x$, и $\mu_x(A) = 1$, если $A \ni x$. **Легко видеть, что такая мера не непрерывна.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть f – измеримая, неотрицательная функция на пространстве M с сигма-алгеброй, а μ – мера на M. Обозначим за $f\mu$ меру, которая делает из измеримого множества $A \subset M$ интеграл $\int_\mu f\Big|_A$. **Проверьте, что это действительно мера. Проверьте, что $f\mu \ll \mu$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Интеграл функции по множеству $A \subset M$ часто обозначается $\int_A f\mu$. Смысл этого обозначения в том, что **$f\mu$ – это заряд на M, а $\int_A \sigma$ обозначает $\sigma(A)$, для заряда $\sigma = f\mu$.**

Теорема Радона-Никодима

ТЕОРЕМА: (теорема Радона-Никодима)
Пусть M – пространство с сигма-алгеброй, а $\nu \ll \mu$ – меры на M, причем $\mu(M), \nu(M) < \infty$. **Тогда $\nu = f\mu$ для какой-то функции f на M, интегрируемой относительно μ.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $x \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, а $\nu - x\mu$ – соответствующий заряд. Обозначим за $A(\nu - \mu)$ максимальное множество, где заряд $\nu - x\mu$ положительный, полученное из разложения Хана. Для отрезка $[x, y] \subset \mathbb{R}$, обозначим за $A_{[x,y]}$ множество $A(\nu - x\mu)\backslash A(\nu - y\mu)$. **Тогда объединение**

$$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} A_{\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]}$$

равно M, с точностью до множества меры нуль по μ. В самом деле, дополнение B к этому множеству лежит в $\bigcup_{n \in Z} A_{[n,\infty]}$, а значит, удовлетворяет $\nu(B) > C\mu(B), \quad \forall C \in \mathbb{Z}$. Мы получаем, что $\mu(B)$ равно нулю, и $\nu(B) = 0$ по абсолютной непрерывности.

Шаг 2: Расмотрим ступенчатую функцию $\Psi_n(\nu) := \sum_{i \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}} \frac{i}{n} |_{A_{\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]}}$. Эта функция равна $\frac{i}{n}$ на каждом множестве вида $A_{\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]}$. **Мы докажем, что $\{\Psi_n(\nu)\}$ сходится к функции f такой, что $\nu = f\mu$.**

Теорема Радона-Никодима (продолжение)

ТЕОРЕМА: (теорема Радона-Никодима)
Пусть M – пространство с сигма-алгеброй, а $\nu \ll \mu$ – меры на M, причем $\mu(M), \nu(M) < \infty$. **Тогда $\nu = f\mu$ для какой-то функции f на M, интегрируемой относительно μ.**

Шаг 2: Расмотрим ступенчатую функцию $\Psi_n(\nu) := \sum_{i \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}} \frac{i}{n}|_{A_{\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]}}$. Эта функция равна $\frac{i}{n}$ на каждом множестве вида $A_{\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]}$. **Мы докажем, что $\{\Psi_n(\nu)\}$ сходится к функции f такой, что $\nu = f\mu$.**

Шаг 3: На каждом из $A_{\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]}$, имеем $\frac{i}{n}\mu \leqslant \nu \leqslant \frac{i+1}{n}\mu$, значит,

$$0 \leqslant \nu - \Psi_n\mu \leqslant \frac{1}{n}\mu.$$

Поэтому Ψ_n – последовательность Коши в L^1-топологии, заданной μ, и ее предел удовлетворяет $\nu - \lim \Psi_n\mu = 0$. ■

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что последовательность $\{\Psi_n(\nu)\}$ равномерно сходится.

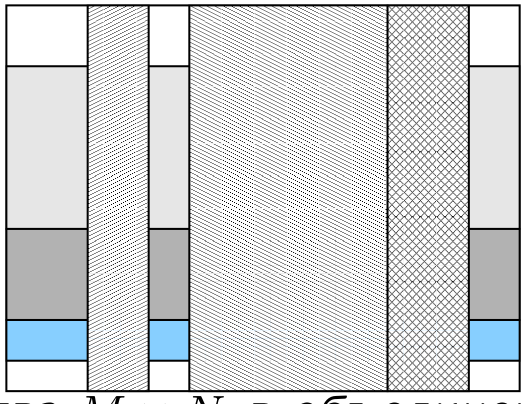
Цилиндрические множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $W = M \times N$ – произведение множеств, снабженных сигма-алгебрами A_M и A_N. Определим **цилиндрическое множество** как множество вида $X \times Y$, где $X \in A_M$ и $Y \in A_N$ – подмножества M и N, лежащие в σ-алгебре. **Алгебра цилиндрических множеств** есть кольцо множеств, порожденное конечными объединениями цилиндрических. **Произведение сигма-алгебр** есть сигма-алгебра подмножеств $M \times N$, порожденная цилиндрическими множествами.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть μ, ν – аддитивные меры на сигма-алгебрах A_M и A_N, $\mu(M), \nu(N) < \infty$. Рассмотрим функцию ξ на множестве цилиндрических подмножеств $M \times N$, определенную формулой $\xi(X \times Y) = \xi(X) \times \xi(Y)$. **Тогда ξ можно продолжить до сигма-аддитивной функции на алгебре цилиндрических множеств, которую мы обозначаем за $\mu \times \nu$.**

Цилиндрические множества (продолжение)

Доказательство: Легко видеть, что пересечение цилиндрических множеств цилиндрическое. Поэтому достаточно доказать, что если цилиндрическое множество Z разбито в конечное объединение цилиндрических, $Z = \bigcup Z_i$, то $\xi(Z) = \sum \xi(Z_i)$. Это видно из следующей картинки.



Разбиение множества $M \times N$ в объединение цилиндрических

Для формального доказательства, рассмотрим измельчение разбиения $Z = M \times N = \bigcup Z_i$ такое, что $M = \coprod M_p$, $N = \coprod N_q$, и $M \times N = \coprod_{p,q} M_p \times N_q$. Назовем такое разбиение **простым**. Для простого разбиения, аддитивность меры следует сразу из определения. С другой стороны, каждый из Z_i будет объединением нескольких элементов вида $M_p \times N_q$, причем такое разбиение Z_i тоже будет простым, значит, $\xi(Z) = \sum \xi(Z_i)$ следует из $\xi(Z) = \sum_{p,q} \xi(M_p \times N_q)$. ■

Теорема Фубини

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть μ, ν – σ-аддитивные меры на A_M и A_N. **Измеримое подмножество** в $M \times N$ есть подмножество, которое, с точностью до меры нуль, лежит в алгебре подмножеств $M \times N$, порожденной цилиндрическими множествами.

ТЕОРЕМА: (теорема Фубини)
Пусть M, N – пространства, снабженные сигма-алгебрами A_M и A_N и σ-конечной мерой μ, ν, а $\xi = \mu \times \nu$ – мера произведения на $M \times N$. Рассмотрим интегрируемую функцию $f: M \times N \to \mathbb{R}$, и пусть $M \times N \stackrel{\pi}{\to} M$ - проекция. Тогда

(i) Для почти всех $m \in M$, ограничение $f\Big|_{\pi^{-1}(m)}$ – интегрируемая функция на $\pi^{-1}(m) \cong N$.

(ii) Пусть $\varphi: M \to \mathbb{R}$ – функция, заданная формулой $\varphi(m) := \int_N f\Big|_{\pi^{-1}(m)} \nu$ вне множества меры 0, где интеграл $\int_\nu f\Big|_{\pi^{-1}(m)}$ не определен. Тогда φ интегрируема, и $\int_{M \times N} f\xi = \int_M \varphi\mu$.

Guido Fubini
(January 19, 1879 - June 6, 1943)

Функции с измеримыми ограничениями на $\{m\} \times N$

Утверждение 1: Обозначим за $\mathfrak{A}$ σ-алгебру в $M \times N$, порожденную цилиндрическими множествами. **Тогда для любой измеримой функция f найдется f', которая получается как предел монотонной последовательности $f'_n = \sum c_i \chi(Z'_i)$, где все Z'_i принадлежат $\mathfrak{A}$, а $f - f' = 0$ почти всюду.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Каждая измеримая функция f получается как предел монотонно неубывающей последовательности $f_n := \Psi_n(f)$ ступенчатых функций вида $f_n = \sum c_i \chi(Z_i)$, где $\chi(Z_i)$ есть характеристическая функция измеримого множества Z_i. Заменив каждое Z_i на Z'_i, лежащее в $\mathfrak{A}$, и продолжив f'_i нулем на дополнении, мы получим монотонную последовательность $f'_n = \sum c_i \chi(Z'_i)$. ■

Доказательство теоремы Фубини, (i): Применяя Утверждение 1 к f из теоремы Фубини, мы получим, что функция $f'\Big|_{\pi^{-1}(m)}$ измерима для каждого $m \in M$. В самом деле, $f'\Big|_{\pi^{-1}(m)}$ **получено как предел монотонной последовательности ступенчатых функций, ограничение каждой из которых на $\pi^{-1}(m)$ измеримо.**

Прямой образ меры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M, N – пространства с σ-алгебрами A_M и A_N. **Измеримое отображение** есть такое отображение $f: M \to N$, что прообраз множества, лежащего в A_N, содержится в A_M.

ЗАМЕЧАНИЕ: Обыкновенная "измеримая функция" есть **измеримое отображение из пространства с σ-алгеброй в $\mathbb{R}$ с сигма-алгеброй борелевских множеств.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $W = M \times N$ – произведение множеств, снабженных сигма-алгебрами A_M и A_N, а A_W – сигма-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами в W. Рассмотрим проекцию $M \times N \xrightarrow{\pi} M$. Поскольку прообраз $\pi^{-1}(Z)$ измеримого множества $Z \subset M$ цилиндрический, он измерим, значит, **π есть измеримое отображение.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $f: M \to N$ – измеримое отображение пространств, снабженных сигма-алгебрами A_M и A_N, а μ есть сигма-аддитивная мера на A_M. Рассмотрим функцию $\pi_*\mu$ на A_N, заданную формулой $\pi_*\mu(Z) := \mu(\pi^{-1}(Z))$. Легко видеть, что $\pi_*\mu$ есть σ-аддитивная мера на A_N (проверьте это). Мера $\pi_*\mu$ называется **прямым образом меры μ.**

Теорема Фубини и теорема Радина-Никодима

УТВЕРЖДЕНИЕ: В условиях теоремы Фубини, **мера $\pi_*(f\xi)$ является абсолютно непрерывной: $\pi_*(f\xi) \ll \mu$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $\pi_*(f\xi)(Z) = 0$ для любого множества меры нуль, потому что прообраз множества меры нуль цилиндрический и имеет меру нуль. ■

Доказательство теоремы Фубини, (ii), шаг 1:
Применяя теорему Радона-Никодима, мы находим, что $\pi_*(f\xi) = t\mu$, где t есть интегрируемая функция, удовлетворяющая $\int_\mu t = \int_\xi f$. **Для доказательства теоремы Фубини осталось доказать, что $t = \varphi$, где φ – функция, определенная в теореме Фубини (ii).**

Теорема Фубини и теорема Радина-Никодима

Доказательство теоремы Фубини, (ii), шаг 1:
Применяя теорему Радона-Никодима, мы находим, что $\pi_*(f\xi) = t\mu$, где t есть интегрируемая функция, удовлетворяющая $\int_\mu t = \int_\xi f$. **Для доказательства теоремы Фубини осталось доказать, что $t = \varphi$, где φ – функция, определенная в теореме Фубини (ii).**

Шаг 2: Заменив f на монотонно неубывающий предел ступенчатых функций $f = \lim f_i$, мы получим, что соотвествующие функции $t(f_i)$ и $\varphi(f_i)$ тоже монотонно неубывают. Поскольку интеграл перестановочен с пределом монотонно неубывающих функций (см. в прошлой лекции), мы получаем, что **достаточно доказать, что $t = \varphi$ для ступенчатой функции f.** Это, в свою очередь, следует, если мы докажем теорему Фубини для $f = \chi(U)$.

Шаг 3: Измеримое подмножество в $M \times N$ получается как предел счетных объединений цилиндрических; **снова переходя к пределу, убеждаемся, что достаточно доказать, что $\varphi = t$ для $f = \chi(U)$, где U – цилиндрическое множество.** Это сразу следует из определения меры на произведении. ■