# Теория меры, лекция 7: мера Каратеодори

Миша Вербицкий

**18 апреля 2015**

**НМУ**

## Объем на борелевских множествах

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $M$ – хаусдорфово топологическое пространство. **Алгебра борелевских множеств** есть сигма-алгебра, порожденная компактными подмножествами $M$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $\mathbf{C}$ – множество компактных подмножеств $M$. **Объем** есть функция $\lambda: \mathbf{C} \to [0,\infty]$ которая удовлетворяет следующим условиям.

**[Монотонность:]** $\lambda(A) \leqslant \lambda(B)$ для $A \subset B$.

**[Аддитивность:]** $\lambda(A \coprod B) = \lambda(A) + \lambda(B)$

**[Полуаддитивность:]** $\lambda(A \cup B) \leqslant \lambda(A) + \lambda(B)$.

## Внешняя мера

**ПРИМЕР:** Пусть $\lambda(C)$ есть число целых точек во внутренности компактного подмножества $C \subset \mathbb{R}^n$. **Это объем.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть на топологическом пространстве $M$ задан объем $\lambda$. Определим **внутреннюю меру** открытого множества $U$ как $\lambda_*(U) := \sup_{K \subset U} \lambda(K)$, где супремум берется по всем компактам в $U$. Определим **внешнюю меру** множества $A$ как $\lambda^*(A) := \inf_{U \supset A} \lambda_*(U)$, где инфимум берется по всем открытым окрестностям $A$.

## Объем и мера Лебега

**ЛЕММА:** Пусть $\lambda$ есть мера Лебега на $\mathbb{R}^n$. **Тогда $\lambda^*(K) = \lambda(K)$ для любого компакта $X \subset \mathbb{R}^n$.**

**Доказательство. Шаг 1:** Неравенство $\lambda^*(K) \geqslant \lambda(K)$ очевидно.

**Шаг 2:** Из хаусдорфовости легко получить, что $K = \bigcap_{U \supset K} U$ **(проверьте это).** Тогда $\lambda^*(K) = \lim_i \lambda(K_i)$, где $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset ...$ – последовательность окрестностей $K$, удовлетворяющих $\bigcap_i U_i = K$, а $K_i \subset U_i$ – подходящая последовательность компактных подмножеств. Заменив $K_n$ на $K \cup \bigcap_{i=1}^n K_i$, можно считать, что каждый $K_i$ содержит $K$ и $\bigcap K_i = K$. **Тогда $\lim_i \lambda(K_i) = \lambda(K)$ в силу $\sigma$-аддитивности меры Лебега.** ■

Основной результат этой лекции есть теорема Каратеодори о продолжении внешней меры (“Caratheodory extension theorem”). Я докажу ее в конце лекции.

**ТЕОРЕМА: (теорема Каратеодори о продолжении меры)**
Пусть $M$ – хаусдорфово топологическое пространство, а $\lambda$ – объем на нем. **Тогда внешнюю меру $\lambda^*$ можно продолжить до счетно-аддитивной меры на борелевских множествах.**

## Непересекающиеся окрестности компактов

**Лемма 1:** Пусть $M$ – хаусдорфово топологическое пространство, а $A, B$ – непересекающиеся компактные множества. **Тогда у $A$ и $B$ есть непересекающиеся открытые окрестности.**

**Доказательство. Шаг 1:** Достаточно доказать, что у $A$ есть окрестность, замыкание которой не пересекается с $B$ **(докажите это).**

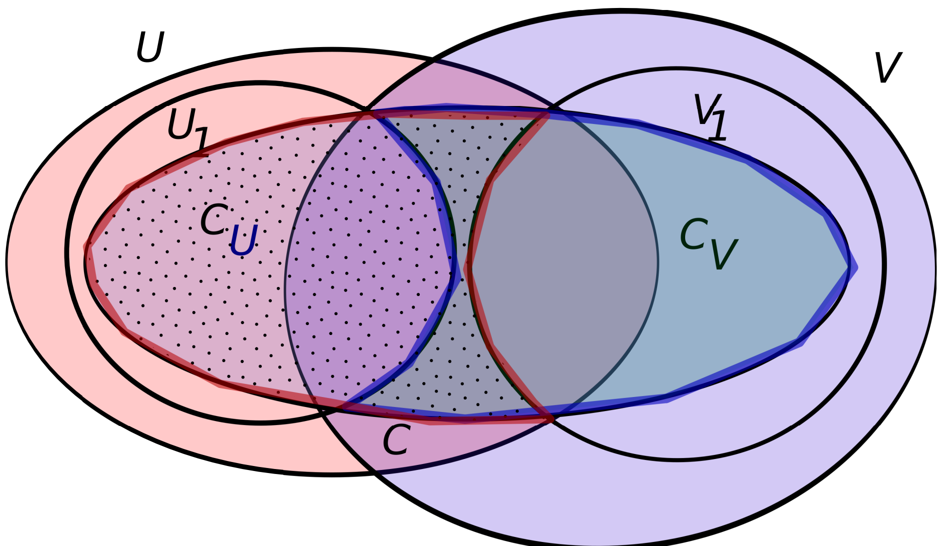
**Шаг 2:** Пусть $x \in B$. Для каждого $z \in A$, выберем окрестность $U_z \ni z$, замыкание которой $\overline{U_z}$ не содержит $x$ **(такая окрестность существует в силу хаусдорфовости — докажите).** Поскольку $A$ компактно, а $U_z$ — открытое покрытие $A$, из него можно выбрать конечное подпокрытие $U_1, ..., U_n$. Замыкание множества $\bigcup U_i$ не содержит $x$, потому что $\overline{\bigcup_{i=1}^n U_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{U_i}$. **Мы получили, что у $A$ есть окрестность, замыкание которой не содержит $x \in B$.**

**Шаг 3:** Из этого следует, что у любого $x \in B$ есть окрестность $V_x$, которая не пересекает открытую окрестность $U_x \supset A$. Множества $V_x$ покрывают $B$; в силу компактности, можно выбрать конечное подпокрытие $\{V_i\}$. Обозначим соответствующие открытые окрестности $A$ за $U_i$. **Тогда $\bigcup V_i$ есть открытая окрестность $B$, которая не пересекает $\bigcap U_i$.** ■

## Разбиение компакта в объединение компактов

**ЛЕММА:** Пусть $C \subset U \cup V$ компактное подмножество объединения двух открытых множеств. **Тогда существуют компактные подмножества $C_U \subset U$ и $C_V \subset V$, такие, что $C_U \cup C_V = C$.**

**Доказательство:** $C \backslash U$ и $C \backslash V$ – замкнутые подмножества компакта, значит, они компактны. Поскольку они не пересекаются, у них есть непересекающиеся окрестности, $V_1$ и $U_1$. Множества $C_U := C \backslash V_1$ и $C_V := C \backslash U_1$ также компактны и лежат в $U$ и $V$, соответственно, их объединение дает все $C$, как видно из приведенной иллюстрации.




*Разбиение компакта $C$ в объединение компактов $C_U$ и $C_V$.*

■

## Полуадитивность внешней меры

**УТВЕРЖДЕНИЕ: Внешняя мера полуаддитивна: $\lambda^*(A\cup B)\leqslant\lambda^*(A)+\lambda^*(B)$, для любых $A,B$.**

**Доказательство. Шаг 1: Докажем полуаддитивность, когда $A$, $B$ открыты.** В этой ситуации имеем имеем $\lambda^*(U\cup V)=\sup_{C\subset U\cup V}\lambda(C)\leqslant\lambda(C_U)+\lambda(C_V)$, где $C_U$, $C_V$ – компактные множества, построенные в предыдущей лемме. С другой стороны, $\lambda(C_U)\leqslant\lambda^*(U)$ и $\lambda(C_V)\leqslant\lambda^*(V)$ по определению внешней меры.

**Шаг 2:** Для произвольных $A,B$, и любого $\varepsilon>0$, имеем $\lambda^*(A)+\lambda^*(B)\geqslant\lambda^*(U)+\lambda^*(V)-\varepsilon$ для подходящих окрестностей $U\supset A$ и $V\supset B$. Воспользовавшись предыдущим шагом, получаем

$$\lambda^*(A)+\lambda^*(B)\geqslant\lambda^*(U)+\lambda^*(V)-\varepsilon\geqslant\lambda^*(U\cup V)-\varepsilon\geqslant\lambda^*(A\cup B)-\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon$ произвольный, это дает $\lambda^*(A\cup B)\leqslant\lambda^*(A)+\lambda^*(B)$. ■

## $\sigma$-полуадитивность внешней меры

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** **Внешняя мера $\sigma$-полуаддитивна:** $\lambda^*(\bigcup A_i) \leqslant \sum_{i=1}^\infty \lambda^*(A_i)$.

**Доказательство. Шаг 1:** Обозначим объединение $\bigcup A_i$ за $A$. Пусть все $A_i$ открыты. Тогда $\lambda^*(A) = \sup_{K\subset A} \lambda(K)$, где супремум берется по всем компактам, содержащимся в $A$. Каждый такой компакт имеет конечное подпокрытие, $K \subset \bigcup_{i=1}^N A_i$, что дает $\lambda(K) \leqslant \lambda^*(K) \leqslant \sum_{i=1}^N \lambda^*(A_i)$ в силу полуаддитивности. Получаем:

$$\lambda^*(A) = \sup_{K\subset A} \lambda(K) \leqslant \sum_{i=1}^\infty \lambda^*(A_i).$$

**Шаг 2:** Для произвольных $A_i$, и любого $\varepsilon > 0$, имеем $\sum_{i=1}^\infty \lambda^*(A_i) \geqslant \sum_{i=1}^\infty \lambda^*(U_i) - \varepsilon$ для подходящих окрестностей $U_i \supset A_i$ (проверьте это). Воспользовавшись предыдущим шагом, получаем

$$\sum_{i=1}^\infty \lambda^*(A_i) \geqslant \sum_{i=1}^\infty \lambda^*(U_i) - \varepsilon \geqslant \lambda^*\left(\bigcup U_i\right) - \varepsilon \geqslant \lambda^*(A) - \varepsilon.$$

■

## Измеримость по Каратеодори

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $M$ – топологическое пространство, $\lambda$ – объем, а $\lambda^*$ – соответствующая ему внешняя мера. Подмножество $A \subset M$ называется **измеримым по Каратеодори**, если для любого $X \subset M$, имеем $\lambda^*(X \backslash A) + \lambda^*(X \cap A) = \lambda^*(X)$.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** **Условие $\lambda^*(X \backslash A) + \lambda^*(X \cap A) = \lambda^*(X)$ достаточно проверять для открытых $X$.** Действительно, пусть $U \supset X$ – открыто, и для всех таких $U$, имеем $\lambda^*(U \backslash A) + \lambda^*(U \cap A) = \lambda^*(U)$. Тогда

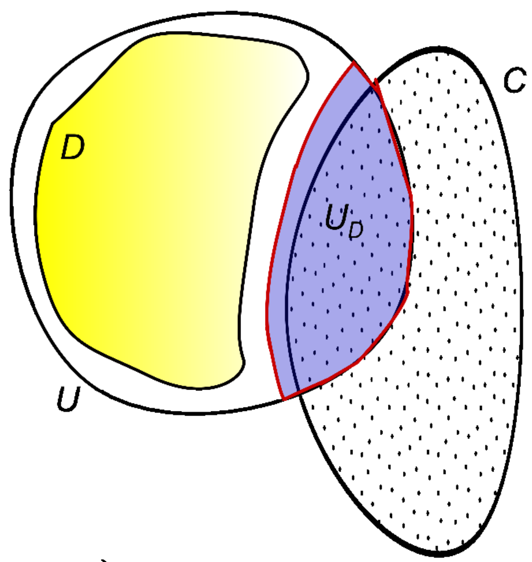
$$\lambda^*(X) = \inf_{U \supset X} \lambda^*(U) = \inf_{U \supset X} \left[\lambda^*(U \backslash A) + \lambda^*(U \cap A)\right] \geqslant \lambda^*(X \backslash A) + \lambda^*(X \cap A).$$

Это дает $\lambda^*(X \backslash A) + \lambda^*(X \cap A) \leqslant \lambda^*(X)$. Противоположное неравенство следует из полуаддитивности внешней меры.

## Компакты измеримы по Каратеодори

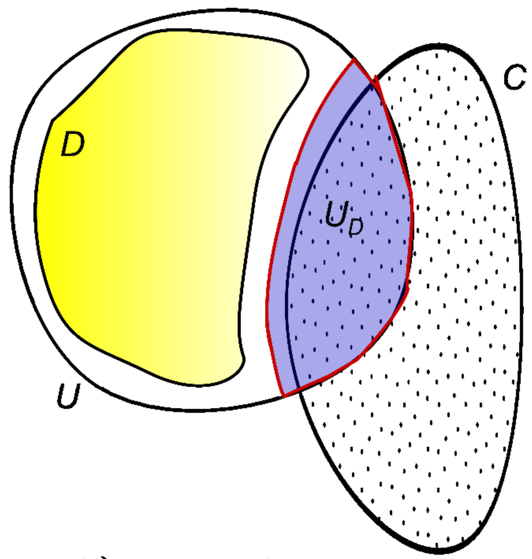
**УТВЕРЖДЕНИЕ: Любое компактное множество измеримо по Каратеодори.**

**Доказательство:** Пусть $C$ – компактное, а $U$ открыто. В силу предыдущего замечания, достаточно проверить, что $\lambda^*(U\backslash C)+\lambda^*(U\cap C)=\lambda^*(U)$. Возьмем компактное подмножество $D\subset U\backslash C$, и пусть $V_D\supset C$ – открытая окрестность, замыкание которой не пересекает $D$ (она существует в силу Леммы 1)




*Вычисление $\lambda^*(U\backslash C)+\lambda^*(U\cap C)$, где $C$ – компакт, $U$ – открытое множество.*

# Компакты измеримы по Каратеодори (продолжение)




*Вычисление $\lambda^*(U\backslash C)+\lambda^*(U\cap C)$, где $C$ – компакт, $U$ – открытое множество.*

Тогда $\lambda^*(U\cap C)\leqslant\lambda^*(U\cap V_D)=\sup_{E\subset U\cap V_D}\lambda(E)$, где $E$ – компакт, лежащий в $U_D:=U\cap V_D$. Это дает

$$\lambda^*(U\cap C)+\lambda^*(U\backslash C)\leqslant\sup_{D\subset U\backslash C}\lambda(D)+\sup_{E\subset U_D}\lambda(E).\quad (*)$$

Поскольку $E$ и $D$ – непересекающиеся компакты, лежащие в $U$, имеем

$$\lambda(D)+\lambda(E)=\lambda(E\cup D)\leqslant\lambda^*(U).$$

Вместе с (*) это дает $\lambda^*(U\cap C)+\lambda^*(U\backslash C)\leqslant\lambda^*(U)$. Обратное неравенство следует из полуаддитивности внешней меры. ■

## Пересечение множеств, измеримых по Каратеодори

**УТВЕРЖДЕНИЕ: Пересечение, объединение, дополнение множеств, измеримых по Каратеодори, снова измеримо по Каратеодори.**

**Доказательство. Шаг 1:** Для дополнения $A_1 := M\backslash A$ это особенно очевидно, потому что $X\backslash A = X \cap A_1$, а $X \cap A = X\backslash A_1$.

**Шаг 2:** Докажем, что $A \cap B$ измеримо, если $A$ и $B$ измеримы.

## Пересечение измеримых по Каратеодори (продолжение)

**Шаг 2:** Чтобы доказать, что $A \cap B$ измеримо, отметим, что $X = \Big((X\backslash A)\backslash B\Big) \coprod \Big((X\backslash A) \cap B\Big) \coprod \Big((X \cap A)\backslash B\Big) \coprod \Big((X \cap A) \cap B\Big)$, и в силу измеримости $A$ и $B$ это дает

$$\lambda^*(X) = \lambda^*((X\backslash A)\backslash B)+\lambda^*((X\backslash A)\cap B)+\lambda^*((X\cap A)\backslash B)+\lambda^*((X\cap A)\cap B). \quad (**)$$

Поскольку $X\backslash(A\cap B) = \Big((X\backslash A)\backslash B\Big) \coprod \Big((X\backslash A) \cap B\Big) \coprod \Big((X \cap A)\backslash B\Big)$, из полуаддитивности следует

$$\lambda^*(X\backslash(A\cap B)) \leqslant \lambda^*((X\backslash A)\backslash B) + \lambda^*((X\backslash A) \cap B) + \lambda^*((X \cap A)\backslash B).$$

Сравнивая это с (**) получаем

$$\begin{aligned}\lambda^*(X) &= \lambda^*(X\backslash(A\cap B)) + \lambda^*((X\backslash A) \cap B) + \lambda^*((X \cap A)\backslash B) + \lambda^*((X \cap A) \cap B)\\ &\geqslant \lambda^*(X\backslash(A\cap B)) + \lambda^*(X \cap (A \cap B)).\end{aligned}$$

Противоположное неравенство следует из полуаддитивности внешей меры. Доказательство для $A \cup B$ аналогично. ■

## Счетное объединение множеств, измеримых по Каратеодори

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** **Счетное объединение множеств, измеримых по Каратеодори, снова измеримо по Каратеодори.**

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть $\{A_i, i = 1, 2, 3, ...\}$ – счетный набор множеств, измеримых по Каратеодори. Заменив каждый $A_i$ на дополнение ко всем предыдущим, можно считать, что они попарно не пересекаются.

**Шаг 2:** Пусть $X$ произвольное множеством $U$ – окрестность $A \cap X$, где $A := \bigcup A_i$, а $U_i \supset A_i \cap X$ окрестности, содержащиеся в $U$. Для любого компакта $K \subset A \cap X$, $K$ содержится в конечном объединении $U_i$, что дает

$$\lambda^*(A \cap X) \geqslant \lim_N \lambda^* \left( \bigcup_{i=0}^N U_i \right) \geqslant \lim_N \lambda^* \left( \bigcup_{i=0}^N A_i \cap X \right) = \lim_N \sum_{i=1}^N \lambda^*(A_i \cap X)$$

(последнее равенство вытекает из измеримости $A_i$). Из этого следует $\lambda^*(A \cap X) \geqslant \sum_{i=1}^\infty \lambda^*(A_i \cap X)$; противоположное неравенство вытекает из $\sigma$-аддитивности внешней меры, что дает

$$\lambda^* \left( \left( \coprod A_i \right) \cap X \right) = \sum_{i=1}^\infty \lambda^*(A_i \cap X).$$

## Счетное объединение множеств, измеримых по Каратеодори (2)

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** **Счетное объединение множеств, измеримых по Каратеодори, снова измеримо по Каратеодори.**

**Шаг 2 (заключение):** $A_i$ – счетный набор попарно непересекающихся множеств, измеримых по Каратеодоры; для любого $X$ получаем

$$\lambda^*\left(\left(\coprod A_i\right) \cap X\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(A_i \cap X).$$

**Шаг 3:** Из этого следует

$$\lambda^*(A \cap X) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(A_i \cap X) = \lambda^*(X) - \lim_N \lambda^* \left(X \backslash \left(\coprod_{i=1}^{N} A_i\right)\right) \leqslant \lambda^*(X) - \lambda^*(X \backslash A)$$

(последнее неравенство следует из монотонности внешней меры). Получаем $\lambda^*(A \cap X) + \lambda^*(X \backslash A) \leqslant \lambda^*(X)$; противоположное неравенство следует из полуаддитивности, что дает $\lambda^*(A \cap X) + \lambda^*(X \backslash A) = \lambda^*(X)$. ■

## Множества меры нуль измеримы по Каратеодори

**ЛЕММА:** Пусть $A$ – множество внешней меры 0. **Тогда $\lambda^*(X \cup A) = \lambda^*(X)$ и $\lambda^*(X \backslash A) = \lambda^*(X)$ для любого $X$.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** $\lambda^*(X \cup A) = \lambda^*(X)$ следует из полуаддитивности. Чтобы убедиться в том, что $\lambda^*(X \backslash A) = \lambda^*(X)$, возьмем у $A$ окрестность $U$ внешней меры $\leqslant \varepsilon$, а в $X$ впишем компакт $K$ объема $\lambda^*(X) - \varepsilon$. В силу измеримости $U$ по Каратеодори, $K \backslash U$ удовлетворяет $\lambda^*(K \backslash U) \geqslant \lambda^*(X) - 2\varepsilon$, значит,

$$\lambda^*(X \backslash A) \geqslant \lambda^*(K \backslash U) \geqslant \lambda^*(X) - 2\varepsilon,$$

для любого $\varepsilon > 0$. ■

**СЛЕДСТВИЕ:** Пусть $A$ – множество внешней меры 0. **Тогда $A$ измеримо по Каратеодори.** ■

## Мера Каратеодори и мера Лебега

**УТВЕРЖДЕНИЕ: Измеримое по Лебегу множество измеримо по Каратеодори.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Компакты измеримы по Каратеодори, а также их объединения, дополнения, пересечения, значит, **все борелевские множества измеримы по Каратеодори.** В силу предыдущей леммы, все множества меры нуль тоже измеримы по Каратеодори. $\sigma$-алгебра множеств, измеримых по Лебегу, порождена борелевскими и меры нуль. ■

**ТЕОРЕМА:** Пусть $\mu$ – объем компакта по Лебегу, а $\mu^*$ – связанная с этим объемом внешняя мера. **Тогда для каждого измеримого по Лебегу множества, $\mu^*(X)$ есть мера Лебега множества $X$.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** На измеримых по Каратеодори множествах, $\mu^*$ $\sigma$-аддитивна и равна $\mu$ на компактах и на множествах меры 0. С другой стороны, $\sigma$-аддитивная мера однозначно задается своими значениями на любом наборе образующих. ■