Теория меры, лекция 8: мера Хаара (1)

Миша Вербицкий

25 апреля 2015

НМУ

Объем на компактных множествах (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство. **Алгебра борелевских множеств** есть сигма-алгебра, порожденная компактными подмножествами M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathbf{C}$ – множество компактных подмножеств M. **Объем** есть функция $\lambda: \mathbf{C} \to [0, \infty]$ которая удовлетворяет следующим условиям.

[Монотонность:] $\lambda(A) \leqslant \lambda(B)$ для $A \subset B$.
[Аддитивность:] $\lambda(A \coprod B) = \lambda(A) + \lambda(B)$
[Полуаддитивность:] $\lambda(A \cup B) \leqslant \lambda(A) + \lambda(B)$.

ПРИМЕР: Пусть $\lambda(C)$ есть число целых точек во внутренности компактного подмножества $C \subset \mathbb{R}^n$. **Это объем.**

Теорема Каратеодори о продолжении

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство. **Алгебра борелевских множеств** есть сигма-алгебра, порожденная компактными подмножествами M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть на топологическом пространстве M задан объем λ. Определим **внутреннюю меру** открытого множества U как $\lambda_*(U) := \sup_{K\subset U} \lambda(K)$, где супремум берется по всем компактам в U. Определим **внешнюю меру** множества A как $\lambda^*(A) := \inf_{U\supset A} \lambda_*(U)$, где инфимум берется по всем открытым окрестностям A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Топологическое пространство называется **локально компактным**, если у каждой точки есть окрестность, замыкание которой компактно.

На прошлой лекции была доказана такая теорема.

ТЕОРЕМА: **(теорема Каратеодори о продолжении)**
Пусть M – локально компактное, хаусдорфово топологическое пространство, где каждое открытое множество является счетным объединением компактов, а λ – объем. **Тогда λ^* задает σ-аддитивную меру на борелевских множествах.**

Топологические группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – топологическое пространство, снабженное структурой группы. G называется **топологической группой**, если отображение умножения $G \times G \xrightarrow{g,g' \mapsto gg'} G$ и взятия обратного $G \xrightarrow{g \mapsto g^{-1}} G$ непрерывны.

ПРИМЕР: $\mathbb{R}^n$ с обычной групповой структурой является топологической группой.

ПРИМЕР: **Группа $GL(n,\mathbb{R})$ и $GL(n,\mathbb{C})$ обратимых матриц над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ является топологической группой.** Непрерывность умножения очевидна, потому что оно полиномиально (проверьте). Непрерывность взятия обратного следует из двух наблюдений:

(i) $A^{-1} = \frac{A^\circ}{\det A}$, где $\det A$ есть определитель, а A° – матрица, составленная из миноров.

(ii) Отображение $A \to A^\circ$ непрерывно, потому что оно полиномиально, а функция $A \to \frac{1}{\det A}$ непрерывна на обратимых матрицах, потому что обратна к незануляющейся на $GL(n)$ полиномиальной функции $A \to \det A$.

Топологические группы (2)

ПРИМЕР: Любая подгруппа топологической группы с индуцированной топологией является топологической группой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа Ли есть гладкое многообразие, снабженное структурой группы, таким образом, что умножение и взятие обратного суть гладкие отображения

ЗАМЕЧАНИЕ: Очевидно, **любая группа Ли является топологической группой.**

p-адические числа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть p – простое число. **p-адическое нормирование** на целых числах определяется по формуле $\nu_p(p^k n) = p^{-k}$, где n – целое число, взаимно простое с p.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что $x, y \to \nu_p(x-y)$ задает метрику на $\mathbb{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Такая метрика называется **p-адической.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Кольцо целых p-адических чисел** (обозначается $\mathbb{Z}_p$) есть пополнение $\mathbb{Z}$ в p-адической метрике.

УПРАЖНЕНИЕ: **Проверьте, что это кольцо.**

ЗАМЕЧАНИЕ: **Деление на p^k с остатком непрерывно в p-адической метрике** (проверьте), что дает непрерывный гомомоморфизм $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/(p^k\mathbb{Z})$. p-адическое число называется **неделящимся на** p, если его образ при гомоморфизме $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ ненулевой.

Деление в $\mathbb{Z}_p$

ЗАМЕЧАНИЕ: Каждое p-адическое число $z \in \mathbb{Z}_p$ имеет p-адическую норму $\leqslant 1$. В силу критерия Коши сходимости, любой ряд $\sum_{i=0}^{\infty} p^i a_i$ сходится, где a_i – целые p-адические. В частности, сходится ряд $\frac{1}{1+pA} = 1 - pA + p^2A^2 - p^3A^3 + ...$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Любое целое p-адическое число A, не делящееся на p, обратимо в $\mathbb{Z}_p$.

Доказательство: Пусть a – остаток от A по модулю p. Поскольку $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ – поле, найдется такое b, что $ab = 1 \mod p$. Значит, $C_1 = AB - 1$ делится на p для какого-то $B \in \mathbb{Z}_p$. Получаем $C_1 = pC$

$$\frac{1}{A} = \frac{B}{AB} = \frac{B}{pC+1} = B(1 - pC + p^2C^2 - p^3C^3 + ...).$$

■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Поле частных $\mathbb{Z}_p$ называется **поле p-адических чисел**, и обозначается $\mathbb{Q}_p$.

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу предыдущего утверждения,

$$\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p(p^{-1}) = \mathbb{Z}_p \cup p^{-1}\mathbb{Z}_p \cup p^{-2}\mathbb{Z}_p \cup ...$$

Компактность $\mathbb{Z}_p$

ЗАМЕЧАНИЕ: Последовательность $\{z_i\}$ целых чисел сходится в p-адической метрике тогда и только тогда, когда для любого целого $n > 0$ найдется N такое, что для всех $i, j > N$, $z_i = z_j \mod p^n$ (проверьте это). Другими словами, $\{z_i\}$ сходится $\Leftrightarrow$ для любого n найдется N такое, что в представлении z_i, $i > N$ в p-ичной системе счисления все знаки вплоть до n-го равны:

...00000000000000000000000000000000020
...00000000000932750913745091723409572 10
...00000000000002638163761763186318161 0
...00000000000079279317937192791298816 10
...00000000000000000981203810282988161 0
...00000827398127391273970381028298816 10
...00037192379127239273970381028298816 10
7213719237912723927397038102829881610

Пределом такой последовательности будет сумма ряда вида $\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$, где $0 \leqslant a_i < p$. Иначе говоря, целое p-адическое число есть число, записанное в p-ичной системе счисления, но с бесконечным (возможно) числом ненулевых разрядов. Такие числа можно складывать и умножать в столбик, как и обычные целые.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\mathbb{Z}_p$ компактно.

Мера Хаара: определение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – топологическая группа, $g \in G$ ее элемент. Обозначим за $L^g: \ G \to G$ операцию **действия группы слева**, $x \to gx$, а за R^g – **правое действие**, $x \to xg^{-1}$. Борелевская мера μ называется **лево-инвариантной**, если $L^g_*(\mu) = \mu$, для любого $g \in G$, и **право-инвариантной**, если $R^g_*(\mu) = \mu$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Борелевская мера называется **локально конечной**, если у каждой точки есть окрестность, мера которой конечна.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть K компактно, а мера μ локально конечна. **Тогда $\mu(K)$ конечно (докажите это).**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Левая (правая) мера Хаара** на топологической группе есть лево- или правоинвариантная локально конечная борелевская мера на G.

ПРИМЕР: Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ как топологическую группу, с аддитивной групповой структурой. **Тогда мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ является мерой Хаара** (и правой, и левой, так как $\mathbb{R}^n$ коммутативная группа).

Мера Хаара (2)

ЗАДАЧА: Пусть $M = \mathbb{Z}_p$, а $\mu_d(K) := \operatorname{card}|\rho_d(K)|$, где $\rho_d : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^d\mathbb{Z}$, а card обозначает число элементов множества. Рассмотрим функцию на компактах $\mu(K) := \sup\lim \frac{\mu_d(K)}{p^d}$. Докажите, что **она монотонна, аддитивна и полуаддитивна, то есть задает объем на компактах.** Докажите, что **соответствующая этому объему мера Каратеодори на $\mathbb{Z}_p$ является мерой Хаара.**

На следующей лекции будет доказана такая теорема.

ТЕОРЕМА: **Мера Хаара существует и единственна с точностью до константы на каждой локально компактной группе G.**

Теорема Радона-Никодима (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ν, μ – меры на пространстве с σ-алгеброй. Множество Z называется **μ-пренебрежимым**, если $\mu(Z) = 0$. Мера ν называется **абсолютно непрерывной** относительно μ (обозначается $\nu \preccurlyeq \mu$) если каждое μ-пренебрежимое множество ν-пренебрежимо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть f – неотрицательная измеримая функция на пространстве с сигма-алгеброй и мерой μ. **Определим новую меру $f\mu$ формулой $f\mu(U) = \int_U f\mu$, где $\int_U f\mu$ есть интеграл от f по U.**

ТЕОРЕМА: Пусть ν, μ – меры на пространстве M с σ-алгеброй, причем $\nu \preccurlyeq \mu$, и $\nu(M), \mu(M) < \infty$. **Тогда существует измеримая функция f такая, что $\nu = f\mu$, причем f определено однозначно вне μ-пренебрежимого множества.**

Пространства Линделефа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Топологическое пространство M называется **пространством Линделёфа**, если любое покрытие M имеет счетное подпокрытие.

ЗАДАЧА: Придумайте связное пространство, не удовлетворяющее условию Линделефа.

ЗАДАЧА: Докажите, что **любое подмножество пространства Линделёфа является пространством Линделёфа.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство с σ-алгеброй и мерой μ. Измеримое подмножество $K \subset M$ называется **локально пренебрежимым**, если у каждой точки есть окрестность U такая, что пересечение $K \cap U$ μ-пренебрежимо.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если M – пространство Линделефа, то **из локальной пренебрежимости K следует пренебрежимость** (докажите это).

Единственность меры Хаара

ЗАМЕЧАНИЕ: Единственность меры Хаара сразу вытекает из следующей леммы. Действительно, если заданы две меры Хаара μ и μ', то μ абсолютно непрерывна относительно $\mu+\mu'$. Тогда теорема Радона-Никодима дает функцию f такую, что $\mu = f(\mu+\mu')$ и $\mu+\mu'$ – две меры Хаара.

ЛЕММА: Пусть G – локально компактная группа, снабженная левой мерой Хаара $\mu \neq 0$, а $f \geqslant 0$ – измеримая функция, такая, что $f\mu$ – тоже левая мера Хаара. **Тогда f постоянна вне локально μ-пренебрежимого множества.**

Доказательство. Шаг 1: Определим **предкомпактное** множество Z как множество, замыкание которого компактно. Тогда $\mu(Z) < \infty$. Выведите это из монотонности и локальной конечности μ.

Шаг 2: Пусть $U \subset G$ – предкомпактное открытое подмножество, такое, что $\mu(U) \neq 0$. **Такие подмножества всегда существуют,** потому что открытые подмножества U с компактным замыканием порождают борелевскую алгебру, а $\mu \neq 0$. Обозначим за K замыкание U.

Единственность меры Хаара (2)

Пусть $K \subset G$ – компакт ненулевой меры, а μ и $f\mu$ – меры Хаара на группе G.

Шаг 3: Пусть $\pi: K \times G \to G$ – проекция, $T: K \times G \to K \times G$ отображение, переводящее (k,g) в $(k, k^{-1}g)$, а $\tau: K \times G \to K \times G$ переводит (k,g) в $k^{-1}g$. Поскольку T – гомеоморфизм, это отображение измеримо (прообраз борелевского борелевский). Поскольку K компактно, проекция π собственная (прообраз компакта компактен), значит, она тоже измерима. Наконец, $\tau = T \circ \pi$ измеримо как композиция измеримых отображений.

Шаг 4: Рассмотрим меру произведения $\mu \times \mu$ на $K \times G$, определенную как в теореме Фубини, и пусть $\tilde{f} := \pi^* f$. Поскольку $\int_{K \times V} \tilde{f}\mu \times \mu = \mu(K) \int_V \tilde{f}\mu$, имеем $\pi_*(\tilde{f}\mu \times \mu) = f\mu(K)\mu$, где π_* обозначает прямой образ меры.

Шаг 5: По теореме Фубини, **мера $\tilde{f}\mu \times \mu$ T-инвариантна.** Действительно, образ $T(Z)$ цилиндра проектируется в K с теми же слоями, с которыми проектируется Z, и ограничение f на эти слои одинаково.

Шаг 6: В силу T-инвариантности меры $\tilde{f}\mu \times \mu$, имеем

$$\tau_*(\tilde{f}\mu \times \mu) = \pi_* T_*(\tilde{f}\mu \times \mu) = \pi_*(\tilde{f}\mu \times \mu) = \mu(K) f\mu,$$

где $\tau = T \circ \pi$. С другой стороны, теорема Фубини, примененная к τ, дает $\tau_*(\tilde{f}\mu \times \mu) = \Psi\mu$, где $\Psi(x) = \int_{xK} f\mu$. Мы получаем, что $\mu(K) f = \int_{xK} f\mu$ для почти всех x. ■

Унимодулярные группы

Поскольку правое действие группы на себе коммутирует с левым, для левой меры Хаара μ и любого $g \in G$ имеем $L_g^*\mu = \lambda_g\mu$, где $\lambda_g \in \mathbb{R}^{>0}$ – какая-то константа. Легко видеть, что **отображение $g \to \lambda_g$ задает гомоморфизм групп $G \to \mathbb{R}^{>0}$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Гомоморфизм $g \to \lambda_g$, определенный выше, называется **модулярной функцией**, или же **модулярным характером**. Если $\lambda_g = 1$ для всех g, группа G называется **унимодулярной**.

ПРИМЕР: Поскольку на абелевой группе правое действие равно (с точностью до знака) левому, правоинвариантная мера Хаара равна левоинвариантной. Значит, **любая абелева группа унимодулярна.**

ПРИМЕР: Если группа G равна своему коммутанту, все характеры этой группы тривиальны. Значит, G унимодулярна.

ПРИМЕР: Если G компактна, то $\mu(G) < \infty$ в силу локальной конечности. Поскольку μ G-инвариантно, имеем $\mu(G) = L_*^g\mu(G) = \lambda_g\mu(G)$, значит, $\lambda_g = 1$. Мы получили, что **любая компактная группа унимодулярна.**