Теория меры, лекция 9: мера Хаара (2)

Миша Вербицкий

2 мая 2015

НМУ

Объем на компактных множествах (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство. **Алгебра борелевских множеств** есть сигма-алгебра, порожденная компактными подмножествами M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathbf{C}$ – множество компактных подмножеств M. **Объем** есть функция $\lambda: \mathbf{C} \to [0, \infty]$ которая удовлетворяет следующим условиям.

[Монотонность:] $\lambda(A) \leqslant \lambda(B)$ для $A \subset B$.

[Аддитивность:] $\lambda(A \coprod B) = \lambda(A) + \lambda(B)$

[Полуаддитивность:] $\lambda(A \cup B) \leqslant \lambda(A) + \lambda(B)$.

Теорема Каратеодори о продолжении (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство. **Алгебра борелевских множеств** есть сигма-алгебра, порожденная компактными подмножествами M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть на топологическом пространстве M задан объем λ. Определим **внутреннюю меру** открытого множества U как $\lambda_*(U) := \sup_{K\subset U}\lambda(K)$, где супремум берется по всем компактам в U. Определим **внешнюю меру** множества A как $\lambda^*(A) := \inf_{U\supset A}\lambda_*(U)$, где инфимум берется по всем открытым окрестностям A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Топологическое пространство называется **локально компактным**, если у каждой точки есть окрестность, замыкание которой компактно.

Ранее была доказана такая теорема.

ТЕОРЕМА: (теорема Каратеодори о продолжении)
Пусть M – локально компактное, хаусдорфово топологическое пространство, где каждое открытое множество является счетным объединением компактов, а λ – объем. **Тогда λ^* задает σ-аддитивную меру на борелевских множествах,** и $\lambda^*(K) = \lambda(K)$.

Топологические группы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – топологическое пространство, снабженное структурой группы. G называется **топологической группой**, если отображение умножения $G \times G \xrightarrow{g,g' \mapsto gg'} G$ и взятия обратного $G \xrightarrow{g \mapsto g^{-1}} G$ непрерывны.

ПРИМЕР: $\mathbb{R}^n$ с обычной групповой структурой является топологической группой.

ПРИМЕР: **Группа $GL(n,\mathbb{R})$ и $GL(n,\mathbb{C})$ обратимых матриц над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ является топологической группой.**

ПРИМЕР: **Любая подгруппа топологической группы с индуцированной топологией является топологической группой.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа Ли** есть гладкое многообразие, снабженное структурой группы, таким образом, что умножение и взятие обратного суть гладкие отображения

ЗАМЕЧАНИЕ: Очевидно, **любая группа Ли является топологической группой.**

Мера Хаара (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – топологическая группа, $g \in G$ ее элемент. Обозначим за $L^g: \ G \to G$ операцию **действия группы слева**, $x \to gx$, а за R^g – **правое действие**, $x \to xg^{-1}$. Борелевская мера μ называется **лево-инвариантной**, если $L^g_*(\mu) = \mu$, для любого $g \in G$, и **право-инвариантной**, если $R^g_*(\mu) = \mu$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Борелевская мера называется **локально конечной**, если у каждой точки есть окрестность, мера которой конечна.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть K компактно, а мера μ локально конечна. **Тогда $\mu(K)$ конечно (докажите это).**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Левая (правая) мера Хаара** на топологической группе есть лево- или правоинвариантная локально конечная борелевская мера на G.

ПРИМЕР: Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ как топологическую группу, с аддитивной групповой структурой. **Тогда мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ является мерой Хаара** (и правой, и левой, так как $\mathbb{R}^n$ коммутативная группа).

Теорема Радона-Никодима (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ν, μ – меры на пространстве с σ-алгеброй. Множество Z называется **μ-пренебрежимым**, если $\mu(Z) = 0$. Мера ν называется **абсолютно непрерывной** относительно μ (обозначается $\nu \preccurlyeq \mu$) если каждое μ-пренебрежимое множество ν-пренебрежимо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть f – неотрицательная измеримая функция на пространстве с сигма-алгеброй и мерой μ. **Определим новую меру $f\mu$ формулой $f\mu(U) = \int_U f\mu$, где $\int_U f\mu$ есть интеграл от f по U.**

ТЕОРЕМА: Пусть ν, μ – меры на пространстве M с σ-алгеброй, причем $\nu \preccurlyeq \mu$, и $\nu(M), \mu(M) < \infty$. **Тогда существует измеримая функция f такая, что $\nu = f\mu$, причем f определено однозначно вне μ-пренебрежимого множества.**

Единственность меры Хаара и свертка с ядром

ЗАМЕЧАНИЕ: Если заданы две меры Хаара μ и μ', то μ абсолютно непрерывна относительно $\mu + \mu'$. Тогда теорема Радона-Никодима дает функцию f такую, что $\mu = f(\mu + \mu')$ и $\mu + \mu'$ – две меры Хаара. Для доказательства единственности меры Хаара достаточно убедиться, что f постоянна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\rho: G \times G \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ – ограниченная L^1-функция. **Свертка с ядром** ρ есть операция C_ρ, переводящая $f \in L^1(G)$ в $\pi_{1*}(\rho\pi_2^* f)$, где $\pi_1, \pi_2 : G \times G \to G$ – проекции.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если f, ρ инвариантны относительно левых сдвигов, то функция $C_\rho(f)$ тоже инвариантна.

Единственность меры Хаара

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть μ, μ_1 – левоинвариантные меры Хаара на G, причем $\mu_1 = f\mu$, где f – измеримая функция на G, а $\rho(x,y) = v(y^{-1}x)$, где v – измеримая функция на G. **Тогда $C_\rho(f) = \text{const}$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $C_\rho(f) = \pi_{1*}(\rho\pi_2^* f\mu \times \mu)$; интеграл этой функции по открытому множеству U записывается как

$$\int_U C_\rho(f)\mu = \int_{U\times G} \rho\mu \times \mu_1$$

что позволяет вычислить ее в точке: $C_\rho(f)(x) = \int_G v_x \mu_1$, где $v_x(z) = v(z^{-1}x)$. Отмечу, что, в отличие от f, которая определена вне множества меры нуль, **функция $C_\rho(f)$ хорошо определена на всем G и по построению левоинвариантна, а значит постоянна**.

Мы получаем, что f может быть получена как предел функций вида $C_\rho(f)$, где $v = \chi_{U_i}$ есть характеристическая функция множества U_i, пробегающего базу окрестностей единицы. ■

Функции $A:U$ и $\mu_{U,W}(A)$.

Пусть G – локально компактная топологическая группа, $U\subset G$ – открытое подмножество G, $A\subset G$ – компактное подмножество. Рассмотрим покрытие A всеми открытыми множествами вида Ux, где $x\in G$, и **пусть $A:U$ есть наименьшее число N, для которого A покрывается N открытыми подмножествами вида xU.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть G – топологическая группа. Зафиксируем компактное множество $W\subset G$, которое является замыканием открытой окрестности единицы W°, и **пусть $\mu_{U,W}(A):=\frac{A:U}{W:U}$ есть соответствующая функция на компактах. Тогда $\mu_{U,W}(A)$ левоинвариантна, полуаддитивна и монотонна как функция A.** ■

Замечание 1: Для непересекающихся компактных A и B, имеем $(A\coprod B):U=A:U+B:U$, если $U^{-1}A\cap U^{-1}B=\emptyset$. **В этом предположении имеем $\mu_{U,W}(A)+\mu_{U,W}(B)=\mu_{U,W}(A\coprod B)$.**

Функции $A:U$ и $\mu_{U,W}(A)$ (продолжение).

Утверждение 1: $\mu_{U,W}(A) \leqslant A:W^\circ$, где W° – внутренность W.

Это утверждение сразу следует из такой леммы.

ЛЕММА: **Для любого компактного A, прекомпактного открытого U и открытого V, имеем $(A:U)(\bar{U}:V) \geqslant A:V$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Покроем $\bar{U}$ открытыми множествами вида Vx_i, которых $\bar{U}:V$ штук а A – открытыми множествами вида Uy_j, которых $A:U$ штук. Тогда A покроется открытыми множествами вида Vx_iy_j, и будет их ровно $(A:U)(\bar{U}:V)$ штук. ■

Лемма Кантора

Лемма Кантора: Пусть $\{R_\alpha\}$ – какой-то набор компактных подмножеств топологического пространства , причем любое конечное пересечение R_α непусто. **Тогда пересечение всех R_α тоже непусто.**

Доказательство: Пусть $\bigcap_\alpha R_\alpha$ пусто. Тогда для любого индекса α_0, дополнения $M \backslash R_\alpha$ покрывают R_{α_0}. Выбрав из этого покрытия конечное подпокрытие $R_{\alpha_1}, ..., R_{\alpha_n}$, мы получим конечный набор подмножеств $R_{\alpha_0}, R_{\alpha_1}, ..., R_{\alpha_n}$, пересечение которых пусто. ■

Функции на множестве всех компактов

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{C}$ всех компактов в G, и множество $\mathcal{R}_W$ всех функций $\lambda: \mathfrak{C} \to [0, \infty[$, принимающих на компакте $A \in \mathfrak{C}$ значение $\lambda(A) \in [0, A : W^\circ]$. В силу Утверждения 1, любая функция $\mu_{U,W}$ принадлежит $\mathcal{R}_W$.

Отождествив $\mathcal{R}_W$ с произведением вида $\prod_{A \in \mathfrak{C}} [0, A : W^\circ]$, введем на $\mathcal{R}_W$ топологию произведения (тихоновского). **По теореме Тихонова, $\mathcal{R}_W$ компактно, как произведение компактов.**

Для произвольной окрестности $V \ni e$ единицы $e \in G$, обозначим за $\mathcal{R}_{V,W}$ замыкание множества всех функций вида $\mu_{U,W} \in \mathcal{R}_W$, где $U \subset V$ – открытое подмножество. **Поскольку $\mathcal{R}_{V,W}$ замкнуто в компакте, оно компактно.**

Отметим, что для любого конечного набора U_i, $\bigcap_i \mathcal{R}_{V_i,W} \subset \mathcal{R}_{\bigcap_i V,W}$, то есть непусто. В силу леммы Кантора пересечение $\bigcap_V \mathcal{R}_{V,W}$ тоже непусто.

Объем как предел $\mu_{U,W}$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\mu_W \in \bigcap_V \mathcal{R}_{V,W}$ – функция на компактах, которая лежит в пересечении $\mathcal{R}_{V,W}$, для всех открытых окрестностей $V \ni e$. **Тогда $\mu_W(A)$ левоинвариантна, полуаддитивна, аддитивна и монотонна как функция A, и удовлетворяет $\mu_W(W) = 1$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: По определению, μ_U есть предельная точка множества функций вида $\mu_{U,W}$. Левоинвариантность и полуаддитивность μ_W следует из аналогичных свойств $\mu_{U,W}$. Аддитивность μ_U следует из Замечания 1. Наконец, $\mu_W(W) = 1$ следует из $\mu_{U,W}(W) = 1$, что ясно из определения. ■

Функция объема μ_W

Функция μ_W задает объем на компактах в G. Соответствующая борелевская мера, построенная по теореме Каратеодори, левоинвариантна и локально конечна. **Чтобы доказать, что это мера Хаара, достаточно убедиться, что она ненулевая.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть μ_W^* есть внешняя мера на локально компактной топологической группе, построенная по μ_W. **Тогда $\mu_W^* \neq 0$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $U \supset W$. Тогда $1 = \mu_W(W) \leqslant \mu_W^*(U)$. ■