Теория меры, лекция 10: эргодические меры

Миша Вербицкий

9 мая 2015

НМУ

Эргодическое действие группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, μ) – пространство с мерой, а G – группа, действующая на M, сохраняя μ. Действие называется **эргодическим**, если для каждого измеримого G-инвариантного подмножества $Z \subset M$, либо Z, либо $M \backslash Z$ имеет меру 0. В этой ситуации мера μ называется **эргодической**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Выпуклый конус в векторном пространстве есть выпуклое подмножество, инвариантное относительно умножения на $\lambda \in \mathbb{R}^{>0}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: G-инвариантные меры образуют выпуклый конус.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть a – точка в выпуклом конусе A. Она называется **экстремальной**, если для любого открытого интервала $]x, y[$ с концами в A, содержащего a, x и y пропорциональны a.

ТЕОРЕМА: **Мера эргодична тогда и только тогда, когда она является экстремальной точкой в конусе G-инвариантных мер.**

Доказательство см. через слайд.

Эргодические меры и инвариантные функции

ЛЕММА: Мера μ на (M, G) эргодична тогда и только тогда, когда для любой G-инвариантной измеримой функции f на M, f постоянна почти везде.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Часть "тогда, когда" очевидна, достаточно взять за f характеристическую функцию измеримого множества.

["только тогда":] Приблизим f ступенчатыми функциями вида

$$x \xrightarrow{f_n} \frac{1}{2^n}[2^n f(x)],$$

как в лекции 4. Каждая из этих функций G-инвариантна, следовательно, одно из ее множества уровней есть почти все M, остальные имеют меру 0. Значит, все f_n постоянны почти везде. Предел постоянных функций тоже постоянный. ■

Эргодические меры и экстремальные точки

ТЕОРЕМА: Мера на M эргодична тогда и только тогда, когда она является экстремальной точкой в конусе G-инвариантных мер.

Доказательство. Шаг 1: Пусть x, y две меры, а $a = tx + (1-t)y$ точка на интервале $]x, y[$. **Тогда $a \preccurlyeq x$ и $a \preccurlyeq y$.**

Шаг 2: По теореме Радона-Никодима, в этой ситуации существует функция f на M такая, что $a = fx$.

Шаг 3: Если a экстремальна и принадлежит интервалу $]x, y[$, соответствующая функция f постоянна в силу леммы выше. **Поэтому a пропорциональна x.** ■

Теорема Крейна-Мильмана (без доказательства)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **δ-функцией Дирака** в точке x называется мера μ_x такая, что $\mu_x(U) = 1$ для $x \in U$ и $\mu_x(U) = 0$ для $x \notin U$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Если действие G на M тривиально, **мера эргодична если и только если это дельта-функция.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Других экстремальных точек в конусе всех мер нет **(проверьте это)**. ■

ТЕОРЕМА: **(Крейн-Мильман)**
Пусть S – замкнутое, выпуклое подмножество в топологическом векторном пространстве. **Тогда S есть замыкание выпуклой оболочки своих экстремальных точек.**

СЛЕДСТВИЕ: **Эргодические меры существуют.**

Теорема Шоке

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Вероятностная мера** есть такая мера μ на M, что $\mu(M) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть μ – вероятностная мера на векторном пространстве X. Обозначим за $\int_X \mu \cdot \mathsf{Id}$ интеграл от тождественной векторнозначной функции на X. Это центр тяжести множества X по отношению к мере μ, или же **среднее по мере**.

ТЕОРЕМА: **(теорема Шоке)** Пусть $A \subset V$ – замкнутый выпуклый конус в полном топологическом векторном пространстве. **Тогда для каждой точки $x \in A$ существует вероятностная мера μ на множестве экстремальных точек A такая, что $x = \int_E \mu\, \mathsf{Id}$ (среднее по мере μ).**

Доказательство см. учебники.

Другими словами, **любая G-инвариантная мера разлагается в (возможно, континуальную) линейную комбинацию эргодических.**

Эргодичность и плотные орбиты

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Мера Лебега на многообразии M есть мера, которая в каждой карте покрытия M получается как $f\mu$, где f обратимая непрерывная функция, а μ стандартная мера на $\mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА: Пусть G эргодично действует на (M, μ), где M это многообразие, а μ есть мера Лебега. **Тогда почти все орбиты действия G плотны.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $U \subset M$ – открытое множество. Тогда $G \cdot U$ G-инвариантно и имеет положительную меру, значит, его дополнение Z_U имеет меру 0. По определению, **Z_U есть множество точек, чьи орбиты не пересекают U.**

Шаг 2: Выберем счетную базу U_i топологии на M, и пусть $Z := \bigcup Z_{U_i}$. **Для любого m из дополнения к Z, орбита m пересекает каждое U_i, и значит, плотна,** но Z имеет меру нуль, будучи счетным объединением множеств меры 0. ■

Слабая $*$ топология на мерах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Рассмотрим пространство $\mathfrak{A}$ всех борелевских мер на метризуемом топологическом пространстве M. Предбаза **слабой $*$ топологии** состоит из множеств $V_{U,]x,y[} := \{\mu \in \mathfrak{A} \quad | \quad \mu(U) \in]x,y[\}$, где $U \subset M$ открытое подмножество, а $]x,y[\subset \mathbb{R}$ – отрезок.

ЗАМЕЧАНИЕ: Последовательность мер μ_i сходится к мере μ тогда и только тогда, когда $\lim_i \mu_i(U) = \mu(U)$ для любого открытого множества **(докажите это)**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Последовательность мер μ_i сходится к мере μ тогда и только тогда, когда $\lim_i \int f\mu_i = \int f\mu$ для любой непрерывной, ограниченной функции f на M **(докажите это)**.

Компактность пространства мер.

ТЕОРЕМА: Пусть $\mathfrak{A}_1$ – пространство всех вероятностных мер на компакте, снабженное слабой $*$ топологией. **Тогда $\mathfrak{A}_1$ компактно.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку слабая $*$ топология эквивалентна ограничению тихоновской на пространство $\mathfrak{C}$ отображений из открытых множеств в $[0,1]$, замыкание $\mathfrak{A}_1$ компактно. Поэтому достаточно доказать, что $\mathfrak{A}_1$ замкнуто в $\mathfrak{C}$.

Шаг 2: Пусть $\mu \in \mathfrak{C}$ – предел последовательности мер μ_i. Нам осталось доказать, что это тоже мера **(докажите это)**. ■

Слабая $*$ топология на мерах и L^1-топология

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим пространство неотрицательных L^1-функций на многообразии (M,μ) с мерой Лебега. Каждой такой функции f соответствует мера $f\mu$. Построенное таким образом $\Psi: L^1(M)_+ \to \mathfrak{A}$ из пространства $L^1(M)_+$ ограниченных, неотрицательных L^1-функций в пространство $\mathfrak{A}$ мер со слабой $*$ топологией есть **гомеоморфизм $L^1(M)_+$ на его образ, состоящий из всех абсолютно непрерывных мер.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $\{f_i\}$ – последовательность функций, сходящаяся к f в L^1. Тогда $\int_M f_i\alpha\mu$ сходится к $\int_M f\alpha\mu$ для любой непрерывной функции α **(докажите это)**. Поэтому отображение Ψ непрерывно.

Наоборот, если $f_i\mu$ – последовательность мер, сходящихся к $f\mu$ в слабой $*$ топологии, то $\lim_i \int |f-f_i|\mu = 0$, значит, f_i сходятся к f в L^1. ■

Интегральные операторы и слабая $*$ топология

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, μ) – пространство с борелевской мерой, а ρ – мера на $M \times M$. **Свертка с ядром ρ** есть операция C_ρ, переводящая ограниченную, интегрируемую функцию f в $\pi_{1*}(\rho\pi_2^* f)$, где $\pi_1, \pi_2 : \ \times \to$ – проекции.

Утверждение 1: Пусть ρ_i – последовательность ядер (мер на $M \times M$), которая сходится к ядру ρ в слабой $*$ топологии. **Тогда $\lim_i C_{\rho_i}(f) = C_\rho(f)$ для любой ограниченной, интегрируемой функции f.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: **Докажите самостоятельно.** ■

Плотность множества и производная интеграла

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A – измеримое подмножество в $\mathbb{R}^n, \mu$. **Плотность** A в x есть предел $\lim\limits_{r\to 0} \nu_A^r$, где $\nu_A^r := \frac{\mu(A\cap B_r(x))}{\mu(B_r(x))}$, а $B_r(x)$ суть шары с центром в x радиуса r.

ЗАМЕЧАНИЕ: Функции ν_A^r получаются из характеристической функции χ_A сдвигами на все вектора из шара $B_r(0)$ и усреднением по шару. **На языке свертки с ядром, это можно сказать так: $\mu\nu_A^r = (\pi_2)_*(\rho_r \cdot (\pi_1)^*\chi_A)$, где π_i – проекции из $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, а $\rho_r(x,y) = \chi_{B_r(0)}(x-y)\mu_{R^{2n}}$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Производная** интеграла $\int_{B_r(x)} f$ есть функция

$$R_f(x) := \lim_{r\mapsto 0}\frac{\int_{B_r(x)} f\mu}{\mu(B_r(x))}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ: **Производная интеграла характеристической функции есть плотность: $R_{\chi_A} = \nu_A$.**

Теорема Лебега о дифференцировании

ЗАМЕЧАНИЕ: Как и ν_A^r, **функция $R_f^r(x) := \frac{\int_{B_r(x)} f\mu}{\mu(B_r(x))}$ выражается через свертку с ядром:** $\mu R_f^r(x) = (\pi_2)_*(\rho_r \cdot (\pi_1)^* f)$.

ТЕОРЕМА: (теорема Лебега о дифференцировании)
Пусть f – L^1-функция на R^n. **Тогда производная интеграла R_f определена почти всюду, и почти всюду равна f.**

Доказательство. Шаг 1: Определим **дельта-функцию диагонали Δ** формулой $\Delta(A) = \mu(A \cap \Delta)$, где $A \cap \Delta$ отождествляется с подмножеством $\mathbb{R}^n$ проекцией. Тогда $\lim\limits_{r \mapsto 0} \rho_r = \Delta$ в смысле слабой $*$ топологии **(проверьте это).**

Шаг 2: Легко видеть, что свертка с Δ это тождественный оператор.

Шаг 3: Из Утверждения 1 следует, что результат свертки f с ρ_r при стремлении r к 0 сходится к результату свертки f с Δ, то есть к f, что и требовалось доказать. ■

Эргодичность поворотов

ТЕОРЕМА: (Теорема Лебега о плотности)
Почти все точки измеримого множества A имеют плотность 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует из теоремы Лебега о дифференцировании, примененной к характеристической функции A. ■

ТЕОРЕМА: Пусть α – иррациональный поворот окружности S^1, а $G = \mathbb{Z}$ – порожденная им группа. **Тогда действие G эргодично.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть A есть G-инвариантное множество ненулевой меры, такое, что его дополнение тоже имеет ненулевую меру. Возьмем точку $x \in A$ плотности 1 и точку $y \in S^1 \backslash A$ плотности 1. Пусть I_1 и I_2 – отрезки одной и той же длины, содержащие x и y такие, что $\frac{\mu(I_1 \cap A)}{\mu(I_1)} = 1 - \varepsilon$, а $\frac{\mu(I_2 \backslash A)}{\mu(I_2)} = 1 - \varepsilon$. Поскольку поворот на угол α иррациональный, можно найти элемент $g \in G = \{n\alpha\}$ такой, что $\mu(g(I_1) \triangle I_2) < \varepsilon\mu(I_1)$. Но это противоречит тому, что $g(I_1)$ почти весь состоит из точек A, а I_2 почти весь состоит из точек $S^1 \backslash A$. ■