

Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшем  $k$  задач с двумя звездочками разрешается не сдавать  $2k$  задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

## Анализ 4: Векторные поля и дифференцирования

### 4.1. Дифференцирования кольца

**Замечание.** Все кольца в этих листочках предполагаются коммутативными и с единицей. Алгебры над полем – ассоциативные, но не обязательно коммутативные (например, матричная алгебра).

**Определение 4.1.** Пусть  $R$  – кольцо над полем  $k$ .  $k$ -линейное отображение  $D$  из  $R$  в  $R$  называется **дифференцированием**, если выполнено **соотношение Лейбница**  $D(fg) = D(f)g + gD(f)$ . Пространство дифференцирований обозначается  $\text{Der}(R)$ , или  $\text{Der}_k(R)$ .

**Задача 4.1.** Докажите, что дифференцирования зануляются на элементах  $k$ .

**Задача 4.2.** Пусть  $D_1, D_2$  – дифференцирования. Докажите, что коммутатор  $[D_1, D_2] := D_1D_2 - D_2D_1$  это тоже дифференцирование.

**Задача 4.3 (!).** Пусть  $[K : k]$  – конечное расширение поля нулевой характеристики. Найдите пространство  $\text{Der}_k(K)$

**Задача 4.4 (\*).** Верно ли это, если  $\text{char } k = p$ ?

**Задача 4.5.** Рассмотрим кольцо  $k[\varepsilon]$ , заданное соотношением  $\varepsilon^2 = 0$ . Найдите  $\text{Der}_k(k[\varepsilon])$ .

**Задача 4.6 (\*).** Найдите все кольца  $R$  над  $\mathbb{C}$ , такие, что  $R$  конечномерное векторное пространство над  $\mathbb{C}$  и  $\text{Der}_{\mathbb{C}}(R) = 0$ .

**Задача 4.7 (\*).** Пусть  $D \in \text{Der}_k(K)$  дифференцирование поля  $K$  над  $k$ ,  $\text{char } k = 0$ , а  $[K' : K]$  конечное расширение полей. Докажите, что  $D$  можно продолжить до дифференцирования  $D' \in \text{Der}_k(K')$ .

**Задача 4.8.** Пусть  $D \in \text{Der}_k(R)$  дифференцирование кольца,  $I \subset R$  – идеал. Докажите, что  $D(I^k) \subset I^{k-1}$ .

### 4.2. Модули над кольцом

**Определение 4.2.** Пусть  $R$  – кольцо над полем  $k$ . **Модуль** над  $R$  есть векторное пространство  $V$  над  $k$ , снабженное гомоморфизмом алгебр  $R \rightarrow \text{End}(V)$ , где  $\text{End}(V)$  – алгебра эндоморфизмов  $V$  (т.е. матричная алгебра).

**Задача 4.9.** Пусть  $R$  это поле. Докажите, что модули над  $R$  это то же самое, что векторные пространства над  $R$ .

**Замечание.**  $R$ -модуль есть группа, на которой определена операция "умножения на элементы из  $R$ ", причем выполнены те же самые аксиомы дистрибутивности и ассоциативности, что в определении векторного пространства.

**Замечание.** Подмодули, фактормодули, прямые суммы определяются обычным образом как для векторных пространств). Кольцо  $R$  является модулем над собой. **Свободный модуль** есть  $R \oplus R \oplus \dots$  (иногда такой модуль называется **тривиальным**). Прямая сумма  $n$  копий  $R$  обозначается  $R^n$ .

**Замечание.**  $R$ -подмодули в  $R$  это то же самое, что идеалы в  $R$ .

**Определение 4.3.** Кольцо  $R$  называется **кольцом главных идеалов**, если все ненулевые подмодули  $R$  изоморфны  $R$ .

**Задача 4.10.** Докажите, что  $R$  кольцо главных идеалов тогда и только тогда, когда у него нет делителей нуля, а все идеалы в  $R$  главные, то есть имеют вид  $Rx$ , для какого-то необратимого  $x \in R$ .

**Задача 4.11.** Являются ли следующие кольца кольцами главных идеалов?

- а.  $R = \mathbb{C}[t]$
- б. [!]  $R = \mathbb{C}[t_1, t_2]$
- в. [\*]  $R := \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 = -1)$ .

**Определение 4.4.** **Конечно-порожденный** модуль над  $R$  есть фактор-модуль  $R^n$  по какому-то подмодулю.

**Задача 4.12.** Придумайте конечно порожденный и несвободный модуль над кольцом  $\mathbb{C}[t]$ .

**Определение 4.5.** **Нетерово кольцо** есть кольцо, где все идеалы конечно порождены.

**Задача 4.13 (\*).** Пусть  $R$  – нетерово кольцо. Докажите, что любой подмодуль конечно порожденного модуля над нетеровым кольцом конечно порожден.

**Задача 4.14.** Рассмотрим кольцо  $R$ , полученное как прямой предел следующей диаграммы. В вершинах этой диаграммы, пронумерованных натуральными числами, стоят кольца  $\mathbb{C}[t]$ . Стрелки  $\phi_{k, km}$  этой диаграммы бьют из  $k$ -й вершины в  $km$ -ю, причем  $\phi_{k, km}$  определяется однозначно из формулы  $\phi_{k, km}(t) = t^m$ . Докажите, что  $R$  изоморфно кольцу формальных выражений вида  $a_1 t^{\alpha_1} + a_2 t^{\alpha_2} + \dots + a_n t^{\alpha_n}$  где  $a_i \in \mathbb{C}$ , а  $\alpha_i$  – неотрицательные рациональные числа. Выпишите формулу для произведения и суммы в этом кольце.

**Задача 4.15 (!).** Рассмотрим кольцо  $R$ , определенное в прошлой задаче. Докажите, что идеал, порожденный полиномами вида  $a_1 t^{\alpha_1} + a_2 t^{\alpha_2} + \dots + a_n t^{\alpha_n}$ , где все  $\alpha_i$  положительны, не конечно порожден.

**Задача 4.16.** Рассмотрим кольцо  $R$  ростков гладких функций в нуле, и пусть  $K$  – идеал всех функций, у которых все кратные производные в нуле зануляются. Докажите, что этот идеал не главный.

**Задача 4.17 (\*).** Докажите, что  $K$  не конечно порожден.

**Задача 4.18 (\*).** Пусть задан конечно порожденный идеал в кольце ростков гладких функций на  $\mathbb{R}$ . Всегда ли такой идеал – главный?

### 4.3. Векторные поля

**Замечание.** Пусть  $R$  – кольцо над полем  $k$ . Тогда  $\text{Der}_k(R)$  – модуль над кольцом  $R$ , структура  $R$ -модуля определяется формулой  $rD(f) = rD(f)$ .

**Задача 4.19.** Проверьте, что  $\text{Der}_k(R)$  – действительно  $R$ -модуль.

**Задача 4.20.** Пусть  $R = k[t_1, \dots, t_n]$  – кольцо полиномов. Докажите, что  $\text{Der}_k(R)$  – свободный модуль, изоморфный  $R^n$ , с образующими  $\frac{d}{dt_1}, \frac{d}{dt_2}, \dots, \frac{d}{dt_n}$

**Указание.** Постройте отображение  $\text{Der}_k(R) \rightarrow R^n$ ,

$$D \rightarrow (D(t_1), d(t_2), \dots, d(t_n))$$

и докажите, что это изоморфизм.

**Задача 4.21 (\*).** Пусть  $R = k(t_1, \dots, t_k)$  – поле рациональных функций, то есть функций вида  $\frac{P}{Q}$  где  $P$  и  $Q$  полиномы, а  $Q \neq 0$ . Докажите, что  $\text{Der}_k(R)$  – свободный модуль, изоморфный  $R^n$ .

**Определение 4.6.** Возьмем в  $\mathbb{R}^n$  координаты  $t_1, \dots, t_n$ . Определим отображение

$$\text{Der}(C^\infty \mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Pi} (C^\infty \mathbb{R}^n)^n,$$

$$D \longrightarrow (D(t_1), D(t_2), \dots, D(t_n)).$$

**Задача 4.22.** Докажите, что  $\Pi$  – наложение.

**Задача 4.23.** Докажите, что  $\Pi(D) = 0 \Leftrightarrow D(P) = 0$  для любого полинома  $P(t_1, \dots, t_n)$ .

**Задача 4.24.** Обозначим за  $\mathfrak{m}_x \subset C^\infty \mathbb{R}^n$  идеал всех функций, зануляющихся в  $x \in \mathbb{R}^n$ . Докажите, что он максимальный.

**Задача 4.25.** Пусть  $\mathbb{R}[[t_1, \dots, t_n]]$  – кольцо формальных степенных рядов. Докажите, что оно локальное.

**Задача 4.26 (!).** Рассмотрим естественное отображение

$$C^\infty \mathbb{R}^n \xrightarrow{\Psi} \mathbb{R}[[t_1, \dots, t_n]],$$

из кольца ростков гладких функций в  $\mathbb{R}[[t_1, \dots, t_n]]$ , переводящее функцию в ее ряд Тэйлора в нуле. Обозначим за  $\tilde{\mathfrak{m}}$  максимальный идеал в  $\mathbb{R}[[t_1, \dots, t_n]]$ . Докажите, что  $\Psi^{-1}(\tilde{\mathfrak{m}}^n) = \mathfrak{m}_0^n$ .

**Задача 4.27.** Пусть  $f(x) = 0$  и  $f'(x) = 0$  для какой-то функции  $f \in C^\infty \mathbb{R}^n$ . Докажите, что  $f \in \mathfrak{m}_x^2$ .

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Замечание.** **Аффинная функция** на  $\mathbb{R}^n$  есть сумма линейной функции и константы. Довольно часто такие функции тоже называют линейными.

**Задача 4.28.** Пусть  $f \in C^\infty \mathbb{R}^n$ . Докажите, что для каждого  $x \in \mathbb{R}^n$  найдется аффинная функция  $l$  такая, что  $f - l \in \mathfrak{m}_x^2$

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей

**Задача 4.29.** Пусть есть дифференцирование кольца  $C^\infty \mathbb{R}^n$ , причем  $D \in \ker \Pi$ . Докажите, что для каждой функции  $f \in C^\infty \mathbb{R}^n$ , каждого  $x \in \mathbb{R}^n$ , имеет место  $D(f) \in \mathfrak{m}_x$ .

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей

**Задача 4.30 (!).** Докажите, что отображение

$$\text{Der}(C^\infty \mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Pi} (C^\infty \mathbb{R}^n)^n$$

есть изоморфизм.

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 4.31 (\*).** Найдите нетривиальный элемент  $\gamma \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(C^0 \mathbb{R})$  в пространстве дифференцируемых функций, или докажите, что оно пусто

**Задача 4.32 (\*).** Найдите нетривиальный элемент  $\gamma \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(C^1 \mathbb{R})$  в пространстве дифференцируемых функций класса  $C^1$ , или докажите, что оно пусто

### 4.4. Пучки модулей

**Определение 4.7.** Пусть  $M$  – топологическое пространство. **Пучок**  $\mathcal{F}$  на  $M$  это набор векторных пространств  $\mathcal{F}(U)$ , заданных для каждого открытого подмножества  $U \subset M$ , с **отображениями ограничения** – гомоморфизмами  $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_{U,U'}} \mathcal{F}(U')$ , заданными для каждого  $U' \subset U$ , и удовлетворяющие следующим свойствам.

- (а) Композиция ограничений – снова ограничение: если  $U_1 \subset U_2 \subset U_3$  вложенные открытые множества, а

$$\mathcal{F}(U_1) \xrightarrow{\phi_{U_1,U_2}} \mathcal{F}(U_2) \xrightarrow{\phi_{U_2,U_3}} \mathcal{F}(U_3)$$

соответствующие им отображения ограничений, то  $\phi_{U_1,U_2} \circ \phi_{U_2,U_3} = \phi_{U_1,U_3}$ .

- (б) Если  $U \subset M$  есть объединение открытых множеств  $U_i \subset U$ , а ограничение  $f \in \mathcal{F}(U)$  на все  $U_i$  равно нулю, то  $f = 0$ .

- (в) Пусть  $\{U_i\}$  – покрытие множества  $U \subset M$ , а  $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$  набор сечений, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j},$$

для любой пары элементов покрытия. Тогда существует  $f \in \mathcal{F}(U)$  такой, что ограничения  $f$  на  $U_i$  дает  $f_i$ .

Пространство  $\mathcal{F}(U)$  называется **пространство сечений пучка  $\mathcal{F}$  над  $U$** . Отображение ограничения на  $U$  часто обозначается  $f \rightarrow f|_U$

**Замечание.** Для пучка функций условия (а) и (б) выполняются автоматически.

**Задача 4.33 (!).** Докажите, что условия (б) и (в) равносильны точности такой последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \prod_{i \neq j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

для любого набора  $\{U_i\}$  открытых подмножеств таких, что  $U = \bigcup U_i$ .

**Задача 4.34.** Пусть  $f, g \in C^\infty M$  – две функции, которые равны на открытом множестве  $U \subset M$ , а  $D \in \text{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty M$  – дифференцирование. Докажите, что  $D(f)|_U = D(g)|_U$ .

**Определение 4.8.** Пусть  $U \subset V$  – открытые подмножества в  $M$ . Мы пишем  $U \Subset V$ , если замыкание  $U$  содержится в  $V$ .

**Задача 4.35.** Пусть  $U \Subset V$  – открытые подмножества в гладком многообразии  $M$  со счетной базой. Докажите, что найдется гладкая функция  $\Phi_{U,V} \in C^\infty M$ , равная 1 на  $U$  и 0 вне  $V$ .

**Задача 4.36 (!).** Пусть  $D \in \text{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty M$  – дифференцирование, а  $U \Subset V$  – открытые подмножества  $M$ . Для  $f \in C^\infty V$ , определим  $D(f)|_U$  формулой  $D(f)|_U = D(\Phi_{U,V} \cdot f)$ . Докажите, что  $D(f)|_U$  удовлетворяет правилу Лейбница, не зависит от выбора  $\Phi_{U,V}$ , и продолжается до корректно определенного дифференцирования  $D \in \text{Der}_{\mathbb{R}} C^\infty V$

**Задача 4.37 (!).** Докажите, что  $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty M)$  – пучок модулей над  $C^\infty M$ .

**Определение 4.9.** Гомоморфизм пучков  $\psi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  есть набор гомоморфизмов

$$\psi_U : \mathcal{F}_1(U) \rightarrow \mathcal{F}_2(U),$$

заданных для каждого пространства сечений, и коммутирующих с ограничениями. **Изоморфизм пучков** есть гомоморфизм  $\Psi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ , для которого существует обратный (справа и слева) гомоморфизм  $\Phi : \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_1$ .

**Задача 4.38.** Пусть  $\psi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  – гомоморфизм пучков.

- а. Докажите, что  $U \rightarrow \ker \psi_U$  это снова пучок (он называется **ядром гомоморфизма  $\psi$** ).
- б. [\*] Докажите, что  $U \rightarrow \operatorname{coker} \psi_U$  это не всегда пучок (приведите контрпример).

**Определение 4.10.** **Пространство глобальных сечений** пучка  $\mathcal{F}$  на  $M$  это  $\mathcal{F}(M)$ .

**Задача 4.39 (\*).** Постройте ненулевой пучок, у которого нулевое пространство глобальных сечений.

**Замечание.** Пусть  $A : \phi \rightarrow B$  – гомоморфизм колец, а  $V$  –  $B$ -модуль. Тогда на  $V$  есть естественная структура  $A$ -модуля,  $av := \phi(a)v$ .

**Определение 4.11.** Пусть  $\mathcal{F}$  есть пучок функций, замкнутый относительно умножения, а  $\mathcal{B}$  – пучок на топологическом пространстве  $M$ . Он называется **пучком  $\mathcal{F}$ -модулей**, если для каждого  $U$ , пространство сечений  $\mathcal{B}(U)$  надлено структурой  $\mathcal{F}(U)$ -модуля, причем для каждого  $U' \subset U$ , отображение ограничения  $\mathcal{B}(U) \xrightarrow{\phi_{U,U'}} \mathcal{B}(U')$ , задают гомоморфизм  $\mathcal{F}(U)$ -модулей (воспользуйтесь предыдущим замечанием, чтобы получить на  $\mathcal{B}(U')$  структуру  $\mathcal{F}(U)$ -модуля).

**Задача 4.40.** Пусть  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$  – пучок функций и его подпучок (оба замкнуты относительно операции умножения, то есть являются пучками колец). Докажите, что  $\mathcal{F}_1$  является пучком модулей над  $\mathcal{F}$ .

**Определение 4.12.** **Пространство ростков** пучка  $\mathcal{F}$  в точке  $x$  есть предел  $\varinjlim \mathcal{F}(U)$ , где  $U$  пробегает все окрестности  $x$ .

**Задача 4.41.** Докажите, что пространство ростков пучка модулей над  $\mathcal{F}$  в  $x$  есть модуль над кольцом ростков  $\mathcal{F}$  в  $x$ .

**Задача 4.42 (!).** Пусть  $\mathcal{B}$  есть пучок, все ростки которого равны нулю. Докажите, что  $\mathcal{B} = 0$ .

**Задача 4.43 (\*).** Постройте пучок, у которого все ростки ненулевые, а пространство глобальных сечений нулевое.

**Определение 4.13.** Пучок модулей  $\mathcal{B}$  над  $M$  называется **глобально порожденным**, если для любой точки  $x \in M$ , естественное отображение ограничения  $\mathcal{B}(M) \rightarrow \mathcal{B}_x$  на пространство ростков является наложением.

**Задача 4.44 (\*).** Докажите, что каждый пучок модулей над пучком функций  $C^\infty(M)$  глобально порожден, если  $M$  – многообразие со счетной базой.

**Определение 4.14.** **Тривиальный пучок модулей  $\mathcal{F}^n$**  над пучком функций  $\mathcal{F}$  сопоставляет каждому  $U$  пучок  $\mathcal{F}^n(U)$ .

**Задача 4.45.** Постройте нетривиальный подпучок модулей в  $\mathcal{F}^n$  для какого-нибудь кольца функций  $\mathcal{F}$ .

**Определение 4.15.** **Локально тривиальный пучок модулей** над пучком функций  $\mathcal{F}$  это такой пучок  $\mathcal{B}$ , что у каждой точки  $x \in M$  найдется окрестность  $U$  такая, что ограничение  $\mathcal{B}|_U$  тривиально.

**Задача 4.46 (!).** Докажите, что пучок  $C^\infty M$ -модулей  $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty M)$  локально тривиален, для любого многообразия  $M$ .

**Задача 4.47.** Докажите, что  $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty M)$  – тривиальный пучок для следующих многообразий

- а.  $M = \mathbb{R}$
- б.  $M = S^1$  (окружность)

в. [!]  $M = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$  (тор)

г. [\*]  $M = S^3$  (трехмерная сфера).

**Задача 4.48 (\*).** Постройте многообразие, у которого пучок  $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C^{\infty}M)$  нетривиален.

**Определение 4.16.** Векторное расслоение на окольцованном пространстве  $(M, \mathcal{F})$  есть локально тривиальный пучок  $\mathcal{F}$ -модулей.

**Определение 4.17.** Пучок  $C^{\infty}$ -модулей  $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C^{\infty}M)$  называется касательным расслоением к  $M$ .

**Задача 4.49 (!).** Пусть  $B$  – векторное расслоение на многообразии  $(M, C^{\infty}M)$ . Докажите, что пучок сечений  $B$  глобально порожден.

**Задача 4.50 (\*).** Пусть  $B_1, B_2$  – два векторных расслоения над  $M$  таких, что пространства сечений  $B_1(M)$  и  $B_2(M)$  изоморфны как  $C^{\infty}(M)$ -модули. Докажите, что  $B_1$  и  $B_2$  изоморфны.