Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Анализ 9: Оператор Лапласа

9.1. Оператор Ходжа $*$ на векторном пространстве

Определение 9.1. Пусть V – n-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, ориентированное и снабженное евклидовой метрикой (то есть симметричной билинейной положительно определенной 2-формой). Обозначим за $e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k}$ кососимметричный поливектор

$$\sum_\sigma (-1)^|\sigma| e_{\sigma(i_1)} \otimes e_{\sigma(i_2)} \otimes ... \otimes e_{\sigma(i_k)},$$

где сумма берется по всем перестановкам множества $i_1, ..., i_k$. Операция $\wedge$ задает структуру **грассмановой алгебры** на пространстве кососимметричных поливекторов.

Определение 9.2. **Формой объема** на V называется положительный элемент объема $\operatorname{Vol} \in \Lambda^n V^*$ такой, что $\operatorname{Vol}(e_1, ..., e_n) = \pm 1$ для любого ортонормированного базиса $e_1, ..., e_n$.

Задача 9.1 (!). Докажите, что Vol определен этими данными однозначно.

Задача 9.2. Пусть $\| \cdot \|^2$ – евклидова метрика на V. Докажите, что формула

$$\|v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_k\|^2 := \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 ... \|v_k\|^2$$

задает метрику g на тензорной степени $V^{\otimes k}$ (V с самим собой k раз).

Определение 9.3. Определим метрику g_Λ на $\Lambda^i V$ таким образом, чтобы при естественном вложении $\Lambda^i V \overset{\nu}{\hookrightarrow} V^{\otimes i}$ метрика g_Λ получалась из метрики g, описанной выше, по формуле $g_\Lambda(x, y) = \frac{1}{i!} g(\nu(x), \nu(y))$.

Задача 9.3. Докажите, что $\| \operatorname{Vol} \| = 1$, где метрика на $\Lambda^n V^*$ определена выше.

Задача 9.4 (*). Пусть B — ориентированное векторное расслоение, а $\Lambda^i B$ — i-я кососимметрическая степень B. Будет ли оно ориентировано?

Задача 9.5. Пусть V – евклидово пространство над $\mathbb{R}$, а $e_1, ..., e_n$ – ортонормированный базис. Докажите, что $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_k}$ есть ортонормированный базис в $\Lambda^k V$, где $i_1, ..., i_k$ пробегает все последовательности, удовлетворяющие $i_1 > i_2 > ... > i_k$.

Задача 9.6 (!). Пусть n-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, ориентированное и снабженное метрикой g. Обозначим той же буквой метрику на $\Lambda^i V$. Докажите, что существует единственный оператор $* : \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{n-k} V$ такой, что $*\alpha \wedge \beta = g(\alpha, \beta) \operatorname{Vol}$, для любой k-формы β.

Определение 9.4. Этот оператор называется $*$-оператор Ходжа (звездочка).

Задача 9.7. Докажите, что

$$*(e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge ...\wedge e_{i_k}) = (-1)^{|\sigma|} e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge ...\wedge e_{j_{n-k}},$$

где $j_1, ..., j_{n-k}$ – набор индексов, дополнительный к $i_1, ..., i_k$, а σ – перестановка

$$\begin{pmatrix} 1, & ..., & k, & k+1, & ..., & n \\ i_1, & ..., & i_k, & j_1, & ..., & j_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Задача 9.8 (!). Докажите, что на $\Lambda^k V$ имеет место $*^2 = (-1)^{k(n-k)}\operatorname{Id}$, где $n = \dim V$.

Задача 9.9 (*). Пусть метрика на V не положительно определена, а имеет сигнатуру $(q, n-q)$. Докажите, что на $\Lambda^k V$ имеет место $*^2 = (-1)^{k(n-k)}(-1)^{q(n-q)}\operatorname{Id}$.

Задача 9.10 (!). Пусть $\dim V = 2n$. Докажите, что у $*$ есть 2^{2n-1} собственных значений 1 и 2^{2n-1} собственных значений -1.

Задача 9.11. Пусть $x \in V^*$ – линейная форма, $e_x: \ \Lambda^i V^* \longrightarrow \Lambda^{i+1} V^*$ – оператор домножения на x, а $i_x: \ \Lambda^i V \longrightarrow \Lambda^{i-1} V$ – оператор подстановки двойственного вектора $x^\sharp \in V$ в i-форму. Докажите, что $e_x = -(-1)^{(k+1)n} * i_x *$.

Задача 9.12 (!). В условиях предыдущей задачи, докажите, что $e_x i_x + i_x e_x = \|x\|^2 \operatorname{Id}$.

Задача 9.13 (*). Пусть g – стандартная плоская метрика на $M = \mathbb{R}^{2n}$, а $x_1, ..., x_{2n}$ – координаты, а $dx_1, ..., dx_{2n}$ – соответствующий им ортонормированный базис в T^*M. Рассмотрим симплектическую форму $\omega := \sum_{i=1}^n dx_{i-1}\wedge dx_i$, и пусть $L(\eta) := \omega\wedge\eta$, а $\Lambda := *L*$, а $H = [L, \Lambda]$. Докажите, что H действует на $n+p$-формах умножением на p, для любого $-n \leqslant p \leqslant n$.

9.2. Оператор Лапласа на многообразии

Замечание. Отныне и до конца листка, риманово многообразие M по умолчанию предполагается ориентированным.

Замечание. Пусть M – риманово, ориентированное n-многообразие. Тогда на $\Lambda^* M$ задан оператор Ходжа $*: \ \Lambda^k M \longrightarrow \Lambda^{n-k} M$, действующий поточечно; этот оператор, очевидно, $C^\infty M$-линейный. Также на M задана форма $\operatorname{Vol} \in \Lambda^n M$, определенная как указано выше. Эта форма называется **форма риманова объема**.

Определение 9.5. Дифференциальная форма на M называется **формой с компактным носителем**, если она равна нулю вне компактного множества $K \subset M$.

Задача 9.14 (*). Пусть α – n-форма с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что $\int_{\mathbb{R}^n}\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = d\beta$, где β – $(n-1)$-форма с компактным носителем.

Задача 9.15 (!). Пусть (M, g) – ориентированное риманово многообразие. Обозначим той же буквой g билинейное, симметричное спаривание $g: \ \Lambda^k M \times \Lambda^k M \longrightarrow C^\infty M$, определенное как в задаче 9.6.

а. Докажите, что
$$\int_M *\alpha\wedge\beta = \int_M d(\alpha,\beta)\cdot\operatorname{Vol}, \tag{9.1}$$
для любой формы $\beta \in \Lambda^k M$ с компактным носителем.

б. Докажите, что условие (9.1) однозначно задает оператор $*$.

Замечание. Эту формулу часто берут за определение $*$ на многообразии.

Задача 9.16. Пусть $\alpha_1 \in \Lambda^k M, \beta \in \Lambda^{n-k-1} M$, причем η – форма с компактным носителем. Докажите, что

$$\int_M \alpha \wedge d\beta = -(-1)^k \int_M d\alpha \wedge \beta \tag{9.2}$$

Указание. Теоремой Стокса воспользуйтесь.

Замечание. Формулу (9.2) часто называют **формула интегрирования по частям**.

Задача 9.17 (*). Сформулируйте и докажите аналог этой формулы для многообразий с краем.

Задача 9.18 (!). Докажите, что для любой формы $\beta \in \Lambda^{n-k-1} M$ с компактным носителем, и любой $\alpha \in \Lambda^k M$, имеет место

$$-(-1)^{n-k} \int_M g(*^{-1} d * \alpha, \beta) \operatorname{Vol} = \int_M g(\alpha, d\beta).$$

Указание. Воспользуйтесь формулой (9.2).

Задача 9.19. Определим на пространстве дифференциальных k-форм метрику формулой

$$g(\alpha, \beta) := \int_M g(\alpha, \beta) \operatorname{Vol}.$$

Докажите, что оператор $d^* := -(-1)^{(k+1)(n-k)} {*d*} = (-1)^{n(k+1)}$ сопряжен d в смысле этой метрики.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей, примените формулу для $*^2$.

Задача 9.20 (*). Определим на $C^\infty M$ метрику по формуле $g(f, f') := \int_M f f' \operatorname{Vol}$, и пусть D – дифференциальный оператор порядка i. Докажите, что существует дифференциальный оператор D^* порядка i такой, что для любой f' с компактным носителем, имеем $g(D^* f, f') = g(f, Df')$.

Определение 9.6. Оператор Лапласа (он же “оператор Лапласа-де Рама”) на многообразии M есть дифференциальный оператор $\Delta: \Lambda^i M \longrightarrow \Lambda^i M$, который определяется формулой $\Delta\alpha := dd^*\alpha + d^* d\alpha$, где $d^* := -(-1)^{n(k+1)} * d *$. Форма α называется **гармоничной**, если $\Delta\alpha = 0$.

Задача 9.21. Докажите, что $g(\Delta\alpha, \beta) = g(d\alpha, d\beta) + g(d^*\alpha, d^*\beta)$, для любых α, $\beta \in \Lambda^i M$.

Задача 9.22 (!). Пусть α – гармоничная форма с компактным носителем.

а. [!] Докажите, что $d\alpha = d^*\alpha = 0$.

б. [!] Докажите, что $\alpha = 0$, если α точна.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.23. Докажите, что на $\mathbb{R}^n$ не может быть ненулевых гармоничных форм с компактным носителем.

Задача 9.24. Пусть g – стандартная плоская метрика на $M = \mathbb{R}^n$, $x_1, ..., x_n$ – координатные функции, а $dx_1, ..., dx_n$ – соответствующий им ортонормированный базис в T^*M. Обозначим за e_{dx_i} оператор, домножающий на dx_i, а за i_{dx_i} оператор $-(-1)^{n(k+1)} * e_{dx_i} *$.

а. Докажите, что $e^*_{dx_i} = i_{dx_i}$.

б. Обозначим за $\frac{d}{dx_i}: \Lambda^k M \longrightarrow \Lambda^k M$ оператор, дифференцирующий все коэффициенты формы в направлении векторного поля $\frac{d}{dx_i}$. Докажите, что $d^* = \sum_{i=1}^n i_{dx_i} \frac{d}{dx_i}$.

в. [!] Докажите, что $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dx_i^2}$.

Указание. Для второй части, воспользуйтесь следующей формулой для оператора де Рама:

$$d = \sum_{i=1}^n e_{dx_i} \frac{d}{dx_i}.$$

Третью часть задачи выведите из задачи 9.12.

Задача 9.25 (*). Пусть $X \in T^*M$ – ковекторное поле на римановом многообразии. Докажите, что антикоммутатор $\{d^*, e_X\}$ действует на функциях как дифференциальный оператор первого порядка.

Задача 9.26 (*). Пусть векторное поле $X \in TM$ на компактном римановом многообразии удовлетворяет $[\mathrm{Lie}_X, *] = 0$. Докажите, что для любой гармоничной формы η на M имеем $\mathrm{Lie}_X(\eta) = 0$.

9.3. Формула Грина-Рисса

Задача 9.27 (!). Пусть f – функция на римановом многообразии M, а $X \subset M$ – ориентированное подмногообразие коразмерности 1. Обозначим за $\frac{d}{d\xi} \in TM\Big|_X$ положительное нормальное векторное поле к X длины 1. Докажите, что $*df\Big|_X = \frac{df}{d\xi} \mathrm{Vol}_X$

Задача 9.28 (!). Пусть (M, g) – риманово n-многообразие с краем, а $u, v \in C^\infty M$ гладкие функции. Докажите, что

$$\int u\Delta v \,\mathrm{Vol}_M + (-1)^{n-1} \int_M g(du, dv) \,\mathrm{Vol}_M = \int_{\partial M} u \wedge *dv. \tag{9.3}$$

Указание. Применив формулу Стокса, получите

$$\int_{\partial M} u \wedge *dv = \int_M du \wedge *dv + \int_M u \wedge d * dv.$$

Задача 9.29 (!). В условиях предыдущей задачи, докажите формулу Грина-Рисса ("Green-Riesz representation formula")

$$\int_M u\Delta v \,\mathrm{Vol}_M - \int_M v\Delta u \,\mathrm{Vol}_M = \int_{\partial M} \left(u\frac{dv}{d\xi} v\frac{du}{d\xi} \right) \mathrm{Vol}_{\partial M}$$

где $\frac{d}{d\xi} \in TM\Big|_{\partial M}$ – единичное нормальное векторное поле к краю.

Указание. Вычтите из формулы (9.3) такую же формулу, полученную перестановкой u и v, и примените задачу 9.27.

Задача 9.30. Пусть $\frac{d}{d\xi}$ – радиальное векторное поле длины 1 на $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой и координатами,

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{\sum_i x_i \frac{d}{dx_i}}{\sqrt{\sum_i x_i^2}}.$$

Докажите, что любая гармоническая функция $v \in C^\infty \mathbb{R}^n$ удовлетворяет

$$\int_{\partial B_r} \frac{dv}{d\xi} \operatorname{Vol}_{\partial B_r} = 0.$$

где B_r – шар с центром в 0 и радиуса r.

Указание. Примените формулу Грина-Рисса к $u = 1$.

Задача 9.31. Обозначим за S_r сферу радиуса r с центром в 0, и пусть $\operatorname{Vol}(S_r) := \int_{S_r} \operatorname{Vol}_{S_r}$ обозначает ее риманов объем Докажите, что функция

$$f(r) := \frac{\int_{S_r} \frac{dv}{d\xi} \operatorname{Vol}_{S_r}}{\operatorname{Vol}(S_r)}$$

("среднее значение $\frac{dv}{d\xi}$ на сфере") постоянна.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.32 (!). Выведите из этого, что среднее от гармонической функции v по сфере S_r равно $v(0)$.

Задача 9.33 (*). Пусть v – гармоническая функция на римановом многообразии, B_r – шар радиуса r с центром в $x_0 \in M$, а $S_r = \partial B_r$ – его граница. Докажите, что для небольших r среднее значение v по S_r равно $v(x_0)$.

Задача 9.34 (*). Пусть v функция на $\mathbb{R}^n$ с плоской метрикой, удовлетворяющая $\Delta v \geqslant 0$ (такая функция называется **субгармонической**). Докажите, что

$$\int_{\partial B_r} \frac{dv}{d\xi} \operatorname{Vol}_{\partial B_r} \geqslant 0.$$

Выведите из этого, что среднее от v по сфере S_r удовлетворяет

$$\frac{\int_{S_r} v \operatorname{Vol}_{S_r}}{\operatorname{Vol}(S_r)} \geqslant v(0)$$

для любого $r \geqslant 0$.