АНАЛИЗ, задачи для устного экзамена

Можно свободно пользоваться всеми задачами и теоремами из листков и лекций, но надо быть готовым предъявить доказательство для каждого утверждения.

Каждому студенту выдаются задачи на $12-N$ баллов, где N – число сданных листков или разделов, не содержащих сданных целиком листков (раздел считается сданным, если все его листки сданы как минимум наполовину).

Студент, набравший не меньше $6+k-\left[\frac{4N}{3}\right]$ баллов, получает оценку $\left[\frac{k}{2}\right]+3$.

Многообразия (листки 1-2)

Определение 1.1. Напомним, что топологическое пространство X называется **паракомпактным**, если у каждого покрытия X найдется локально конечное измельчение.

Задача 1.1 (1 балл). Пусть M – гладкое многообразие, представленное как объединение $M = M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset ...$, где M_i – гладкие, компактные многообразия с краем. Докажите, что M паракомпактно.

Задача 1.2 (1 балл). Пусть M – метрическое пространство, причем все замкнутые шары в M компактны. Докажите, что M паракомпактно.

Задача 1.3 (1 балл). Постройте морфизм многообразий $\phi: \mathbb{R} \longrightarrow S^3$, образ которого плотен.

Задача 1.4 (1 балл). Постройте функцию $f: [0,1] \longrightarrow [0,1]$, которая непрерывна, но не липшицева ни на каком отрезке $[a,b] \subset [0,1]$.

Задача 1.5 (1 балл). Пусть M – риманово многообразие, а $R(M)$ – пространство ограниченных, липшицевых функций на M. Докажите, что это кольцо. Задает ли соответствие $U \longrightarrow R(U)$ пучок?

Задача 1.6 (3 балла). Пусть $N \subset M$ – гладкое, замкнутое подмногообразие компактного риманова многообразия. Докажите, что существует такая пара положительных констант $C' > C \in \mathbb{R}$, со следующим свойством. Пусть $f \in C^\infty N$ – функция, производная которой везде ограничена константой C: $|df| < C$. Тогда f можно продолжить до гладкой функции ϕ на M, производная которой везде ограничена $|d\phi| < C'$.

Задача 1.7 (3 балла). Пусть M – метрическое пространство

а. Пусть на M заданы локально конечные покрытия U_α и V_α, индексированные одним и тем же множеством индексов, причем для любого индекса α, замыкание V_α содержится в U_α. Постройте набор непрерывных функций $\phi_\alpha: \longrightarrow [0,1]$, таких, что $\phi_\alpha = 0$ вне U_α, $\phi_\alpha = 1$ на V_α, и $\sum_\alpha \phi_\alpha = 1$.

б. Докажите, что функции ϕ_α можно выбрать липшицевыми.

Ростки и дифференцирования (листки 3-4)

Задача 1.8 (1 балл). Пусть M – гладкое многообразие, а TM – тотальное пространство его касательного расслоения. Докажите, что TM ориентируемо.

Задача 1.9 (1 балл). Пусть R – кольцо ростков функций на $\mathbb{R}$. Найдите идеал $I \subset R$, который не порожден всеми неотрицательными функциями из I.

Задача 1.10 (2 балла). Пусть R – кольцо ростков функций на $\mathbb{R}^n$, а $K \subset R$ – пересечение всех степеней максимального идеала. Докажите, что K порождено неотрицательными функциями из K.

Задача 1.11 (2 балла). Докажите, что пучок C-липшицевых функций на компактном римановом многообразии мягкий.

Задача 1.12 (3 балла). Пусть F – мягкий пучок колец на многообразии M. Рассмотрим отображение, ставящее каждому открытому $U \subset M$ пространство дифференцирований $\operatorname{Der}(F_U)$ на соответствующем кольце сечений. Определите пучок, пространство сечений которого в $U \subset M$ равно $\operatorname{Der}(F_U)$, а ростки в $x \in M$ равны $\operatorname{Der}(F_x)$, где F_x – кольцо ростков F в x.

Задача 1.13 (2 балла). Пусть M и M' – гладкие многообразия, такие, что $C^\infty M$ изоморфно $C^\infty M'$ (как кольцо). Докажите, что M изоморфно M' как многообразие.

Векторные расслоения (листки 5-6)

Определение 1.2. Напомним, что $SU(n)$ есть группа унитарных эндоморфизмов n-мерного эрмитова пространства с определителем 1, $SO(n)$ – группа ортогональных энфоморфизмов n-мерного евклидова пространства с определителем 1, $Sp(n)$ – группа кватернионно-линейных ортогональных эндоморфизмов пространства $\mathbb{H}^n$. Эти три серии групп Ли называются **классическими простыми, компактными группами Ли.**

Задача 1.14 (1 балл). Постройте гладкое расслоение со слоем S^3, базой S^5, и тотальным пространством $SU(3)$.

Задача 1.15 (1 балл). Постройте гладкое расслоение со слоем $S^1 \times S^1$, базой F_2, и тотальным пространством $SU(3)$, где F – пространство флагов (проективных прямых с отмеченной точкой) в $\mathbb{C}P^2$.

Задача 1.16 (3 балла). Пусть G – простая, компактная классическая группа Ли (то есть $SO(n)$, $SU(n)$ и $Sp(n)$). Постройте гладкое расслоение над сферой с тотальным пространством G, таким образом, чтобы слой был диффеоморфен группе Ли. Найдите эту группу Ли в каждом из трех случаев.

Задача 1.17 (1 балл). Пусть B – ориентируемое векторное расслоение. Докажите, что тензорный квадрат $B \otimes B$ – тоже ориентируемое расслоение.

Задача 1.18 (3 балла). Пусть B – ориентируемое векторное расслоение. Докажите, что симметрический квадрат $\mathsf{Sym}^2 B$ – тоже ориентируемое расслоение.

Задача 1.19 (1 балл). Докажите, что нетривиальное вещественное одномерное векторное расслоение не может быть изоморфно тензорному квадрату одномерного расслоения: $B \ncong B_1 \otimes B_1$.

Задача 1.20 (3 балла). Пусть F – мягкий пучок колец на многообразии M, а B – локально-тривиальный пучок модулей над F. Рассмотрим отображение, ставящее каждому открытому $U \subset M$ пространство гомоморфизмов $\operatorname{Hom}_{F_U}(B_U, F_U)$, где F_U, B_U – соответствующие пространства сечений. Определите пучок, пространство сечений которого в $U \subset M$ равно $\operatorname{Hom}_{F_U}(B_U, F_U)$, а ростки в $x \in M$ равны $\operatorname{Hom}_{F_x}(B_x, F_x)$, где F_x – кольцо ростков F в x, а B_x – пространство ростков B.

Задача 1.21 (2 балла). Постройте нетривиальное векторное расслоение B над каким-нибудь многообразием M, такое, что прямая сумма B и тривиального расслоения тривиальна.

Задача 1.22 (2 балла). Докажите, что любой конечно-порожденный проективный модуль над кольцом $C^\infty \mathbb{R}^n$ тривиален.

Эллиптические операторы (листки 7,10)

Задача 1.23 (2 балла). Пусть W – алгебра дифференциальных операторов на кольце полиномов $\mathbb{C}[t]$. Докажите, что W **проста**, то есть не имеет нетривиальных двусторонних идеалов.

Задача 1.24 (1 балл). Докажите, что не существует нетривиального гомоморфизма из алгебры матриц в алгебру дифференциальных операторов на многообразии.

Задача 1.25 (1 балл). Пусть $S \in \mathsf{Sym}^i TM$. Докажите, что существует дифференциальный оператор D, символ которого равен S.

Задача 1.26 (1 балл). Постройте эллиптический оператор порядка 3 на каком-нибудь расслоении.

Задача 1.27 (2 балла). Докажите, что множество S эллиптических операторов порядка i на $C^\infty M$ пусто для любого нечетного i. Докажите, что для четного i оно состоит из двух компонент связности, которые выпуклы.

Дифференциал де Рама и лапласиан (листки 8-9)

Задача 1.28 (1 балл). Пусть G – группа, действующая на римановом многообразии M изометриями, а Δ – соответствующий лапласиан. Докажите, что Δ G**-инвариантен**, то есть удовлетворяет $\Delta(g^*F) = g^*\Delta(f)$.

Задача 1.29 (1 балл). Рассмотрим стандартное действие $SO(3)$ на S^2, и пусть D – $SO(3)$-инвариантный дифференциальный оператор второго порядка. Докажите, что $D(f) = af + b\Delta(f)$, где Δ есть обычный лапласиан (связанный с инвариантной метрикой), а a и b какие-то константы.

Задача 1.30 (1 балл). Пусть M – двумерное, ориентированное риманово многообразие. Определим $I: TM \longrightarrow TM$ как оператор поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, $I^2 = -1$. Рассмотрим оператор $dd^c: \mathbb{C}^\infty M \longrightarrow \Lambda^2 M$, $dd^c(f) = dId(f)$, и пусть $\operatorname{Vol}(M) \in \Lambda^2 M$ – форма объема. Докажите, что $\Delta(f) = \frac{dd^c(f)}{\operatorname{Vol}(M)}$.

Задача 1.31 (2 балла). Пусть f – гармоническая функция на $\mathbb{R}^n$, такая, что $\int_{\mathbb{R}}^n |f|^2 < \infty$. Докажите, что $f = 0$.

Задача 1.32 (2 балла). Пусть Δ – оператор Лапласа на римановом многообразии M, $f \in C^\infty \mathbb{R}^n$ – функция, а L_f – оператор умножения на f. Докажите, что $[\Delta, L_f](u) = 2\operatorname{Lie}_X(u) + u\Delta(f)$, где Lie_X – производная Ли вдоль векторного поля X, равного градиенту f.

Гильбертовы пространства (листки 11-12)

Задача 1.33 (1 балл). Пусть M – компактное метрическое пространство. Докажите, что ограниченные, липшицевы функции плотны в пространстве непрерывных функций на M с C^0-топологией.

Задача 1.34 (1 балл). Пусть F – ряд Фурье от одной переменной, который сходится в метрике Соболева L^2_n. Докажите, что F сходится к n-кратно дифференцируемой функции.

Задача 1.35 (1 балл). Постройте ненулевой компактный оператор с нулевым спектром.

Задача 1.36 (2 балла). Пусть S – единичная сфера в гильбертовом пространстве. Докажите, что S стягиваема.

Задача 1.37 (1 балл). Пусть Δ – оператор Лапласа на окружности снабженной плоской метрикой. Докажите, что $(\Delta + 1)^{-1}$ непрерывен в L^2-метрике и компактен.

АНАЛИЗ, задачи для письменного экзамена

Можно свободно пользоваться всеми теоремами из лекций, но надо дать ссылку. Решая задачи, можно (и нужно) пользоваться любыми учебниками, монографиями и статьями, приводя в записках доказательства по мере необходимости. Решение принести записанным максимально полно и аккуратно. Помнить подробности всех доказательств, быть в состоянии разъяснить, где потребуется. Оценка вычисляется по той же формуле, что и для устного экзамена.

Многообразия (листки 1-2)

Задача 2.1 (3 балла). Пусть M – метрическое пространство. Докажите, что M паракомпактно.

Задача 2.2 (1 балл). Пусть M – метрическое пространство. Постройте изометрическое вложение из M в банахово пространство.

Задача 2.3 (2 балла). Пусть $f: \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ кватернионнозначная функция, которая кватернионно дифференцируема (в смысле, приближается кватернионно-линейным функционалом в каждой точке). Докажите, что f линейная.

Задача 2.4 (3 балла). Пусть $f: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ – непрерывное отображение, а $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^2$ – его график. Найдите, чему может быть равна размерность Хаусдорфа пространства Γ_f.

Задача 2.5 (2 балла). Пусть $N \subset M$ – гладкое, замкнутое подмногообразие гладкого риманова многообразия (не обязательно компактного). Пусть $f \in C^\infty N$ функция, производная которой везде ограничена C: $|df| < C$. Всегда ли f можно продолжить до гладкой, липшицевой функции на M?

Задача 2.6 (1 балл). Пусть M – компактное топологическое многообразие с метрикой. Докажите, что M допускает липшицево, замкнутое вложение в $\mathbb{R}^n$.

Ростки и дифференцирования (листки 3-4)

Задача 2.7 (1 балл). Пусть R – кольцо ростков функций на $\mathbb{R}$, а $I \subset R$ – непустой конечно-порожденный идеал. Докажите, что $\bigcap_n I^n \neq 0$.

Задача 2.8 (3 балла). Пусть M – некомпактное многообразие, а $\mathfrak{m} \subset C^\infty M$ – максимальный идеал, который не является идеалом точки. Может ли $\mathfrak{m}$ быть конечно порожден?

Задача 2.9 (2 балла). В условиях предыдущей задачи, может ли фактор $C^\infty M/\mathfrak{m}$ быть алгебраически замкнут?

Векторные расслоения (листки 5-6)

Задача 2.10 (1 балл). Пусть M – компактное многообразие. Постройте нетривиальное векторное расслоение над M.

Задача 2.11 (2 балла). Пусть M – двумерное, некомпактное многообразие, а B – векторное расслоение над M. Докажите, что $B \oplus B$ тривиально.

Задача 2.12 (3 балла). Докажите, что любой конечно-порожденный проективный модуль над кольцом $\mathbb{C}[t_1, t_2]$ тривиален.

Задача 2.13 (1 балл). Пусть M многообразие, которое стягиваемо (гомотопически эквивалентно точке). Докажите, что любое векторное расслоение над M тривиально.

Задача 2.14 (1 балл). Найдите двумерное векторное расслоение, которое не допускает метрики сигнатуры (1,1). Можно ли найти такое расслоение на S^3?

Эллиптические операторы (листки 7,10)

Задача 2.15 (1 балл). Рассмотрим стандартное действие $SO(n+1)$ на S^n, и пусть D – $SO(n+1)$-инвариантный дифференциальный оператор второго порядка. Докажите, что $D(f) = af + b\Delta(f)$, где Δ есть обычный лапласиан (связанный с инвариантной метрикой), а a и b какие-то константы.

Задача 2.16 (3 балла). Пусть M – гладкое n-мерное многообразие, B – тривиальное k-мерное расслоение. Найдите все пары (n, k), для которых на B существует эллиптический оператор порядка i.

Задача 2.17 (2 балла). Пусть $D: C^\infty T \longrightarrow C^\infty T$ – эллиптический оператор порядка k на торе T. Докажите, что $D: L^2_n(T) \longrightarrow L^2_{n-k}(T)$ фредгольмов, где L^2_n – соответствующая соболевская метрика.

Задача 2.18 (3 балла). Пусть $D: C^\infty T \longrightarrow C^\infty T$ – эллиптический оператор на торе, с вещественно-аналитическими коэффициентами а f – его собственная функция. Докажите, что f вещественно-аналитическая.

Дифференциал де Рама и лапласиан (листки 8-9)

Задача 2.19 (1 балл). Пусть f – гладкая функция на компактном римановом многообразии, такая, что $\Delta(f) = \lambda f$, где $\lambda \in C^\infty M$ везде < 0. Докажите, что $f = 0$.

Задача 2.20 (2 балла). Пусть D – эллиптический оператор на компактном римановом многообразии, который имеет вид $D(f) = \Delta(f) + T(f) + \lambda f$, где T – дифференцирование, а $\lambda \in C^\infty M$ везде > 0. Предположим, что u – функция такая, что $D(u) \leqslant 0$. Докажите, что $u \leqslant 0$.

Задача 2.21 (1 балл). Пусть $f \in C^\infty(S^{n-1})$ – собственный вектор оператора Лапласа на сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ (с обычной метрикой). Докажите, что f можно задать полиномом от координат на $\mathbb{R}^n$.

Задача 2.22 (2 балла). Пусть G – компактная группа Ли, снабженная инвариантной метрикой, V ее точное представление, $G \hookrightarrow \operatorname{End}(V)$ естественное вложение, а f – собственная функция оператора Лапласа. Докажите, что f можно задать полиномом от плоских координатных функций на $\operatorname{End}(V)$.

Гильбертовы пространства (листки 11-12)

Задача 2.23 (2 балла). Пусть $V = C([0,1])$ – пространство непрерывных функций на отрезке, с sup-метрикой, а $K \subset V$ – множество дифференцируемых функций $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ с $|f'| < 1$. Докажите, что замыкание K – множество 1-липшицевых отображений $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Задача 2.24 (1 балл). Пусть E – непрерывный оператор на банаховом пространстве. Запишите $\cos E$, $\sin E$ рядами, и докажите, что эти ряды сходятся. Всегда ли $(\cos E)^2 + (\sin E)^2$ равен единице?

Задача 2.25 (1 балл). Компактный, самосопряженный оператор называется **ядерным**, если ряд, составленный из его собственных значений, абсолютно сходится. Пусть Δ – оператор Лапласа на торе $(S^1)^n$, а $G := (1+\Delta)^{-1}$. Докажите, что G^t ядерный, если $t \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Задача 2.26 (2 балла). Напомним, что **алгеброй Калкина** гильбертова пространства называется фактор-алгебра кольца непрерывных эндоморфизмов по идеалу, состоящему из компактных операторов. Докажите, что алгебра Калкина проста (не содержит нетривиальных двусторонних идеалов).

Задача 2.27 (2 балла). Докажите, что множество фредгольмовых операторов открыто в норменной топологии. Докажите, что у этого множества есть счетное и бесконечное число компонент связности.

Задача 2.28 (2 балла). Рассмотрим группу $\operatorname{Aut}(H)$ автоморфизмов гильбертова пространства, с топологией, индуцированной нормой оператора. Докажите, что она стягиваема.