

1. Комплексные поверхности, лекция 1: Классификация Кодaira-Энриквеса

Под “комплексной поверхностью” будем понимать компактное, гладкое комплексное многообразие комплексной размерности 2. **Минимальная поверхность** - поверхность, не содержащая дивизоров с самопересечением -1 (такие дивизоры можно сдуть, получив гладкую поверхность с меньшим вторым числом Бетти).

Утверждения о классификации Кодaira (Теорема 1.7 и Утверждение 1.23) доказаны не будут, остальной материал лекции вполне может быть доказан самостоятельно.

1.1. Классификация Кодaira

Определение 1.1. Пусть M - комплексное многообразие, K его канонический класс. Рассмотрим полином $P(N) = H^0(K^N)$. Степень этого полинома $\kappa(M)$ называется **размерностью Кодaira** M . Если P тождественно нулевой, размерность Кодaira считается равной $-\infty$.

Классификация алгебраических поверхностей была известна уже Энриквесу. Кодaira распространил ее на комплексные поверхности.

Теорема 1.2: (Кодaira) Комплексная поверхность M проективна, если выполнено любое из следующих равносильных утверждений.

- (i) M алгебраична
- (ii) Поле мероморфных функций на M имеет степень трансцендентности 2.
- (iii) На M существует голоморфное линейное расслоение L с $c_1(L)^2 > 0$.

Упражнение 1.3: Докажите это.

Замечание 1.4. Из этой теоремы немедленно следует, что форма пересечения на решетке Нерона-Севери неположительно определена. В частности, для любых $a, b \in NS(M)$ с $a^2 = 0$, имеем $ab = 0$. Действительно, если $ab > 0$, выражение $(na + b)^2$ будет положительно для очень большого n .

Определение 1.5. Поверхность класса VII (Kodaira class VII surface) это поверхность с $\kappa(M) = -\infty$ и первым числом Бетти $b_1(M) = 1$. Поверхность Кодaira (первичная) – локально тривиальное голоморфное расслоение со слоем эллиптическая кривая над эллиптической кривой, с $b_1(M) = 3$. Вторичная поверхность Кодaira – фактор первичной поверхности Кодaira по конечной группе, свободно действующей на ней, с $b_1(M) = 1$.

Замечание 1.6. У Кодaira определение ”класса VII” было другое, но вышеприведенное определение с тех пор стало стандартным.

Теорема 1.7: Пусть M – минимальная комплексная поверхность, которая не алгебраична. Тогда M принадлежит к одному из следующих классов.

$\kappa(M) = 1$ M это минимальная, собственно эллиптическая поверхность, причем все слои соответствующего эллиптического слоения изоморфны (могут встречаться кратные).

$\kappa(M) = 0$ M это КЗ поверхность, тор или поверхность Кодaira, первичная ($b_1(M) = 3$) или вторичная ($b_1(M) = 1$).

$\kappa(M) = -\infty$ M – минимальная поверхность класса VII.

Замечание 1.8. Если $\kappa(M) = 1$, это значит, что M допускает бесконечно много кривых в одном и том же классе когомологий $[C]$. В этом случае, самопересечение C равно нулю, и пересечение C с любой другой кривой тоже равно нулю. Из этого следует, что M голоморфно расслаивается над кривой. Канонический класс общего слоя C этого слоения можно вычислить по формуле присоединения: $K_C = K_M|_C$. Поскольку $C^2 = 0$ в решетке Нерона-Севери, $L \cdot C = 0$ для любого $L \in NS(M)$. Поэтому $K_C = \mathcal{O}$, и M – эллиптическое слоение. Из этого же аргумента следует, что эллиптическое слоение на M единственно.

1.2. Нильмногообразия и сольвмногообразия

Пусть G – связная вещественная группа Ли, \mathfrak{g} ее алгебра Ли. Левоинвариантные почти комплексные структуры на G взаимно-однозначно соответствуют линейным эндоморфизмам $I : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $I^2 = -\text{Id}$. Каждый такой эндоморфизм задает разложение комплексификации $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ в сумму собственных подпространств: $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1}$.

Отметим, что каждое подпространство $\mathfrak{g}^{1,0} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ половинной размерности получается таким образом, если $\mathfrak{g}^{1,0} \cap \mathfrak{g} = 0$ (в этом случае подпространство $\mathfrak{g}^{1,0} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ называется **тотально мнимым**). Если такое пространство задано, $I \in \text{End}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ можно определить, положив его равным $\sqrt{-1}$ на $\mathfrak{g}^{1,0}$, и $-\sqrt{-1}$ на комплексно сопряженном подпространстве $\mathfrak{g}^{0,1} = \overline{\mathfrak{g}^{1,0}}$. Такой оператор, легко видеть, вещественный (то есть задан на \mathfrak{g}), и удовлетворяет $I^2 = -\text{Id}$.

Утверждение 1.9: Левоинвариантная почти комплексная структура на \mathfrak{g} интегрируема тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}^{1,0} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ – подалгебра Ли в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Упражнение 1.10: Докажите это.

Определение 1.11. В этом случае, I называется **левоинвариантной комплексной структурой**.

Определение 1.12. Пусть G – связная группа Ли (нильпотентная или разрешимая) снабженная левоинвариантной комплексной структурой, а $\Gamma \subset G$ – кокомпактная, дискретная подгруппа. Факторпространство G/Γ (справа) наделено естественной комплексной структурой, поскольку левое и правое действие коммутируют. Оно называется **комплексным нильмногообразием** (для нильпотентной группы Ли) и **сольвмноогообразием** (для разрешимой).

Классификация комплексных двумерных ниль- и сольвмноогообразий получена К. Хасегавой ([H]).

Хасегава доказал, что двумерные сольвмноогообразия исчерпываются следующими классами. В дополнение к нильмногообразиям (тору и первичной поверхности Кодаиры), сольвмноогообразиями являются поверхности Инуэ, вторичные поверхности Кодаиры, и биэллиптические поверхности.

Поверхность Кодаиры строится довольно просто.

Пусть G – произведение верхнетреугольных матриц 2×2 на \mathbb{R} . В G нетрудно построить комплексную структуру: для этого нужно в комплексификации $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ соответствующей алгебры Ли найти абелеву, тотально мнимую двумерную подалгебру. В качестве решетки выберем целые матрицы, это и будет поверхность Кодаиры (первичная).

1.3. Локально конформно кэлеровы многообразия

Определение 1.13. Многообразие M называется **локально конформно кэлеровым** (ЛСК), если у M есть кэлерово накрытие \tilde{M} такое, что монодромия накрытия действует на \tilde{M} гомотетиями.

Определение 1.14. **Голоморфным сжатием** называется голоморфное отображение

$$\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}^2,$$

сохраняющее 0 , и удовлетворяющее следующему условию. Для каждого компактного подмножества $K \subset \mathbb{C}^2$, и каждого открытого подмножества $U \subset \mathbb{C}^2$, содержащего 0 , композиция ϕ с собой (много раз) переводит K в подмножество U . Другими словами, отображение является голоморфным сжатием, если последовательность $\{\phi, \phi \circ \phi, \phi \circ \phi \circ \phi, \dots\}$ сходится к тождественному отображению $\mathbb{C}^2 \rightarrow 0$ равномерно на компактах.

Если голоморфное сжатие является автоморфизмом, можно породить им подгруппу Γ в автоморфизмах \mathbb{C}^2 , изоморфную \mathbb{Z} . Легко видеть, что у каждой орбиты будет только одна предельная точка - 0 . Поэтому голоморфное сжатие действует на $\mathbb{C}^2 \setminus 0$ собственно, и факторпространство $\mathbb{C}^2 \setminus 0 / \Gamma$ хорошо определено. Такой фактор называется **поверхность Хопфа**.

Упражнение 1.15: Докажите, что поверхность Хопфа диффеоморфна $S^3 \times S^1$.

Пример 1.16: Рассмотрим голоморфное сжатие $x \xrightarrow{\phi} qx$, где q - комплексное число, $|q| < 1$. Соответствующая поверхность Хопфа H раслаивается над $\mathbb{C}P^1$ со слоем эллиптическая кривая. Из этого видно, что это поверхность класса VII (для доказательства, постройте сечения антиканонического класса). Также ясно, что ϕ растягивает естественную (плоскую) метрику на $\mathbb{C}^2 \setminus 0$ в $|q|^2$ раз, а значит, H - локально конформно кэлерово.

Определение 1.17. Пусть (S, g) - риманово многообразие. **Риманов конус** S это произведение $S \times \mathbb{R}^{>0}$, снабженное метрикой $t^2 g + dt^2$, где t - координатная функция на $\mathbb{R}^{>0}$. **Сасакиева структура** на многообразии S это комплексная структура на конусе S такая, что коническая

метрика $t^2g + dt^2$ является кэлеровой, а отображение $(s, t) \rightarrow (s, qt)$ голоморфно для любого $q \in \mathbb{R}^{>0}$.

Пример 1.18: Конус для $2n - 1$ -мерной сферы это $R^{2n} \setminus \{0\}$, с плоской метрикой. Отождествляя R^{2n} с \mathbb{C}^n , мы получаем комплексную структуру на конусе S^{2n-1} . Легко видеть, что таким образом на сфере задается сасакиева структура (докажите это).

Пусть $\psi : S \rightarrow S$ - сасакиев автоморфизм, а $q > 1$ - вещественное число. Легко видеть, что $(s, t) \rightarrow (\psi(s), qt)$ - голоморфная гомотетия конуса S . Как и для поверхности Хопфа, можно определить фактор конуса по группе, порожденной этой гомотетией, и этот фактор будет локально конформно кэлеровым многообразием.

Определение 1.19. Компактное ЛСК-многообразие M , полученное такой конструкцией, называется **Вайсмановым**.

Замечание 1.20. Есть довольно много определений вайсманова многообразия, но в компактном случае они все равносильны вышеприведенному. Сасакиево многообразие S и автоморфизм ψ восстанавливаются однозначно по комплексной и конформной структуре на M .

Замечание 1.21. Рассмотрим векторное поле $\frac{d}{dt}$ на кэлеровом конусе

$$C(S) = S \times \mathbb{R}^{>0}.$$

Поскольку $\frac{d}{dt}$ действует на $C(S)$ голоморфными гомотетиями, производная Ли кэлеровой формы ω вдоль $\frac{d}{dt}$ равна ω . По формуле Картана, это дает

$$\omega = \text{Lie}_{\frac{d}{dt}} \omega = d \left(\omega \lrcorner \frac{d}{dt} \right) - (d\omega) \lrcorner \frac{d}{dt} = d \left(\omega \lrcorner \frac{d}{dt} \right) = d(I(dt)).$$

Мы получаем, что $\omega = dd^c \phi$, где ϕ действует как $(s, t) \xrightarrow{\phi} t$, а $d^c := -IdI$. Функция ϕ , удовлетворяющая условию $\omega = dd^c \phi$, называется **кэлеровым потенциалом**. Мы получили, что на конусе сасакиева многообразия функция $(s, t) \xrightarrow{\phi} t$ задает кэлеров потенциал.

Замечание 1.22. Вайсмановы многообразия - никогда не кэлеровы. Можно убедиться в этом, например, так. Рассмотрим кэлеров потенци-

ал на конусе сасакиева многообразия: $(s, t) \xrightarrow{\phi} t$. Формула для производной логарифма дает

$$dd^c \log \phi = \frac{\omega}{\phi} - \frac{d\phi \wedge I(d\phi)}{\phi^2}.$$

Нетрудно убедиться, что форма $\omega_0 := dd^c \log \phi$ имеет те же собственные значения, что $\frac{\omega}{\phi}$, на пространстве ортогональном $\Sigma = \langle \frac{d}{dt}, I(\frac{d}{dt}) \rangle$, и равна нулю на Σ .

Поскольку стандартная гомотетия конуса умножает ϕ на число, $\log \phi$ меняется на константу, а $d \log \phi$ вообще не меняется. Значит, форма $dd^c \log \phi$ определена на вайсмановом факторе конуса (докажите это). Эта $(1, 1)$ -форма точна, и имеет неотрицательные собственные значения. Докажите, что на кэлеровом многообразии таких $(1, 1)$ -форм не бывает.

Следующая теорема принадлежит Ф. Белгуну ([Be1]). Она выводится из классификации Кодаиры.

Утверждение 1.23: Многообразиями Вайсмана являются все неалгебраические поверхности M с $\kappa(M) = 1$, а также первичные и вторичные поверхности Кодаиры.

Замечание 1.24. Вайсманово многообразие получается из сасакиева вышеописанной процедурой. Классификация трехмерных сасакиевых многообразий хорошо известна, благодаря Ф. Белгуну и Р. Гейгесу ([Be2]). Любое сасакиево 3-многообразие, не диффеоморфное сфере, получается как пространство единичных векторов в отрицательных линейных расслоениях на орбикривой рода $g > 0$. Это позволяет явно выписать, классифицировать и посчитать топологические инварианты всех неалгебраических поверхностей, кроме поверхностей класса VII.

Определение 1.25. Напомню, что орбикривая – это комплексное орбиобразии размерности 1. Орбиобразии (в 1950-е их называли **V-пространствами**, а сейчас – **стеками Делиня-Мамфорда**) это естественное обобщение понятия гладкого многообразия. Гладкое комплексное многообразие – многообразие, локально изоморфное шару в \mathbb{C}^n , причем функции переклейки уважают голоморфную структуру на пересечении шаров. Орбиобразии – многообразии, локально изоморфное шару

в \mathbb{C}^n/G , где G - конечная группа, причем функции переклейки уважают голоморфную структуру и действие конечной группы. Орбиобразия, таким образом, задается атласом; измельчение атласов определяется таким же образом, как и для многообразий. Орбиобразия изоморфны, если у их атласов есть одинаковое измельчение

Замечание 1.26. Надо отметить, что структура орбиобразия содержит в себе дополнительные данные по отношению к структуре комплексного многообразия. Скажем, фактор $\mathbb{C}P^1$ по конечной группе G , как комплексное многообразие, всегда изоморфен $\mathbb{C}P^1$ (проверьте это), но соответствующее орбиобразия всегда помнит действие группы G .

Замечание 1.27. Кэлеровы формы, комплекс де Рама, векторные расслоения, классы Черна, в общем почти всю алгебраическую геометрию и топологию можно строить на орбиобразиях, в большинстве ситуаций определения переносятся дословно. При попытке посчитать какие-нибудь инварианты могут случаться парадоксы, например, эйлерова характеристика орбиобразия часто оказывается дробной.

Упражнение 1.28: Пусть G - компактная, связная группа Ли, действующая на многообразии M , причем все орбиты G одинаковой размерности. Докажите, что факторпространство M/G - орбиобразия.

Замечание 1.29. Поскольку на одномерном диске D может действовать автоморфизмами только циклическая группа \mathbb{Z}_n , орбикривые покрывают карты вида D/\mathbb{Z}_n . В любой точке такой карты, кроме нуля, орбикривая гладкая (изоморфна диску без действия группы). В особых точках (они изолированы, и их называют орбиточками) орбикривая изоморфна D/\mathbb{Z}_n . Циклическая \mathbb{Z}_n называется **стабилизатором орбиточки**, а n ее **порядком**. Морфизм орбикривых есть голоморфное отображение соответствующих комплексных кривых, переводящее орбиточки в орбиточки, и коммутирующее с действием стабилизаторов.

Замечание 1.30. Хорошим примером орбикривой является модулярная кривая (классифицирующее пространство эллиптических кривых): это $\mathbb{C}P^1$ с тремя орбиточками порядка 2, 2 и 3, а ее фундаментальная группа бесконечна, и изоморфна $SL(2, \mathbb{Z})$.

Задачи.

Задача 1.1. Пусть $M \rightarrow X$ – голоморфное, локально тривиальное расслоение на поверхности M со слоем CP^1 . Найдите размерность Кодаиры $\kappa(M)$.

Задача 1.2. Пусть $M = X_1 \times X_2$ – произведение двух кривых, а L – линейное расслоение, которое обильно при ограничении на $X_1 \times \{x\}$ и $\{y\} \times X_2$. Всегда ли L обильно?

Задача 1.3. Постройте левоинвариантную симплектическую форму на (главной) поверхности Кодаиры.

Задача 1.4. Найдите числа Бетти поверхности Кодаиры.

Задача 1.5. Постройте ненулевую левоинвариантную $(1, 1)$ -форму ω_0 на поверхности Кодаиры M , такую, что $\omega_0(x, Ix) \geq 0$ для любого касательного вектора $x \in TM$

Задача 1.6 (*). Найдите группу голоморфных автоморфизмов поверхности Кодаиры.

Задача 1.7. Пусть S – сасакиево многообразие, а $C(S) = S \times \mathbb{R}^{>0}$ – его риманов конус. Рассмотрим векторное поле $\frac{d}{dt}$, действующее на $C(S)$ голоморфными гомотетиями. Докажите, что поле $I\left(\frac{d}{dt}\right)$ действует на $C(S)$ голоморфными изометриями, и поднимается с поля r на S , причем r действует на S инфинитезимальными автоморфизмами сасакиевой структуры.

Замечание 1.8. Это векторное поле называется **полем Рибба** (Reeb field) сасакиева многообразия. Если его орбиты компактны, сасакиево многообразие называется **квазирегулярным**

Задача 1.9. Пусть M – квазирегулярное сасакиево многообразие. Докажите, что пространство орбит поля Рибба – кэлерово орбиобразие.

Задача 1.10. Докажите, что каждое квазирегулярное сасакиево многообразие получается как тотальное пространство единичных векторов в линейном расслоении на кэлеровом орбиобразии.

Задача 1.11. Пусть X – кривая рода $g > 0$, со структурой орбиобразия. Докажите, что у X есть конечное накрытие в категории орбиобразий $\tilde{X} \rightarrow X$, причем \tilde{X} – гладкая кривая (без орбиточек).

Литература:

- [BPV] Barth W., Peters C., Van de Ven A. *Compact complex surfaces*, 1984 (библиотека "Колхоз").
- [Be1] F. A. Belgun, *On the metric structure of non-Kähler complex surfaces*, Math. Ann. **317** (2000), 1–40.
- [Be2] F.A. Belgun, *Normal CR structures on compact 3-manifolds*, Math. Z. **238** (2001), 441–460.
- [H] Keizo Hasegawa *Complex and Kahler structures on Compact Solvmanifolds*, J. Symplectic Geom. Volume 3, Number 4 (2005), 749-767, arXiv:0804.4223.
- [T] Matei Toma, *Holomorphic vector bundles on non-algebraic surfaces*, <http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/staff/phpages/tomam/dissertation.html> (Ph. D. thesis, Bayreuth, 1992)