5. Комплексные поверхности, лекция 5: Выпуклые конусы и пространства Монтеля.

Все топологические векторные в этой лекции пространства предполагаются по умолчанию хаусдорфовыми. Базовым полем везде предполагается $\mathbb{R}$.

Подробное изложение теории локально выпуклых пространств, пространств Монтеля, рефлексивности и двойственности есть в книге Бурбаки "Топологические векторные пространства". Изложение этого материала в применении к потокам и тест-формам - Andreotti, Aldo; Kas, Arnold, *Duality on complex spaces*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze Sér. 3, 27 no. 2 (1973), p. 187-263.

Если $A \subset V$ подмножество векторного пространства, $\lambda \in \mathbb{R}$ число, λA - множество векторов вида λa, где $a \in A$.

5.1. Ограниченные подмножества

Определение 5.1. Пусть $V \xrightarrow{\phi} W$ - линейное отображение векторных пространств, а ν - норма на W. Функция $\phi \circ \nu: \ V \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ удовлетворяет всем аксиомам нормы, кроме строгой положительности (она может принимать значение 0). Такая функция называется **полунормой**. Множество

$$B_{\nu,\varepsilon}(a) := \{x \in V | \nu(x-a) < \varepsilon\}$$

называется ε-шаром с центром в a, заданным полунормой ν. Легко видеть, что оно выпукло.

Определение 5.2. Пусть $\{\nu_\alpha\}$ – набор полунорм на векторном пространстве V. Определим структуру топологического векторного пространства на V, где базой окрестностей нуля будут конечные пересечения вида

$$\bigcap_i B_{\nu_i,\varepsilon}(0).$$

Такая топология называется **заданной набором полунорм**.

Упражнение 5.3: Докажите, что топология, заданная набором полунорм, есть самая грубая топология, в которой эти полунормы непрерывны.

Упражнение 5.4: Докажите, что топология на локально выпуклом топологическом пространстве всегда может быть задана набором полунорм.

Определение 5.5. Пусть $K \subset V$ - подмножество топологического векторного пространства. Мы говорим, что K **ограниченно**, если для каждой окрестности $U \ni 0$ найдется $\lambda > 0$ такая, что $\lambda K \subset U$

Упражнение 5.6: Пусть V векторное пространство с нормой. Докажите, что подмножество $K \subset V$ ограниченно тогда и только тогда, когда норма (как функция на V) ограниченна на $K \subset V$

Упражнение 5.7: Пусть V - локально выпуклое топологическое векторное пространство, с топологией, заданной набором полунорм $\{\nu_\alpha\}$, а $A \subset V$ - любое подмножество. Докажите, что A ограниченно тогда и только тогда, когда все ν_α ограниченны на A.

Замечание 5.8. Ограниченность множеств в топологических векторных пространствах часто называют "ограниченность по фон Нойману". Ее определили фон Нойман и Колмогоров в 1935.

5.2. Бочечные пространства и теорема Банаха-Штейнгауза

Определение 5.9. Подмножество $A \subset V$ топологического векторного пространства называется **абсорбирующим**, если $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda A = V$. Подмножество $A \subset V$ называется **бочкой** (barrel), если оно абсорбирующее, центрально-симметричное и замкнутое.

Пример 5.10: Открытое, выпуклое множество U, содержащее 0, является абсорбирующим. В самом деле, если $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda U$ не содержит $x \in V$, то сходящаяся к нулю последовательность $\{\frac{1}{2^n} x\}$ не пересекается с U. Это невозможно, поскольку U открыто. Поэтому замыкание A любого открытого, центрально-симметричного выпуклого множества это бочка.

Определение 5.11. Бочечное пространство (barreled space) - это локально выпуклое пространство V, такое, что любая бочка $A \subset V$ содержит открытую окрестность нуля.

Определение 5.12. Пространство Бэра - это такое топологическое пространство, которое нельзя разбить в счетное объединение нигде не плотных подмножеств.

Замечание 5.13. Если V – локально выпуклое топологическое векторное пространство, которое является пространством Бэра, то V – бочечное. Действительно, пусть $A \subset V$ – бочка. Тогда $V = \bigcup_{\lambda=2^n} \lambda A$, значит, V содержит внутреннюю точку x. Пусть $U \ni x$ соответствующая окрестность. Выпуклая оболочка множества $U \cup -U$ открыта и содержит 0 (докажите это).

Замечание 5.14. Пространства Фреше (и, следовательно, Банаха) являются бочечными. Действительно, каждое полное, непустое метрическое пространство является пространством Бэра (теорема Бэра о категории; докажите ее).

Замечание 5.15. Существует нормированные векторные пространства, которые не являются бочечными.

Упражнение 5.16: Докажите, что счетное объединение бочечных пространств - бочечное. Докажите, что факторпространство бочечного пространства - бочечное.

Определение 5.17. Пусть V - топологическое векторное пространство, а V^* - пространство непрерывных функционалов на V. **Слабой топологией** на пространстве V^* называется самая грубая топология, в которой непрерывны отображения $\langle \cdot, x\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$, для каждого $x \in V$. **Сильной топологией** на V^* называется топология униформной сходимости на ограниченных подмножествах.

Упражнение 5.18: Пусть V - норменное топологическое векторное пространство. На V^* определена обычная норма

$$\|\alpha\| = \sup_{v \in B_1(0)} |\alpha(v)|$$

(супремум $|\alpha|$ на единичном шаре). Докажите, что соответствующая топология на V^* совпадает с сильной топологией, определенной выше.

Замечание 5.19. В банаховом пространстве V справедлива теорема Банаха-Штейнгауза: если некоторый набор функционалов $T \subset V^*$ удовлетворяет неравенству $\sup_{\lambda \in T} |\lambda(x)| < \infty$ для любой точки $x \in V$,[1] то набор T ограничен на единичном шаре: $\sup_{\lambda \in T} \|\lambda\| < \infty$. Действительно, пусть $A_t \subset V$ - множество всех $x \in V$ таких, что $\sup_{\lambda \in T} |\lambda(x)| \leqslant t$. Легко

[1] Другими словами, набор T ограничен в каждой точке $x \in V$.

видеть, что A_t - бочка (проверьте), и в силу того, что V бочечное, A_t содержит какую-то окрестность нуля. Значит, $\sup_{\lambda\in T}|\lambda(x)|$ ограниченно на каком-то шаре.

Бочечные пространства были изобретены Бурбаки в 1950-м году, с целью обобщения теоремы Банаха-Штейнгауза, которая была обобщена следующим способом.

Теорема 5.20: Пусть V - бочечное пространство, а $T \subset V^*$ - набор функционалов, ограниченный в каждой точке $x \in V$. Тогда ограничен на каждом ограниченном множестве $K \subset V$:

$$\sup_{x\in K,\lambda\in T}|\lambda(x)| < \infty.$$

Доказательство: Рассмотрим множество $A_t \subset V$ - множество всех $x \in V$ таких, что $\sup_{\lambda\in T}|\lambda(x)| \leqslant t$. Это бочка, значит, она содержит окрестность $U \ni 0$. Поскольку K ограниченно, $\lambda K \subset U$. Поэтому

$$\sup_{x\in K,\lambda\in T}|\lambda(x)| < t\lambda^{-1}.$$

■

Определение 5.21. Определим **вариацию** функции f на множестве S как $\sup_S f - \inf_S f$. Семейство T функций на топологическом пространстве M называется **равномерно непрерывным**, если для каждого $\varepsilon > 0$ и $a \in M$ найдется окрестность $U \ni a$, на которой вариация всех элементов T ограничена ε.

Замечание 5.22. Из теоремы Банаха-Штейнгауза вытекает следующее полезное утверждение. Пусть $T \subset V^*$ семейство функционалов, ограниченных на каждой точке. Тогда T равномерно непрерывно.

Замечание 5.23. Пусть $\{x_i\}$ поточечно сходящаяся, равномерно непрерывная последовательность функций на топологическом пространстве. Тогда $\{x_i\}$ сходится униформно на компактах.

Замечание 5.24. Объединяя два предыдущих замечания, мы получаем, что последовательность ограниченных функционалов на бочечном пространстве, сходящаяся в слабой топологии к x, сходится к x равномерно на компактах

5.3. Рефлексивные пространства

Замечание 5.25. Пусть V – топологическое векторное пространство, а V^* - двойственное пространство со слабой топологией. Легко видеть, что топология на V^* задана системой полунорм $\{\nu_x\}$, параметризованной точками $x \in V$, вида $\nu_x(\lambda) = |\lambda(x)|$ (проверьте это). Поэтому V^* локально выпукло.

Упражнение 5.26: Пусть V - топологическое векторное пространство с топологией, заданной системой полунорм $\{\nu_\alpha\}$. Докажите, что линейная форма λ на V непрерывна тогда и только тогда, когда

$$|\lambda| \leqslant \sum_i C_i \nu_i$$

всюду на V, где $\{\nu_i\}$ конечный набор в $\{\nu_\alpha\}$, а C_i - положительные константы.
Лемма 5.27: Пусть V - топологическое векторное пространство. Тогда естественное вложение $V \longrightarrow V^{**}$, где двойственное берется со слабой топологией, является биекцией.

Доказательство: В силу предыдущего замечания, топология на V^* задана полунормами вида $\nu_x(\lambda) = |\lambda(x)|$. Поэтому непрерывность линейной формы ζ на V^* значит, что эта форма допускает оценку вида

$$|\zeta| \leqslant \sum_i |\nu_{x_i}|,$$

для какого-то конечного набора точек $x_1, ..., x_n \in V$. Поэтому ζ зануляется на пространстве $W := \langle x_1, x_2, ...\rangle^\perp \subset V^*$, которое аннигилирует точки $x_1, ..., x_n$. Очевидно, $V^*/W = \langle x_1, x_2, ...\rangle^*$. Поскольку конечномерные пространства удовлетворяют $L^{**} = L$, из этого следует, естественное отображение $\langle x_1, x_2, ...\rangle \xrightarrow{\Psi} (V^*/W)^*$ является изоморфизмом. Значит, $\zeta \in \operatorname{im}\Psi$. ■

Определение 5.28. Пространства V и V' **находятся в двойственности**, если заданно невырожденное спаривание $B: V \times V' \longrightarrow \mathbb{R}$.

Замечание 5.29. Это спаривание не предполагается а приори непрерывным. Например, спаривание между V и V^* с сильной топологией не всегда непрерывно как отображение $V \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

Определение 5.30. Пусть V, V' находятся в двойственности. **Полярой** (polar set) подмножества $K \subset V$ называется множество всех $\lambda \in V'$ таких, что $|\lambda|\Big|_K \leqslant 1$.

Определение 5.31. **Окрестность** точки x в топологическом пространстве есть подмножество, в котором x внутренняя точка. **Фундаментальная система окрестностей** точки в топологическом пространстве - это такой набор окрестностей $\{A_\alpha\}$, что любая окрестность x содержит какое-то из A_α.

Пример 5.32: Поскольку замыкание центральносимметричной, выпуклой окрестности нуля является бочкой (см. выше), бочки образуют фундаментальную систему окрестностей в бочечном пространстве. Обратное тоже верно: пространство является бочечным, если бочки образуют фундаментальную систему окрестностей.

Замечание 5.33. Если V - бочечное пространство, а V^* - сопряженное к нему, наделенное сильной топологией, то поляры ограниченных центрально-симметричных подмножеств в V^* являются бочками в V, а поляры бочек в V^* - ограниченными подмножествами в V (проверьте это).

Замечание 5.34. Фундаментальная система окрестностей 0 в V^{**}, где двойственные пространства взяты с сильной топологией, задается полярами ограниченных подмножеств в V^*. В силу предыдущего замечания, прообраз бочки при отображении $V \longrightarrow V^{**}$ - это бочка. Поскольку бочки образуют фундаментальную систему окрестностей в бочечном пространстве, отображение $V \longrightarrow V^{**}$ непрерывно для любого бочечного пространства V.

Определение 5.35. Локально выпуклое топологическое пространство называется **рефлексивным**, если естественное отображение $V \longrightarrow V^{**}$ (с сильной топологией оба раза) является изоморфизмом.

Замечание 5.36. Пусть V - пространство с нормой. Пространство V^* является, по построению, полным относительно естественной нормы на V^* (докажите это). Поэтому все рефлексивные норменные пространства банаховы.

Замечание 5.37. Банаховы пространства не всегда рефлексивны. Вложение $V \longrightarrow V^{**}$ является изометрией (выведите это из теоремы Хана-Банаха), но оно может не быть наложением.

Задача 5.1. Докажите, что банаховы пополнения пространства непрерывных функций на прямой с L^1 и L^∞-нормой не рефлексивны.

Замечание 5.38. Если V рефлексивно, естественное спаривание $V \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ (с сильной топологией на V^*) непрерывно. В самом деле, оно непрерывно по V^* (по построению), а непрерывность по V следует из того, что аналогичное спаривание $V^* \times V^{**} \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывно по V^{**}.

Определение 5.39. Локально выпуклое пространство называется **полурефлексивным**, если естественное спаривание $V \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ (с сильной топологией на V^*) непрерывно.

Замечание 5.40. Полурефлексивность V равносильна тому, что вложение $V \longrightarrow V^{**}$ – биекция. Действительно, каждый функционал на V^*, непрерывный в слабой топологии, принадлежит V (Лемма 5.27).

Замечание 5.41. Легко видеть, что полурефлексивное пространство V рефлексивно тогда и только тогда, когда исходная топология на V совпадает с топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах в V^* с сильной топологией.

Замечание 5.42. Если V полурефлексивно, то поляры ограниченных подмножеств в V замкнуты в V^* с сильной топологией, потому что спаривание $V \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывно. Поскольку они абсорбирующие (проверьте), они являются бочками. По определению сильной топологии, эти поляры задают фундаментальную систему окрестностей 0 в V^*. Следовательно, V^* с сильной топологией бочечное для любого полурефлексивного пространства V.

5.4. Пространства Монтеля

Определение 5.43. Предкомпактным подмножеством называется подмножество топологического пространства, замыкание которого компактно.

Определение 5.44. Пространство Монтеля это бочечное топологическое векторное пространство V, все ограниченные подмножества которого предкомпактны.

Задача 5.2. Пусть V пространство Фреше с топологией, заданной набором норм $\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \nu_3 \leqslant ...$ причем тождественное отображение $(V, \nu_i) \longrightarrow (V, \nu_{i-1})$ компактно. Докажите, что V – пространство Монтеля.

Указание 5.45. Тождественное отображение

$$(V, \nu_2, \nu_3, ...) \longrightarrow (V, \nu_1, \nu_2, \nu_3, ...)$$

является компактным, потому что $(V, \nu_i) \longrightarrow (V, \nu_{i-1})$ компактно. С другой стороны, это отображение - гомеоморфизм, потому что $\nu_1 \leqslant \nu_2$.
Пример 5.46: Тождественное отображение из пространства функций с нормой C^i в пространство функций с нормой C^{i-1} компактно (докажите это). Воспользовавшись предыдущей задачей, выведите из этого, что пространство Фреше тест-функций на многообразии является монтелевым.

Замечание 5.47. В бесконечномерном норменном пространстве единичный шар не может быть компактен ("Теорема Рисса"; докажите это). Поэтому бесконечномерное пространство Монтеля не может быть норменным.

Пример 5.48: Пусть $\mathcal{F}$ - пространство голоморфных функций на $\mathbb{C}$, с топологией равномерной сходимости на компактах. Тогда $\mathcal{F}$ - пространство Монтеля (это утверждение называется теорема Монтеля). Действительно, если f голоморфная функция в диске, непрерывная на его границе, то то все производные f в каждой точке внутренности диска ограничены значениями соответствующих интегралов Коши, поэтому все функции на диске, непрерывные и ограниченные на его границе, равномерно непрерывны внутри диска (докажите это). Поэтому предкомпактность ограниченных подмножеств в $\mathcal{F}$ следует из теоремы Арцела-Асколи (докажите).

Замечание 5.49. Поль Монтель (1876-1975), французский математик, был студентом Лебега и Бореля; его учениками были Анри Картан и Жан Дьедонне.

Упражнение 5.50: Обобщите теорему Монтеля, доказав, что пространство голоморфных функций на комплексном многообразии с топологией равномерной сходимости на компактах является пространством Монтеля

Упражнение 5.51: Докажите, что пространство гармонических функций на римановом многообразии с топологией равномерной сходимости на компактах является пространством Монтеля

Замечание 5.52. Пусть V - монтелевское пространство. Поскольку V бочечное, слабая топология на V^* совпадает с топологией униформной сходимости на компактах (Замечание 5.24). Но все ограниченные множества предкомпактны, значит слабая топология на V^* совпадает с топологией униформной сходимости на ограниченных множествах. Значит, сильная топология на V^* эквивалентна слабой (проверьте это).

Замечание 5.53. Из этого сразу следует, что монтелевское пространство V полурефлексивно. Действительно, естественное спаривание $V \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ (со слабой топологией) непрерывно, по определению слабой топологии.

Замечание 5.54. Полурефлексивность V равносильна тому, что естественное вложение $V \longrightarrow V^{**}$ биективно (Замечание 5.40). Поскольку непрерывное биективное отображение из компакта - гомеоморфизм (проверьте), из этого следует, что биекция $V \xrightarrow{\Psi} V^{**}$ гомеоморфизм на ограниченных подмножествах V. Поэтому Ψ переводит сходяшиеся последовательности в сходящиеся, а значит, непрерывно (проверьте это).

Утверждение 5.55: Пусть V - пространство Монтеля, V^* его двойственное. Тогда V^* – тоже пространство Монтеля.

Доказательство: Поскольку V полурефлексивно, V^* с сильной топологией бочечное (Замечание 5.42). По теореме Банаха-Штейнгауза, любое ограниченное подмножество в V^* равномерно непрерывно. Ограниченные функции на V образуют компактное множество в топологии поточечной сходимости, по теореме Тихонова. Из равномерной непрерывности следует, что предел непрерывных функционалов непрерывен, то есть непрерывные линейные функционалы замкнуты в тихоновской топологии.[1] Поэтому любое ограниченное подмножество в V^* предкомпактно. ■

[1] Таким же образом доказывается компактность шара в V^* в слабой топологии для любого банахова пространства V. Это утверждение называется "теорема Банаха-Алаоглу о компактности ограниченных множеств в $*$-слабой топологии".

5.5. Выпуклые конусы

Напомним, что **выпуклым конусом** в топологическом векторном пространстве W называется подмножество $C \subset W$, которое переводится в себя гомотетиями с положительным коэффициентом, и замкнуто относительно сложения. Конус называется **затупленным** (salient), если он не содержит 0. В дальнейшем все конуса предполагаются по умолчанию затупленными.

Определение 5.56. Двойственный конус к конусу C это множество C^* всех форм $\lambda \in W^*$ таких, что $\lambda\Big|_C > 0$.

Замечание 5.57. Если $A \subset B$ – два выпуклых конуса, то $B^* \supset A^*$ (проверьте это).

Замечание 5.58. При естественном отображении $W \longrightarrow W^{**}$, выпуклый конус C вкладывается в C^{**} (проверьте).

Замечание 5.59. На этом языке теорему Хана-Банаха можно переписать так. Пусть C - открытый выпуклый конус в топологическом векторном пространстве, не пересекающий замкнутого линейного подпространства $A \subset W$. Тогда в C^* есть вектор λ, зануляющийся на A.

Замечание 5.60. Применив это утверждение к одномерным подпространствам, получим, что для любого вектора $w \in W$, не принадлежащего открытому конусу найдется $\lambda \in C^*$, такой, что $\lambda(w) < 0$.

Замечание 5.61. Из этого замечания сразу вытекает следующее наблюдение. Пусть W рефлексивное пространство, а $C \subset W$ – открытый выпуклый конус. Тогда C^{**} совпадает с C (проверьте это).

Замечание 5.62. Двойственный конус к открытому выпуклому конусу не всегда открыт, даже в конечномерной ситуации. Примером конуса является полупространство, заданное $\lambda(x) > 0$; двойственный к этому конусу конус есть луч, порожденный λ.

5.6. Выпуклые конусы в пространствах потоков и тест-форм

Пусть (M, ω) – комплексное эрмитово n-мерное многообразие.

Замечание 5.63. Конус строго положительных $(1,1)$-форм открыт (проверьте это), а двойственный к нему конус ненулевых положительных $(n-1,n-1)$-потоков не открыт.

Задача 5.3. Пусть $\alpha \in D^{n-1,n-1}(M)$ - положительный поток. Докажите, что в любой окрестности α найдутся потоки, которые не положительны.

Замечание 5.64. Двойственный конус к конусу положительных потоков - конус строго положительных форм. Это следует из теоремы Хана-Банаха (см. выше).

Для любого положительного потока $\Xi \in D^{n-1,n-1}(M)$ с $\int_M \Xi \wedge \omega \leqslant C$, и любой формы $\gamma \in \Lambda^{1,1}(M)$ с $\sup_M |\gamma| < C'$, имеем

$$\int_M \Xi \wedge \gamma \leqslant CC'.$$

Поэтому положительные потоки, удовлетворяющие неравенству $\int_M \Xi \wedge \omega \leqslant C$, образуют ограниченное, а следовательно - компактное множество. Это свойство называется **слабой компактностью для положительных потоков**.

Замечание 5.65. Выражение "слабая компактность" не очень аккуратно, потому что на потоках слабая топология совпадает с сильной. В данном случае "слабая" указывает на теорему Банаха-Алаоглу о $*$-слабой компактности ограниченных подмножеств в слабой топологии.

Определение 5.66. Пусть $A \subset D^{n-1,n-1}(M)$ выпуклый конус. такой, что каждый $\Theta \in A$ удовлетворяет

$$\int_M \Theta \wedge \omega > 0.$$

Зафиксируем выпуклую, открытую окрестность нуля в потоках, $B \subset D^{n-1,n-1}(M)$, такую, что

$$\forall \Xi \in B, \quad \left| \int_M \Xi \wedge \omega \right| < 1.$$

Такая окрестность существует, потому что функционал $\Xi \longrightarrow \int_M \Xi \wedge \omega$ непрерывен. Зафиксируем $0 < \varepsilon < 1$. Рассмотрим подмножество $A_\varepsilon \subset D^{n-1,n-1}(M)$ состоящее из элементов вида $a + b$, где

$$a \in A, b \in \varepsilon t B \text{ а } t := \int_M a \wedge \omega.$$

Мы называем A_ε **ε-окрестностью** конуса A.

Упражнение 5.67: Докажите, что A_ε - открытый, выпуклый конус, причем

$$\forall \Xi \in A_\varepsilon, \quad \int_M \Xi \wedge \omega > 0.$$

Замечание 5.68. Если A_ε содержит конус положительных потоков, A_ε^* содержится в конусе строго положительных форм. Поскольку A_ε открыт, $A_\varepsilon^{**} = A_\varepsilon$, а значит, конус A_ε^* непуст.

Задачи.

Задача 5.1. Докажите, что счетное объединение возрастающих полурефлексивных пространств полурефлексивно.

Задача 5.2. Докажите, что прямая сумма и декартово произведение любого количества монтелевых пространств - монтелевы.

Определение 5.69. Напомню, что топологическое векторное пространство называется **пространством Фреше**, если оно допускает полную, трансляционно-инвариантную метрику.

Задача 5.3. Докажите, что метризуемое пространство Монтеля является пространством Фреше.

Задача 5.4. Пусть V - бесконечномерное пространство Фреше. Может ли V быть локально компактным?

Определение 5.70. Пучок $\mathcal{F}$ топологических векторных пространств на локально связном, локально компактном пространстве M называется **пучком Фреше-Монтеля**, если для каждого открытого множества $U \subset M$, $\Gamma(U, \mathcal{F})$ - пространство Фреше, причем ограничение

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U', \mathcal{F})$$

является компактным оператором, если замыкание U' в U компактно.[1]

Задача 5.5. Докажите, что пучок сечений голоморфного расслоения с топологией равномерной сходимости на компактах является пучком Фреше-Монтеля.

[1]Это определение введено Гротендиком в 1957-м году.

Задача 5.6 (*). Пусть D - эллиптический оператор на многообразии M. Докажите, что множество функций $\psi \in \ker D$ с топологией равномерной сходимости на компактах является пучком Фреше-Монтеля.

Определение 5.71. Пучок $\mathcal{F}$ абелевых групп на топологическом пространстве называется **вычислимым**, если для каждой окрестности $U \ni x$, и для каждого $i > 0$ есть открытое подмножество $V \ni x$ такое, что отображение ограничения $H^i(U, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(V, \mathcal{F})$ равно нулю.

Задача 5.7. Докажите, что пучок вычислим тогда и только тогда, когда его когомологии можно вычислить как прямой предел когомологий комплексов Чеха по множеству покрытий, со структурой фильтрованного множества, определенной измельчениями покрытий.

Задача 5.8. Докажите теорему Гротендика: если $\mathcal{F}$ – вычислимый пучок Фреше-Монтеля на компактном многообразии, то когомологии $\mathcal{F}$ конечномерны.

Указание 5.72. Пусть Ψ - морфизм комплексов Чеха, соответствующий измельчению $\mathcal{U}'$ покрытия $\mathcal{U}$ пространства M. Предположим, что все карты покрытия $\mathcal{U}'$ предкомпактны в соответствующих им картах $\mathcal{U}$. Тогда Ψ компактен. Выведите из этого, что тождественный морфизм на пространстве когомологий M компактен.

Замечание 5.73. Теорема Гротендика доказывает теорему Картана-Серра, которая утверждает, что когомологии когерентных пучков на компактном комплексном многообразии конечномерны.

6. Комплексные поверхности, лекция 6: Кэлеровы потоки и $\partial\bar\partial$-лемма.

В этой лекции (M,ω) – комплексное эрмитово n-мерное многообразие, обыкновенно поверхность, а $\omega\in\Lambda^{1,1}(M)$ его эрмитова форма, которая предполагается годушоновой, то есть удовлетворяющей $dd^c(\omega^{n-1})=0$. Буквой $d^c:\ \Lambda^p(M)\longrightarrow\Lambda^{p+1}(M)$ обозначается скрученный дифференциал $d^c:=-I\circ d\circ I$. Легко видеть, что $dd^c=-2\sqrt{-1}\partial\bar\partial$.

Изложенное ниже доказательство кэлеровости поверхностей с четным b_2 принадлежит Ламари ([L]).

6.1. Кэлеровы потоки. Теорема Ламари.

Определение 6.1. Кэлеров поток на комплексном многообразии (M,I) это положительный $(1,1)$-поток Ξ такой, что $\Xi>\omega_1$ для какой-то эрмитовой формы ω_1 на M.

Определение 6.2. Пространство

$$H^{1,1}_{BC}(M):=\frac{\ker d\Big|_{\Lambda^{1,1}(M)}}{\operatorname{im} dd^c\Big|_{C^\infty(M)}}$$

называется пространством когомологий Ботта-Черна.

Замечание 6.3. Для любого dd^c-замкнутого $(n-1,n-1)$-потока ψ, и любой замкнутой $(1,1)$-формы α, интеграл

$$\int_M\alpha\wedge\psi$$

зависит только от класса когомологий α в $H^{1,1}_{BC}(M)$ (проверьте это). В дальнейшем мы будем, не оговаривая, писать интегралы вида $\int_M[\alpha]\wedge\psi$ для классов $[\alpha]\in H^{1,1}_{BC}(M)$.

Замечание 6.4. Легко видеть, что дифференциал де Рама, ограниченный на $(0,1)$-формы, определяет отображение $d:\ H^1(\mathcal{O}_M)\longrightarrow H^{1,1}_{BC}(M)$, что определяет точную последовательность

$$H^1(\mathcal{O}_M)\oplus\overline{H^1(\mathcal{O}_M)}\xrightarrow{d\oplus d}H^{1,1}_{BC}(M)\longrightarrow H^2(M)\longrightarrow 0$$

(проверьте это). Поэтому группа $H^{1,1}_{BC}(M)$ конечномерна.

Упражнение 6.5: Проверьте, что группа Ботта-Черна когомологий (1,1)-потоков, определенная таким же образом, как для форм, изоморфна $H^{1,1}_{BC}(M)$.

Замечание 6.6. Из этого сразу следует, что любой замкнутый (1,1)-поток когомологичен в $H^{1,1}_{BC}(M)$ гладкой, замкнутой (1,1)-форме.

Определение 6.7. Определим подмножество A в $\Lambda^{1,1}(M)$ следующим образом: A есть множество $(1,1)$-форм $\alpha \in \Lambda^{1,1}(M)$ таких, что для некоторого числа $\varepsilon_\alpha > 0$, и любой положительной, dd^c-замкнутой $(n-1,n-1)$-формы $\psi \in \Lambda^{n-1,n-1}(M)$, имеет место неравенство

$$\int_M \alpha \wedge \psi > \varepsilon_\alpha \int_M \omega \wedge \psi$$

Легко видеть, что это выпуклый конус (проверьте это).

Лемма 6.8: Пусть β - (1,1)-форма, лежащая в конусе A, определенном выше. Тогда существует обобщенная функция (0-поток) $f \in D^0(M)$ такая, что $\beta + dd^c f$ – положительный поток.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\mathcal{P}\mathrm{os}_\varepsilon$ - открытый конус, полученный в предыдущей лекции как ε-окрестность конуса положительных $(1,1)$-потоков. Если $\beta + dd^c D^0(M) \cap \mathcal{P}\mathrm{os}_\varepsilon = \emptyset$, по теореме Хана-Банаха найдется форма $\rho \in \mathcal{P}\mathrm{os}_\varepsilon^* \subset \Lambda^{n-1,n-1}(M)$ такая, что $\int_M (\beta + dd^c f) \wedge \rho = 0$, для любой обобщенной функции $f \in D^0(M)$. Из этого условия сразу следует, что $dd^c\rho = 0$ (проверьте это), а из того, что $\mathcal{P}\mathrm{os}_\varepsilon^*$ содержится в положительном конусе - что ρ положительна. Мы получили, что $\int_M \beta \wedge \rho = 0$ для положительной, dd^c-замкнутой формы ρ – противоречие! Значит, $\beta + dd^c D^0(M) \cap \mathcal{P}\mathrm{os}_\varepsilon \neq \emptyset$ для любого $1 > \varepsilon > 0$.

Шаг 2: Мы получили, что для каждой окрестности нуля B в (1,1)-потоках, при условии

$$\forall \Xi \in B, \quad \left| \int_M \Xi \wedge \omega^{n-1} \right| < 1.$$

найдется поток вида

$$\beta + dd^c f = a + b,$$

где a положительный поток, а $b \in \varepsilon B$. Поскольку

$$\int_M a \wedge \omega^{n-1} < \int_M \beta \wedge \omega^{n-1} + \varepsilon,$$

множество $Y_{\varepsilon B}$ таких a предкомпактно. Поэтому существует поток вида $\beta + dd^c f$, который принадлежит замыканию $Y_{\varepsilon B}$ для всех B. Этот поток принадлежит замыканиям всех эпсилон-окрестностей положительного конуса; нетрудно видеть, что замыкание ε-окрестности содержится в 2ε-окрестности, значит $\beta + dd^c f$ содержится во всех ε-окрестностях.

Шаг 3: Поскольку пространство потоков отделимо, а положительный конус в объединении с нулем замкнут, пересечение всех ε-окрестностей положительного конуса это положительный конус в объединении с нулем. Значит, $\beta + dd^c f$ положительно либо 0. Оно не может быть нулем, потому что $\int_M \beta \wedge \omega^{n-1} > 0$. ■

Утверждение 6.9: Пусть компактное комплексное многообразие, а $[v] \in H^{1,1}_{BC}(M)$ – класс когомологий. Тогда следующие утверждения равносильны

(i) $[v]$ представим кэлеровым потоком

(ii) $[v]$ удовлетворяет следующему неравенству[1]

$$\int_M [v] \wedge \psi > \varepsilon \int_M \omega \wedge \psi \tag{6.1.1}$$

для некоторого числа $\varepsilon > 0$, и любой положительной, dd^c-замкнутой $(n-1, n-1)$-формы $\psi \in \Lambda^{n-1,n-1}(M)$.

Доказательство: Пусть v – кэлеров поток, $v > \varepsilon\omega$, а $\alpha \in \Lambda^{1,1}(M)$ - любая гладкая форма в том же классе когомологий $[v] \in H^{1,1}_{BC}(M)$. Тогда

$$\int_M \alpha \wedge \psi > \varepsilon \int_M \omega \wedge \psi,$$

для каждой положительной формы $\psi > 0$. С другой стороны, $\int_M v \wedge \psi = \int_M \alpha \wedge \psi$, если ψ dd^c-замкнута, потому что $v - \alpha \in \operatorname{im} dd^c$ (проверьте).

Пусть, наоборот, $[v]$ удовлетворяет неравенству (6.1.1), а α - гладкая форма, представляющая $[v]$. Применив Лемму 6.8 к $\beta := \alpha - \frac{1}{2}\varepsilon\omega$, мы находим положительный поток вида $\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon\omega + dd^c f$. Тогда поток $\alpha + dd^c f$ является кэлеровым. ■

Обозначим $d^{1,1} :\ D^{2n-3}(M) \longrightarrow D^{n-1,n-1}(M)$ оператор, который ставит в соответствие потоку Θ $(n-1, n-1)$-часть его дифференциала.

[1] Неравенство (6.1.1) означает, что любая гладкая форма, представляющая $[v]$, лежит в конусе A, определенном выше.

При доказательстве теоремы Харви-Лоусона, мы пользовались тем, что аннулятор $\operatorname{im} d^{1,1}$ это $\ker d\Big|_{\Lambda^{1,1}(M)}$. В силу рефлексивности, $\operatorname{im} d^{1,1}$ это аннулятор $\ker d\Big|_{\Lambda^{1,1}(M)}$, и поэтому $\operatorname{im} d^{1,1}$ замкнут в пространстве потоков.

Определение 6.10. Форма (или поток) α называется **плюригармонической**, если $dd^c\alpha = 0$. $(n-1, n-1)$-поток Ξ называется **неф-плюригармоническим,** если Ξ является пределом последовательности положительных, dd^c-замкнутых форм.

Лемма 6.11: Пусть M - компактное, комплексное n-мерное многообразие, A - конус $(1,1)$-форм, удовлетворяющих неравенству (6.7), а B - конус неф-плюригармонических $(n-1, n-1)$-потоков. Тогда $A^* = B$.

Доказательство: Пусть K° - множество положительных dd^c-замкнутых форм $\psi \in \Lambda^{n-1,n-1}(M)$, удовлетворяющих $\int \omega \wedge \psi = 1$, а K - его замыкание в пространстве потоков. Поскольку K ограниченно, а пространство потоков монтелевское, K компактно. Конус, натянутый на K, совпадает с конусом B неф-плюригармонических потоков.

Пусть α – (1,1)-форма, которая удовлетворяет $\int_M \alpha \wedge \psi > 0$ для любой dd^c-замкнутой, положительной ψ. Тогда $\alpha\Big|_K > 0$, а поскольку K компактно, имеем $\alpha\Big|_K > \varepsilon$. Значит, $\alpha \in A$ (докажите это). Мы получили, что $A \subset B^*$. Из рефлексивности получаем $A^{**} = A$, что дает $A^* = A^{***} = B^{**} \supset B$. Обратное вложение $B \supset A^*$ очевидно, потому что элементы B получаются как пределы плюригармонических, положительных форм, а с такими формами A спаривается положительно. ■

Напомним, что теорема Харви-Лоусона утверждает, что некэлерово многообразие допускает ненулевой положительный поток, который лежит в образе $d^{1,1}$. Следующая теорема, принадлежащая Ламари, дает аналогичный критерий для кэлеровых потоков. Оказывается несуществование кэлерова потока влечет наличие положительного потока, который лежит в образе $d^{1,1}$, и к тому же неф-плюригармоничен. Доказательство целиком идентично доказательству Харви-Лоусона, но вместо конуса положительных потоков используется конус A, определенный выше.

Теорема 6.12: Пусть M - компактное, комплексное n-мерное многообразие. Тогда следующие утверждения равносильны

(i) На M существует кэлеров поток.

(ii) Любой неф-плюригармоничный $(n-1,n-1)$-поток $\beta\in\operatorname{im} d^{1,1}$ равен нулю.

Доказательство. Шаг 1: Пусть на M существует кэлеров поток Ξ, и неф-плюригармоничный поток $\beta\in\operatorname{im} d^{1,1}$, являющийся пределом положительных плюригармоничных форм $\beta=\lim\beta_i$. Обозначим за $[\Xi]$ класс когомологий Ξ в $H^{1,1}_{BC}(M)$. Поскольку $d\Xi=0$, а ядро d аннулирует $\operatorname{im} d^{1,1}$, $\int_M[\Xi]\wedge\beta=0$ (проверьте это).

Шаг 2: В силу Утверждения 6.9, существует $\varepsilon>0$, такой, что

$$\int_M[\Xi]\wedge\beta_i\geqslant\varepsilon\int\omega\wedge\beta_i.$$

Переходя к пределу, получаем

$$0=\int_M[\Xi]\wedge\beta\geqslant\varepsilon\int\omega\wedge\beta.$$

Значит, $\int\omega\wedge\beta=0$. Поскольку β положительный поток, из этого сразу следует, что $\beta=0$ (проверьте). Мы доказали, что (i) влечет (ii)

Шаг 3: Рассмотрим конус A $(1,1)$-форм, удовлетворяющих неравенству (6.7). Это выпуклый, открытый конус. В силу Утверждения 6.9, $A\cap\ker d\neq 0$ равносильно существованию кэлерова потока. Если на M не существует кэлерова потока, из теоремы Хана-Банаха получаем, что существует $(n-1,n-1)$-поток $\Theta\in\operatorname{im} d^{1,1}$, который положителен на A. В силу Леммы 6.11, это значит, что Θ - неф-плюригармонический поток.
■

6.2. Неф-плюригармонические потоки на поверхности и dd^c-лемма

Напомним, что dd^c-лемма для (1,1)-форм утверждает, что любая точная $(1,1)$-форма лежит в образе dd^c. Иначе говоря, dd^c-лемма говорит, что естественное отображение $H^{1,1}_{BC}(M)\longrightarrow H^2(M)$ является вложением. На лекции 4 было доказано, что для поверхности dd^c-лемма равносильна четности $b_1()$.

Переходя к двойственному пространству, мы получаем, что

$$H^{1,1}_{BC}(M)^*\cong\frac{\ker dd^c\Big|_{D^{n-1,n-1}(M)}}{d^{1,1}(D^{2n-3}(M))},$$

где D обозначает потоки (докажите это). Если верна dd^c-лемма, инъективность $H^{1,1}_{BC}(M) \longrightarrow H^2(M)$ дает сюрьективность двойственного отображения

$$H^{2n-2}() \longrightarrow \frac{\ker dd^c\Big|_{D^{n-1,n-1}(M)}}{d^{1,1}(D^{2n-3}(M))}.$$

Мы получили следующее

Следствие 6.13: Пусть Ξ - dd^c-замкнутый $(n-1,n-1)$-поток на компактном n-мерном комплексном многообразии. Предположим, что $(1,1)$-формах на M справедлива dd^c-лемма. Тогда существует $2n-3$-поток $\zeta \in D^{2n-3}(M)$ такой, что $\Xi - d^{1,1}\zeta$ замкнуто. ■

Замечание 6.14. Если последовательность классов когомологий $\nu_i \in H^{1,1}_{BC}(M)^*$ сходится к нулю, можно выбрать гладкие формы в этих классах, которые будут сходиться к нулю в C^0-топологии (или даже в топологии тест-форм; докажите это). Поэтому на многообразии с dd^c-леммой, каждый неф-плюригармонический, $d^{1,1}$-замкнутый $(n-1,n-1)$-поток Ξ можно получить как предел положительных форм

$$\Xi = \lim_i \Xi_i, \quad \Xi_i = a_i + b_i$$

где b_i - последовательность гладких, замкнутых $(n-1,n-1)$-форм, сходящихся к нулю в C^0-топологии, а $a_i \in \operatorname{im} d^{1,1}$.

Пусть M комплексная поверхность с четным b_1 (это равносильно dd^c-лемме), а Ξ – неф-плюригармонический, $d^{1,1}$-замкнутый $(1,1)$-поток. Тогда Ξ может быть получен как предел положительных $(1,1)$-форм, $\Xi = \lim_i \Xi_i$, причем

$$\Xi_i = b_i + d^{1,1}(\nu_i)$$

а b_i - последовательность гладких, замкнутых $(1,1)$-форм, сходящихся к нулю в C^0-топологии. Разложив $\Xi\wedge\Xi$ по типам, получаем:

$$0 \leqslant \int_M \Xi_i \wedge \Xi_i = \int_M (b_i + d\nu_i)\wedge(b_i+d\nu_i) - 2\int_M \partial(\nu_i^{1,0})\wedge\bar\partial(\nu_i^{0,1}).$$

Поскольку $\int_M (b_i + d\nu_i)\wedge(b_i+d\nu_i) = \int_M b_i\wedge b_i$, из этого следует

$$\int_M |\partial(\nu_i^{1,0})|^2\omega^2 \leqslant \int_M b_i\wedge b_i.$$

Значит, $\partial(\nu_i^{1,0})$ сходится к нулю в L^2-норме. Поскольку L^2-норма на компакте сильнее L^1-нормы, которая, в свою очередь, сильнее топологии на потоках (проверьте), предел $\lim \partial(\nu_i^{1,0})$ определен и равен нулю. Следовательно $\Xi = \lim b_i + d\nu_i = \lim d\nu_i$. Поскольку пространство точных потоков замкнуто, из этого следует, что Ξ точен. Мы доказали

Следствие 6.15: Пусть M комплексная поверхность с четным b_1 (это равносильно dd^c-лемме), а Ξ – неф-плюригармонический, $d^{1,1}$-точный $(1,1)$-поток. Тогда Ξ точен. ■

Применяя dd^c-лемму еще раз, выводим из этого, что $\Xi = dd^c f$, для какой-то обобщенной функции $f \in D^0(M)$. Получаем из формулы Стокса (проверьте)

$$\int_M \Xi \wedge \omega = \int_M dd^c f \wedge \omega = \int_M f \wedge dd^c \omega = 0,$$

а значит $\Xi = 0$. Мы доказали, что поверхность с черным b_1 не допускает ненулевых $d^{1,1}$-точных неф-плюригармонических потоков. По теореме 6.12, это значит, что на M существует кэлеров поток.

Теорема 6.16: Пусть M комплексная поверхность с четным b_1. Тогда на M существует кэлеров поток. ■

6.3. Плюрисубгармонические функции и регуляризованный максимум

Определение 6.17. Пусть ϕ - 0-поток (обобщенная функция) на комплексном многообразии, такая, что $dd^c\phi$ – положительный $(1,1)$-поток. Такая функция называется **плюрисубгармонической** (psh).

Пример 6.18: Пусть r - расстояние до нуля в евклидовой метрике на $\mathbb{C}^n$. Тогда $dd^c r^2$ - обычная кэлерова метрика ма $\mathbb{C}^n$. В частности, функция r^2 плюрисубгармонична.

Приведенные ниже результаты сформулированы для гладких psh-функций, но их можно доказать и для негладких, сглаживая эти негладкие psh-функции сверткой с подходящим ядром.

Упражнение 6.19: Пусть $\mu: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ гладкая функция, выпуклая вниз и неубывающая по всем аргументам, а $\phi_1, ..., \phi_n$ набор гладких плюрисубгармонических функций на M. Докажите, что композиция $\mu(\phi_1, ..., \phi_n)$ плюрисубгармонична.

Указание 6.20. Используйте формулу производной композиции

Определение 6.21. Пусть $\mu: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ гладкая гладкая функция, выпуклая вниз и неубывающая по всем аргументам, причем для $|x-y| \geqslant \varepsilon$, $\mu(x,y) = \max(x,y)$, и к тому же $\mu(x,y) = \mu(y,x)$ и $\mu(y+\alpha, x+\alpha) = \mu(x,y)$ для всех $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$. Такая функция называется **регуляризованным максимумом**, и обозначается $\max_\varepsilon(x,y)$

Упражнение 6.22: Докажите, что регуляризованный максимум существует.

Замечание 6.23. Из предыдущего упражнения сразу следует, что регуляризованный максимум $\max_\varepsilon(\phi, phi')$ плюрисубгармоничен, если функции ϕ и ϕ' плюрисубгармоничны.

Замечание 6.24. Если $dd^c\phi \geqslant \varepsilon\omega$ и $dd^c\phi' \geqslant \varepsilon\omega$, для какой-то кэлеровой формы ω, то $dd^c \max_\varepsilon(\phi, phi') \geqslant \varepsilon\omega$. Действительно, пусть $\omega = dd^c\psi$ (локально, такой ψ существует, потому что локально на каждом многообразии верна dd^c-лемма; докажите ее). Тогда

$$\max_\varepsilon(\phi - \varepsilon\psi, phi' - \varepsilon\psi) = \max_\varepsilon(\phi, phi') - \psi$$

плюрисубгармонична, значит,

$$dd^c \max_\varepsilon(\phi, phi') \geqslant \varepsilon dd^c\psi = \varepsilon\omega.$$

Определение 6.25. Функция ϕ называется **строго плюрисубгармоничной**, если $dd^c\phi - \varepsilon\omega$ положительно для эрмитовой формы ω и $\varepsilon > 0$.

Упражнение 6.26: Выведите из предыдущего замечания, что регуляризованный максимум строго psh функций снова строго psh.

6.4. Кэлеровы потоки и регуляризация

Чтобы закончить доказательство теоремы о том, что все поверхности с четным b_1 кэлеровы, осталось убедиться, что из наличия кэлерова потока на поверхности следует ее кэлеровость. Для этого я прибегну к теореме Демайи о регуляризации положительных потоков, которую я оставлю без доказательства. Набросок доказательства ее можно усмотреть в трудах Демайи, например, тут: [D].

Замечание 6.27. Отметим, что для любого набора $\{g_i\}$ голоморфных функций, функция $\log \sum_i (|g_i|^2)$ плюрисубгармонична, то есть интегрируема, а $(1,1)$-поток $dd^c \log \sum_i (|g_i|^2)$ положителен.

Определение 6.28. Пусть T - замкнутый (1,1)-поток, заданный как $T = dd^c\psi$, где ψ - обобщенная функции. Мы говорим, что ψ имеет логарифмические полюса, если $\psi = \lambda \log \sum_i (|g_i|^2) + \psi_0$, где ψ_0 – гладкая функция, а g_i голоморфные. Мы говорим, что T имеет логарифмические особенности, если его можно локально задать в виде $T = dd^c\psi$, где ψ функция с логарифмическими полюсами.

Теорема 6.29: ([D, 21.4]) Пусть T - положительный, замкнутый $(1,1)$-поток на компактном, комплексном эрмитовом многообразии (M,ω). Тогда существует последовательность потоков T_k с логарифмическими особенностями в том же классе когомологий $H^{1,1}_{BC}(M)$, причем $T_k \geqslant T - \delta_k\omega$, где δ_k стремится к 0, и $\{T_k\}$ сходится к T в топологии потоков. ■

Замечание 6.30. Из этой теоремы сразу вытекает, что T_k кэлеровы потоки, если T кэлеров поток, а δ_k достаточно маленькие. Поэтому если на многообразии M существует кэлеров поток, на M существует кэлеров поток с логарифмическими особенностями.

Из всей теоремы Демайи о регуляризации, нам понадобится только это замечание.

Пусть теперь T - кэлеров поток с логарифмическими особенностями на поверхности, а Z его особое множество. По определению Z есть множество общих нулей голоморфных функций g_i, участвующих в определении логарифмических особенностей. Если Z содержит кривую C, локально определенную функцией g_C с простым нулем в неособых точках C, в окрестности этой кривой все функции g_i делятся на g_C. Поэтому

$$\lambda \log \sum_i (|g_i|^2) = \lambda \log |g_C| + \lambda \log \sum_i (|g_i/g_C|^2).$$

Легко видеть, что $dd^c\lambda \log |g_C| = [C]$,[1] где $[C]$ – поток интегрирования по кривой C, $\alpha \longrightarrow \int_C \alpha$. Поэтому $T = [C] + T_1$, где T_1 тоже кэлеров поток. Будем отщеплять кривые таким образом одну за другой. Действуя индукцией по порядку нулей g_i вдоль C и по количеству кривых в особом

[1] Это утверждение называется "формула Пуанкаре-Лелона". Выведите ее из формулы вычетов.

множестве T, легко убедиться, что этот процесс закончится (проверьте это) на кэлеровом потоке с логарифмическими особенностями, изолированными в точках.

Чтобы доказать, что поверхность, допускающая кэлеров поток, кэлерова (и тем самым закончить доказательство кэлеровости любой поверхности с четным $b_1(M)$), нам осталось получить следующее утверждение.

Утверждение 6.31: Пусть T - кэлеров поток с изолированными особенностями на комплексном многообразии M. Тогда в том же классе $[T] \in H^{1,1}_{BC}(M)$ существует кэлеров поток.

Доказательство: Пусть $z_1, z_2, ..., z_n$ - особые точки T, а

$$\phi_i = \lambda \log \sum_\alpha (|g_\alpha|^2) + \psi_0$$

соответствующие потенциалы, равные $-\infty$ в z_i, и определенные в открытых множествах $U_i \subset M$ Выбрав U_i достаточно маленьким, можно предположить, что на нем есть кэлеров потенциал ψ, то есть такая функция, что форма $dd^c\psi$ кэлерова. Легко видеть, что для существенно отрицательного $A \ll 0$, функция $\max_\varepsilon(A+\psi, \phi_i)$ равна ϕ_i вне компактной окрестности $z_i \in U_i$, и гладка всюду на U_i. Эта функция плюрисубгармонична (докажите). Заменим T на $dd^c \max_\varepsilon(A+\psi, \phi_i)$ внутри U_i, оставив его как есть вне U_i, Мы получим строго положительный, замкнутый поток, неособый в U_i (проверьте). Повторив эту операцию во всех z_i, мы получим кэлерову форму. ■

Задачи.

Задача 6.1. Пусть K - выпуклый конус в рефлексивном локально выпуклом пространстве. Назовем K рефлексивным, если $K^{**} = K$. Докажите, что открытый конус рефлексивен.

Определение 6.32. Пусть $K \subset V$ — подмножество векторного пространства V. **выпуклый конус, натянутый на** K — множество ненулевых линейных комбинаций элементов из K с положительными коэффициентами.

Задача 6.2. Пусть $K \subset V$ - компактное подмножество в локально выпуклом векторном пространстве, а K_1 - выпуклый конус, натянутый на K. Докажите, что K_1^* открыт. Будет ли K_1 рефлексивен?

Задача 6.3. Пусть $[\alpha] \in H^{1,1}(M)$ – класс когомологий на n-мерном кэлеровом многообразии M, а Ξ - dd^c-замкнутый $(n-1, n-1)$-поток. Докажите, что интеграл $\int_M \alpha \wedge \Xi$ не зависит от выбора замкнутой (1,1)-формы α, представляющей $[\alpha]$.

Задача 6.4. Пусть $[\alpha] \in H^{1,1}(M)$ – класс когомологий на n-мерном кэлеровом многообразии M. Докажите, что $[\alpha]$ не представим кэлеровой формой тогда и только тогда, когда существует положительный dd^c-замкнутый $(n-1, n-1)$-поток Ξ, удовлетворяющий $\int_M [\alpha] \wedge \Xi \leqslant 0$.

Задача 6.5. Пусть $[\alpha] \in H^{1,1}(M)$ – класс когомологий на n-мерном кэлеровом многообразии M. Докажите, что $[\alpha]$ не представим кэлеровым потоком тогда и только тогда, когда существует положительный неф-плюригармонический $(n-1, n-1)$-поток Ξ, удовлетворяющий $\int_M [\alpha] \wedge \Xi \leqslant 0$.

Задача 6.6. Пусть M – компактная поверхность, а η - положительная $(1,1)$-форма на M, которая является $(1,1)$-частью замкнутой. Докажите, что η замкнута.

Задача 6.7. Обозначим за I пространство (1,1)-форм на поверхности, которые являются $(1,1)$-частью замкнутых. Докажите, что I замкнуто, а аннулятор I это пространство точных (1,1)-потоков.

Задача 6.8. Пусть M - некэлерова поверхность. Докажите, что на M есть точный, положительный (1,1)-поток.

Указание 6.33. Выведите из предыдущих задач, что любая строго положительная форма $\omega \in I$ кэлерова, и воспользуйтесь теоремой Хана-Банаха.

Определение 6.34. Комплексное эрмитово n-мерное многообразие (M, ω) называется **взвешенным** (balanced), если $d(\omega^{n-1}) = 0$.

Задача 6.9. Пусть M - компактное комплексное многообразие, не допускающее взвешенной метрики. Докажите, что на M есть $d^{1,1}$-точный, положительный (1,1)-поток.

Задача 6.10. Пусть M - компактное комплексное многообразие, бирационально эквивалентное кэлерову. Докажите, что допускает взвешенную метрику.

Задача 6.11. Пусть M - компактное комплексное многообразие, не допускающее KT-метрики (метрики, которая удовлетворяет $dd^c\omega = 0$). Докажите, что на M есть dd^c-точный положительный $(n-1, n-1)$-поток.

Литература:

[L] A. Lamari, Courrants kählériens et surfaces compactes, Ann. Inst. Fourier 49 (1999), 263-285

[D] Demailly, Jean-Pierre, *Analytic methods in algebraic geometry,* Lecture Notes, École d'été de Mathématiques de Grenoble "Géométrie des variétés projectives complexes : programme du modèle minimal", http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/books.html