Комплексные поверхности,

лекция 10: теорема Хана-Банаха и потоки на многообразиях

Миша Вербицкий

НМУ/матфак ВШЭ, Москва

16 апреля 2012

Пространства Фреше (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Локально выпуклое топологическое векторное пространство** это топологическое векторное пространство, базу топологии которого составляют выпуклые множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Рассмотрим векторное пространство, снабженное набором полунорм $|\cdot|_i$, $i = 0, 1, 2, ...$ и топологией, которая задана метрикой вида $d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \max(|x - y|_i, 2^{-i})$. Такое пространство называется **пространством Фреше**, если эта метрика полна (т.е. любая последовательность Коши в этой метрике сходится).

ЗАМЕЧАНИЕ: Последовательность точек сходится в топологии Фреше тогда и только тогда, когда она сходится во всех нормах $|\cdot|_i$, а базой топологии Фреше будут бесконечные пересечения ε-шаров вида $\bigcap_{i=0}^{\infty} B_x(\varepsilon_i, |\cdot|_i)$, во всех нормах $|\cdot|_i$ **(докажите это).**

Потоки на многообразиях (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M - многообразие, B - расслоение. Введем метрику на M и связность с метрикой на B. Формула $|\varphi|_{C^k} := \sup_M \sum_{i=0}^k |\nabla^i \varphi|$ задает норму C^i на пространствах сечений B с компактным носителем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **(p,q)-потоком** на комплексном n-мерном многообразии называется функционал на пространстве $\Lambda_c^{n-p,n-q}(M)$ $(n-p, n-q)$-форм с компактным носителем, непрерывный в одной из C^i-топологий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство тест-форм типа (p,q)** на комплексном многообразии это пространство (p,q)-форм с компактным носителем, снабженное структурой пространства Фреше, определенной по нормам C^i.

ЗАМЕЧАНИЕ: Потоки суть функционалы на $\Lambda_c^{n-p,n-q}(M)$, непрерывные в топологии тест-форм.

ЗАМЕЧАНИЕ: Также **потоки можно рассматривать как (p,q)-формы с коэффициентами в обобщенных функциях.**

Положительные (1,1)-формы и потоки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Положительная $(1,1)$-форма** – это вещественная (1,1)-форма α, удовлетворяющая $\alpha(x, Ix) \geqslant 0$, для любого вещественного векторного поля x.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M - комплексное, n-мерное многообразие. $(n-1, n-1)$-поток η называется **положительным** если $\int_M \eta\wedge\alpha \geqslant 0$ для любой положительной $(1,1)$-формы,

ПРИМЕР: Пусть C – неособая комплексная кривая на комплексном многообразии. **Поток интегрирования** $\alpha \to \int_C \alpha$ задает функционал $\Lambda_c^{1,1}(M) \to \mathbb{R}$, **непрерывный в C^0-топологии (проверьте это)**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Это положительный, замкнутый поток**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: **Проверьте это самостоятельно**. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: То же верно и для особых кривых **(докажите)**.

Теорема Хана-Банаха

ТЕОРЕМА: (Теорема Хана-Банаха) Пусть V – локально выпуклое топологическое векторное пространство, $A \subset V$ - открытый выпуклый конус, не содержащий 0, $W \subset V$ - замкнутое подпространство, а θ_W - непрерывный линейный функционал на W, положительный на $W \cap A$. **Тогда на V существует непрерывный линейный функционал θ, такой, что $\theta|_A > 0$, а $\theta|_W = \theta_W$.**

Доказательство. Шаг 1: Обозначим за $W_0 \subset W$ ядро θ_W. Для доказательства Хана-Банаха, достаточно проверить, что **существует гиперплоскость $H \subset V$, содержащая W_0 и не пересекающая A.**

Шаг 2: Если $\dim V = 2$, теорема Хана-Банаха доказывается явно. В самом деле, пересечение A и единичной окружности **составляет открытый сегмент, длиной не больше π** (проверьте это), а такой сегмент **всегда лежит по одну сторону от какой-то прямой, проходящей через 0.**

Теорема Хана-Банаха (продолжение)

Шаг 3: Пусть $V' \subset V$ – подпространство. Скажем, что **"V' удовлетворяет ХБ"**, если существует гиперплоскость $H' \subset V'$, не пересекающая $A \cap V'$, и содержащая $W_0 \cap V'$. Для возрастающего набора V_α подпространств в V, удовлетворяющих ХБ, **их объединение тоже удовлетворяет ХБ (берем объединение всех H_α, оно не пересекает A и содержит $\bigcup_\alpha(V_\alpha \cap W_0)$).**

Шаг 4: Замыкание подпространства, удовлетворяющего ХБ, тоже удовлетворяет ХБ **(проверьте это)**.

Шаг 5: Пусть $R' \subset R$, $R \subset V$ – замкнутое подпространство коразмерности 1. Предположим, что R' удовлетворяет ХБ. Тогда в R' есть гиперплоскость H', не пересекающая $A \cap R'$, и содержащая $W_0 \cap R'$. Проекция $\pi: R \to R/H'$ переводит A в открытый конус в $\mathbb{R}^2$, не содержащий 0 **(проверьте это)**. Если $\pi(W_0 \cap R)$ имеет коразмерность 1 в R/H', возьмем $H^\circ := \pi(W_0 \cap R)$. Если $\pi(W_0 \cap R) = 0$, применив шаг 2, мы найдем гиперплоскость H° коразмерности 1 в R/H', не пересекающую $\pi(A)$. Тогда $\pi^{-1}(H^\circ)$ не пересекает A и содержит $W_0 \cap R$, то **есть R удовлетворяет ХБ.**

Теорема Хана-Банаха (окончание)

Шаг 5: Пусть $R' \subset R$, $R \subset V$ – замкнутое подпространство коразмерности 1. Предположим, что R' удовлетворяет ХБ. Тогда в R' есть гиперплоскость H', не пересекающая $A \cap R'$, и содержащая $W_0 \cap R'$. Проекция $\pi : \ R \to R/H'$ переводит A в открытый конус в $\mathbb{R}^2$, не содержащий 0 **(проверьте это)**. Если $\pi(W_0)$ имеет коразмерность 1 в R/H', возьмем $H^\circ := \pi(W_0)$. Если $\pi(W_0) = 0$, применив шаг 2, мы найдем гиперплоскость H° коразмерности 1 в R/H', не пересекающую $\pi(A)$. Тогда $\pi^{-1}(H^\circ)$ не пересекает A и содержит W_0, то **есть R удовлетворяет ХБ.**

Шаг 6: Применив лемму Цорна, мы найдем максимальное подпространство $R' \subset V$, удовлетворяющее ХБ. В силу шага 4, R' замкнуто. Если есть вектор $v \notin R'$, положим $R := R' + \mathbb{R} \cdot v$. В силу шага 5, ХБ верно для R, значит, R' не максимально. **Мы доказали, что $R' = V$, значит, ХБ выполнено в V.** ■

Кэлеровы многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Строго положительная (1,1)-форма** — форма, лежащая во внутренности положительного конуса.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Многообразие называется кэлеровым, если на нем существует строго положительная, замкнутая форма.** Это одно из определений.

ЗАМЕЧАНИЕ: Иначе говоря, **кэлеровость равносильна тому, что открытый конус A строго положительных форм пересекается с линейным пространством W замкнутых форм.**

Замкнутые потоки (повторение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Если поток θ, заданный на компактном многообразии, зануляется на замкнутых формах, то он точен.

Доказательство. Шаг 1: Действительно,

$$0 = \int_M \theta \wedge d\alpha = (-1)^{\deg \theta} \int_M d\theta \wedge \alpha,$$

значит, $d\theta$ **зануляется на любой тест-форме, значит, он равен нулю.**

Шаг 2: Класс когомологий θ равен нулю, потому что **для ненулевого класса когомологий существует замкнутая форма α с $\int_M \theta \wedge \alpha \neq 0$** (в силу двойственности Пуанкаре). ■

Потоки, зануляющиеся на замкнутых (1,1)-формах (повторение)

ЛЕММА: Пусть M – компактное комплексное n-мерное многообразие, а θ – $(n-1, n-1)$-поток, который зануляется на замкнутых $(1,1)$-формах. **Тогда θ – $(n-1, n-1)$-часть точного потока $\tilde{\theta}$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть V – пространство 2-форм, с топологией Фреше. Пространство (1,1)-форм замкнуто в V, пространство замкнутых форм тоже замкнуто. Пусть W – подпространство в V, порожденное замкнутыми формами и $(1,1)$-формами. Оно замкнуто. Определим функционал θ_1 на W так: на $(1,1)$-формах $\theta_1 = \theta$, на замкнутых формах $\theta_1 = 0$.

Шаг 2: Применим теорему Хана-Банаха к W, построенному выше, и пустому A. Тогда θ_1 продолжается до функционала $\tilde{\theta}$ на V. **По построению $\tilde{\theta}$ зануляется на замкнутых 2-формах, значит, в силу предыдущего утверждения он точен.** ■

Теорема Харви-Лоусона (повторение)

ТЕОРЕМА: (Харви-Лоусон, 1983)
Пусть M – компактное комплексное многообразие. Тогда следующие утверждения равносильны. (а) M не допускает кэлеровой метрики. (б) На M существует ненулевой положительный $(n-1,n-1)$-поток, который является $(n-1,n-1)$-частью точного.

Доказательство. Шаг 1: Пусть V - пространство вещественных $(1,1)$-форм на M, с топологией пространства Фреше, $A \subset V$ – строго положительные $(1,1)$-формы, а $W \subset V$ – пространство замкнутых $(1,1)$-форм. Если M не кэлерово, то $A \cap W = \emptyset$. По теореме Хана-Банаха **существует непрерывный функционал θ на V, зануляющийся на W, и положительный на A.**

Шаг 2: Непрерывные функционалы на V – это $(n-1,n-1)$-потоки. **В силу предыдущей леммы, θ есть $(n-1,n-1)$-часть точного потока.**

Шаг 3: Если положительный поток θ на кэлеровом многообразии (M,ω) является $(n-1,n-1)$-частью точного потока, то $\int_M \theta \wedge \omega = 0$, но в этом случае $\theta = 0$ **(проверьте это).** ■

Прямой образ потока

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $M \xrightarrow{\pi} X$ - голоморфное отображение комплексных многообразий с компактными слоями, $\nu := \dim_{\mathbb{C}} M - \dim_{\mathbb{C}} X$, а $\eta \in D^{p,q}(M)$ – поток. Определим **прямой образ потока** $\pi_*\eta \in D^{p-\nu,q-\nu}(X)$ формулой $\int_X \pi_*\eta \wedge \alpha := \int_M \eta \wedge \pi^*\alpha$, где $\alpha \in \Lambda^{n-p,n-q}(X)$ есть тест-форма, $n = \dim_{\mathbb{C}} M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Обратный образ** потока, вообще говоря, не определен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для гладкого отображения с компактными слоями, **прямой образ гладкой формы - гладкая форма (проверьте)**. В такой ситуации определен **обратный образ потока,** по формуле $\int_M \pi^*\eta \wedge \alpha := \int_X \eta \wedge \pi_*\alpha$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Отображение прямого образа **переводит положительные потоки в положительные, и коммутирует с дифференциалом де Рама (проверьте это)**.

Положительные потоки на многообразии, расслоенном на кривые

ТЕОРЕМА 1: Пусть $M \stackrel{\pi}{\to} X$ - гладкое голоморфное отображение комплексных многообразий, с компактными слоями размерности 1, а $\eta \in D^{n-1,n-1}(M)$ – поток, такой, что $\pi_*\eta = 0$. **Тогда существует обобщенная функция ψ на M такая, что $\eta = \psi\pi^* \mathsf{Vol}_X$, где Vol_X – форма объема на X.**

Доказательство. Шаг 1: В силу определения для любой $(1,1)$-формы α на X, имеем $\int_M \eta\wedge\pi^*\alpha = 0$. Для положительного α, мера $\eta\wedge\pi^*\alpha$ положительна, значит, $\int_M \eta\wedge\pi^*\alpha = 0$ влечет $\eta\wedge\pi^*\alpha = 0$, для любой положительной (1,1)-формы α на X. Поскольку любая форма может быть представлена в виде линейной комбинации положительных, **из этого следует, что $\eta\wedge\pi^*\alpha = 0$ для любой $\alpha \in \Lambda^{1,1}(X)$.**

Шаг 2: Пусть $x \in M$ а $z_1, ..., z_{n-1}, z$ система координат в окрестности x, где $z_1, ..., z_{n-1}$ постоянны вдоль слоев π. Запишем $\eta := \sum \psi_\alpha dz_\alpha$, где dz_α – мономы от dz_i, dz, а ψ_α обобщенные функции. Мономы dz_α получены из $dz_1\wedge d\bar z_1\wedge dz_2\wedge d\bar z_2\wedge ...\wedge dz_{n-1}\wedge d\bar z_{n-1}\wedge dz\wedge d\bar z$ выкидыванием $dz_i\wedge d\bar z_i$ либо $dz\wedge d\bar z$.

Шаг 3: В силу шага 1, для всех i, $\eta\wedge dz_i\wedge d\bar z_i = 0$, то есть $\eta = \psi dz_1\wedge d\bar z_1\wedge dz_2\wedge d\bar z_2\wedge ...\wedge dz_{n-1}\wedge d\bar z_{n-1}$. ■

Отображения с одномерными слоями

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – многообразие, Vol_M – невырожденная форма объема. Тогда **существует биективное соответствие между неотрицательными обобщенными функциями и мерами,** $\psi \to \psi \operatorname{Vol}_M$.

УПРАЖНЕНИЕ 1: Пусть $M \xrightarrow{\pi} X$ - гладкое голоморфное отображение комплексных многообразий, $x \in X$, а δ – дельта-функция в x. **Докажите, что $\pi^*\delta_x \operatorname{Vol}_X$ есть поток интегрирования по слою $\pi^{-1}(x)$.**

ТЕОРЕМА: Пусть $M \xrightarrow{\pi} X$ - гладкое голоморфное отображение комплексных многообразий с одномерными слоями, X кэлерово, а M некэлерово. **Тогда любой слой π гомологичен $(n-1, n-1)$-части точного потока.**

Доказательство. Шаг 1: По теореме Харви-Лоусона, **найдется точный поток $\tilde{\theta}$ с положительной $(n-1, n-1)$-частью θ.**

Шаг 2: На кэлеровом $n-1$-многообразии не может быть точного потока с положительной $(n-2, n-2)$-частью. **Поэтому $\pi_*\theta = 0$.**

Шаг 3: В силу Теоремы 1, $\theta = \psi\pi^* \operatorname{Vol}_X$, для какой-то неотрицательной обобщенной функции (то есть меры) ψ на M.

Отображения с одномерными слоями (продолжение)

Шаг 3: В силу Теоремы 1, $\theta = \psi\pi^* \operatorname{Vol}_X$, для какой-то неотрицательной обобщенной функции (то есть меры) ψ на M.

Шаг 4: Поскольку ψ неотрицательна, это мера. Значит, вне какого-то подмножества меры нуль в X, **ограничение $\psi|_{\pi}{}^{-1}(x)$ корректно определено** (теорема Фубини).

Шаг 5: $dd^c\tilde\theta = dd^c\theta = 0$, то есть $dd^c\psi \wedge \pi^* \operatorname{Vol}_X = 0$. Мы получили, что $dd^c\psi|_C = 0$ для каждой кривой C, на которую ограничение $\psi|_C$ определено. Значит, **ψ постоянно вдоль слоев π, и $\theta = \pi^*\psi_0 \operatorname{Vol}_X$, для какой-то обобщенной функции ψ_0.**

Шаг 6: На X, поток $\psi_0 \operatorname{Vol}_X$ гомологичен любому $(n-1, n-1)$-потоку ν с $\int_X \psi_0 \operatorname{Vol}_X = \int_X \nu$. Возьмем в качестве ν поток $\delta_x \operatorname{Vol}_X$, где δ_x есть δ-функция, сосредоточенная в x. Тогда $\pi^*\delta_x \operatorname{Vol}_X$ гомологичен θ. **Но этот поток гомологичен потоку интегрирования вдоль слоя, в силу Упражнения 1.** $\blacksquare$

Некэлеровы поверхности, расслоенные над кривой

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M - некэлерова поверхность, голоморфно расслоенная над кривой: $M \stackrel{\pi}{\to} X$ **Тогда общий слой π гомологичен нулю.**

Доказательство. Шаг 1: Разрешив особенности, можно считать, что π гладко. В силу Упражнения 1, **фундаментальный класс общего слоя π пропорционален $\omega_0 := \pi^* \operatorname{Vol}_X$, где Vol_X – кэлерова форма на X.**

Шаг 2: Из доказанной выше теоремы следует, что ω_0 **есть (1,1)-часть точного потока.**

Шаг 3: Поэтому класс когомологий ω_0 в $H^1(\Omega^1 M)$ равен нулю. Значит, $\omega_0 = (d\theta)^{1,1}$**, для гладкой формы θ.**

Шаг 4: Заменив θ на $\operatorname{Re}\theta$ и воспользовавшись $\operatorname{Re}\omega_0 = \omega_0$, мы можем считать, что θ **вещественно и $\omega_0 = (d\theta)^{1,1}$.**

Шаг 5: Тогда $(d\theta)^{2,0} = \overline{(d\theta)^{0,2}}$, что дает

$$0 = \int_M d\theta \wedge d\theta = 2 \int_M (d\theta)^{2,0} \wedge (d\theta)^{0,2} = \int_M \left| (d\theta)^{2,0} \right|^2,$$

Мы получили $(d\theta)^{2,0} = 0$, значит $\omega_0 = d\theta$. ■