Комплексные поверхности,

лекция 13: $\partial\bar\partial$-лемма для поверхностей с четным b_1

Миша Вербицкий

НМУ/матфак ВШЭ, Москва

14 мая 2012

Метрики Годушона (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ω - эрмитова форма комплексного эрмитова многообразия M, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. Метрика на M называется **метрикой Годушона**, если $\partial\overline{\partial}(\omega^{n-1}) = 0$.

ТЕОРЕМА: (П. Годушон, 1977) Пусть (M, ω) – компактное, комплексное, эрмитово n-мерное многообразие. Тогда **существует единственная** (с точностью до постоянного множителя) **положительная функция $\psi \in C^\infty M$ такая, что $\psi\omega$ - метрика Годушона.**

Доказательство теоремы Годушона следует из сильного принципа максимума и теоремы об индексе для эллиптических операторов.

Автодуальные формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть η – 2-форма на 4-мерном ориентированном римановом многообразии M. Она называется **автодуальной**, если $*\eta = \eta$, и **антиавтодуальной**, если $*\eta = -\eta$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Автодуальность равносильна условию $\eta\wedge\eta = |\eta|^2 \operatorname{Vol}$, где Vol - форма риманова обьема, а $|\eta|$ евклидова норма на 2-формах, индуцированная римановой структурой. Антиавтодуальность равносильна $\eta \wedge \eta = -|\eta|^2 \operatorname{Vol}$ **(докажите это)**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Замена ориентации на M **переставляет автодуальные и антиавтодуальные формы.** Из разложения

$$\Lambda^2 M = \Lambda^+ M \oplus \Lambda^- M,$$

получаем $\dim \Lambda^+ M = \dim \Lambda^- M = 3$, где $\Lambda^+ M$, $\Lambda^- M$ – расслоение автодуальных и антиавтодуальных форм.

Примитивные формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,ω) - комплексное эрмитово многообразие, $L_\omega:\ \Lambda^{p,q}(M)\to\Lambda^{p+1,q+1}(M)$ оператор внешнего умножения на ω, а $\Lambda_\omega = *L_\omega*$ – сопряженный оператор. Форма η называется **примитивной**, если $p+q\leqslant \dim_{\mathbb C} M$, а $\Lambda_\omega(\eta)=0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – комплексная эрмитова поверхность, $\xi_1,\xi_2\in \Lambda^{1,0}(M)$ - ортонормированный базис. Тогда

$$\Lambda_\omega(\xi_1\wedge\overline{\xi}_1)=1,\quad \Lambda_\omega(\xi_2\wedge\overline{\xi}_2)=1, \Lambda_\omega(\xi_1\wedge\overline{\xi}_2)=0,\quad \Lambda_\omega(\xi_2\wedge\overline{\xi}_1)=0,$$

Получаем, что **расслоение вещественных примитивных $(1,1)$-форм трехмерно, и порождено формами**

$$\sqrt{-1}\,(\xi_1\wedge\overline{\xi}_1-\xi_2\wedge\overline{\xi}_2,)\quad \xi_1\wedge\overline{\xi}_2-\sqrt{-1}\,\xi_2\wedge\overline{\xi}_1,\quad \xi_2\wedge\overline{\xi}_1-\sqrt{-1}\,\xi_1\wedge\overline{\xi}_2.$$

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M - комплексная эрмитова поверхность. **2-форма $\eta\in\Lambda^2(M)$ анти-автодуальна тогда и только тогда, когда она имеет тип $(1,1)$ и примитивна.** ■

Метрики Годушона и когомологии $H^1(\mathcal{O}_M)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,ω) – компактное комплексное n-многообразие с метрикой Годушона, а $\alpha\in\Lambda^{0,1}(M)$ – $\overline{\partial}$-замкнутая 1-форма. Определим **степень**

$$\deg\alpha := \frac{\int_M \partial\alpha\wedge\omega^{n-1}}{\int_M\omega^n}$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Из формулы Стокса и $\partial\overline{\partial}\omega^{n-1}=0$ следует, что $\int_M\partial\overline{\partial}f\wedge\omega^{n-1}=0$ для любой функции $f\in C^\infty M$ **(докажите это).** Поэтому $\deg\alpha=0$, если α $\overline{\partial}$-точна. **Мы получили, что $\deg$ задает функционал на группе когомологий $\overline{\partial}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Резольвента $\mathcal{O}_M \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,2}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}}$ ... пучка $\mathcal{O}_M$ голоморфных функций **ациклична**, значит, **когомологии $\overline{\partial}$ суть когомологии $\mathcal{O}_M$, и $\deg$ задает функционал на $H^1(\mathcal{O}_M)$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение $H^1(\mathcal{O}_M)\xrightarrow{\deg}\mathbb{C}$ называется **степенью** класса когомологий.

Метрики Годушона и когомологии $H^1(\mathcal{O}_M)$ (продолжение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Напомню, что $(0,p)$-форма η называется **антиголоморфной**, если $\partial\overline{\eta} = 0$. Степень замкнутой, антиголоморфной (0,1)-формы равна нулю. **Согласно теории Ходжа, на кэлеровом многообразии каждый класс когомологий $H^1(\mathcal{O}_M)$ может быть представлен антиголоморфной, замкнутой формой.** Поэтому для кэлерова многообразия отображение $H^1(\mathcal{O}_M) \xrightarrow{\deg} \mathbb{C}$ равно нулю.

Эллиптические операторы, зануляющиеся на константах

ТЕОРЕМА: Пусть D – эллиптический оператор второго порядка на компактном многообразии, зануляющийся на константах. **Тогда** $\operatorname{coker} D$ **одномерен.**

Доказательство. Шаг 1: На M существует метрика такая, что символ D есть символ оператора Лапласа Δ **(докажите это)**.

Шаг 2: Поскольку оператор Лапласа автодуален, $\dim\ker\Delta = \dim\operatorname{coker}\Delta$ **(докажите это)**.

Шаг 3: Значит, индекс Δ равен нулю. **По теореме об индексе, индекс зависит только от символа,** значит $\operatorname{ind} D = 0$.

Шаг 4: В силу принципа максимума, любая функция $f \in \ker D$ постоянна. **Поэтому** $\ker D$ **одномерный.**

Шаг 5: Из шага 3 следует, что $\operatorname{ind} D = 0$, **значит** $\operatorname{coker} D$ **тоже одномерный.** ■

Когомологии $H^1(\mathcal{O}_M)$ и эллиптические операторы

Теорема 1: Пусть (M,ω) – компактное комплексное n-многообразие с метрикой Годушона. **Для любого класса когомологий $[\alpha] \in H^1(\mathcal{O}_M)$, существует единственный представитель $\alpha \in \Lambda^{0,1}(M)$ такой, что**

$$\partial\alpha \wedge \omega^{n-1} = \deg[\alpha]\omega^n. \qquad (*)$$

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\alpha_0 \in \Lambda^{0,1}(M)$ – представитель $[\alpha]$. **Решения (*) это формы вида $\alpha_0 + \bar\partial f$, удовлетворяющие**

$$\partial\bar\partial f \wedge \omega^{n-1} = \deg[\alpha]\omega^n - \partial\alpha_0 \wedge \omega^{n-1}. \qquad (**)$$

Шаг 2: Отображение $D(f) := \partial\bar\partial f \wedge \omega^{n-1}$ из функций в (n,n)-формы – эллиптический оператор второго порядка, зануляющийся на константах **(проверьте это).** В силу предыдущей теоремы, **коядро D одномерно.**

Шаг 3: Для каждой функции $f \in C^\infty M$, имеем $\int \partial\bar\partial f \wedge \omega^{n-1} = 0$, потому что $\partial\bar\partial(\wedge\omega^{n-1}) = 0$. Поскольку коядро D одномерно, **его образ есть множество всех (n,n)-форм, удовлетворяющих $\int_M \alpha = 0$.**

Шаг 4: Чтобы решить (**), осталось убедиться, что

$$\int_M \left(\deg[\alpha]\omega^n - \partial\alpha_0 \wedge \omega^{n-1}\right) = 0$$

(убедитесь). ■

Антиголоморфные (0,1)-формы и классы когомологий

СЛЕДСТВИЕ: Пусть (M,ω) – комплексная поверхность с метрикой Годушона, а $[\alpha]\in H^1(\mathcal{O}_M)$ – класс когомологий с $\deg[\alpha]=0$. **Тогда $[\alpha]$ представляется антиголоморфной формой.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\alpha\in\Lambda^{0,1}(M)$ - представитель $[\alpha]$, который удовлетворяет $\partial\alpha\wedge\omega=0$, $\overline{\partial}\alpha=0$ **(он существует в силу предыдущего утверждения).**

Шаг 2: Тогда $\partial\alpha=d\alpha$ – примитивная (1,1)-форма. Поскольку примитивные (1,1)-формы антиавтодуальны, имеем

$$0=\int_M d\alpha\wedge d\overline{\alpha}=-\int_M|\operatorname{Re}(d\alpha)|^2\operatorname{Vol}$$

значит, $d\alpha=0$ всюду на M. ∎

СЛЕДСТВИЕ: Для любой поверхности, фактор $H^1(\mathcal{O}_M)/H^1_a(\mathcal{O}_M)$ когомологий по пространству $H^1_a(\mathcal{O}_M)$ антиголоморфных замкнутых форм не более чем одномерный.

Антиголоморфные (0,1)-формы на поверхности

ЛЕММА: На поверхности, голоморфные (и антиголоморфные) 1-формы **обязательно замкнуты.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим голоморфную 1-форму $\rho \in \Omega^1 M$. Тогда $d\rho$ это точная $(2,0)$-форма. Но $\int_M d\rho \wedge d\overline{\rho} = \int_M \operatorname{Vol} |d\rho|^2 = 0$, значит, $d\rho = 0$ всюду на M. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ:
Ненулевая линейная комбинация антиголоморфных и голоморфных 1-форм на компактной поверхности **не может быть точна.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть v – такая линейная комбинация. Тогда $I(v)$ тоже линейная комбинация антиголоморфных и голоморфных 1-форм. **В силу предыдущей леммы, $I(v)$ замкнуто.**

Шаг 2: Если v точно, $v = d\varphi$, мы имеем $0 = dIv = d^c d\varphi$, где $d^c = -I \circ d \circ I$.

Шаг 3: Эллиптический оператор $\varphi \to d^c d\varphi \wedge \omega$ зануляется на константах **проверьте эллиптичность**, и **в силу принципа максимума его ядро состоит из констант.** Значит, $\varphi = const$. ■

Естественное вложение $H^1(M) \to H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)}$

ЗАМЕЧАНИЕ: (А) Из предыдущего утверждения следует, что **существует вложение**

$$H^0(\Omega^1 M) \oplus \overline{H^0(\Omega^1 M)} \hookrightarrow H^1(M)$$

где $\overline{H^0(\Omega^1 M)}$ обозначает пространство антиголоморфных форм.

УТВЕРЖДЕНИЕ: (Б) Для любого компактного комплексного многообразия, **определено естественное вложение**

$$H^1(M) \hookrightarrow H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)},$$

переводящее v в $[v^{0,1}] \in H^1(\mathcal{O}_M)$, $v^{1,0} \in \overline{H^1(\mathcal{O}_M)}$, где $\overline{H^1(\mathcal{O}_M)}$ обозначает векторное пространство с сопряженной комплексной структурой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для каждой замкнутой формы $v \in \Lambda^1(M)$, (1,0) и (0,1)-части v замкнуты относительно ∂ и $\overline{\partial}$, что дает классы когомологий $[v^{0,1}] \in H^1(\mathcal{O}_M)$ и $[\overline{v^{1,0}}] \in H^1(\mathcal{O}_M)$. Если эти классы равны нулю, то $v = \overline{\partial}\varphi_1 + \partial\varphi_2$. Из $dv = 0$ получаем

$$0 = d(\overline{\partial}\varphi_1 + \partial\varphi_2) = \partial\overline{\partial}\varphi_1 + \overline{\partial}\partial\varphi_2 = \partial\overline{\partial}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Оператор $f \to \partial\overline{\partial} f \wedge \omega^{n-1}$ эллиптический **(проверьте)** и зануляется на констатах; поэтому $\partial\overline{\partial}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ влечет $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$. ■

Комплексные поверхности с нечетным b_1

ТЕОРЕМА: Пусть M - компактная комплексная поверхность. Тогда **$b_1(M)$ четно, если $H^1(\mathcal{O}_M)$ порождено антиголоморфными 1-формами, и нечетно в противном случае.**

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим вложения

$$H^0(\Omega^1 M)\oplus \overline{H^0(\Omega^1 M)} \hookrightarrow H^1(M,\mathbb{C}) \stackrel{j}{\hookrightarrow} H^1(\mathcal{O}_M)\oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)}.$$

(утверждения А и Б). Если $H^1(\mathcal{O}_M)$ порождено антиголоморфными 1-формами, все эти вложения – изоморфизмы.

Шаг 2: Напомню, что **степенью** $\bar\partial$-замкнутой (0,1)-формы η на многообразии с метрикой Годушона называется число $\int_M \partial\eta\wedge\omega^{n-1}$. **Любая $\bar\partial$-замкнутая (0,1)-форма нулевой степени когомологична антиголоморфной, как доказано в Теореме 1.**

Шаг 3: Следовательно, если $\deg: H^1(\mathcal{O}_M)\to\mathbb{C}$ равен нулю, то вложение $H^0(\Omega^1 M)\to\overline{H^1(\mathcal{O}_M)}$, построенное на шаге 1, является изоморфизмом. В противном случае, последовательность

$$0\to H^0(\Omega^1 M)\to \overline{H^1(\mathcal{O}_M)} \xrightarrow{\deg} \mathbb{C}\to 0$$

точная.

Комплексные поверхности с нечетным b_1 (продолжение)

Шаг 4: Пусть $[\alpha],[\beta]\in H^1(\mathcal{O}_M)$, $\deg[\alpha]=\overline{\deg[\beta]}$. Выберем представители $\alpha,\beta\in\Lambda^{0,1}(M)$ такие, что $d\alpha=\deg[\alpha]\omega$, $d\beta=\deg[\beta]\omega$ (Теорема 1). Тогда $d(\alpha-\beta)=0$. Мы получили, что **образ вложения $H^1(M,\mathbb{C})\stackrel{j}{\hookrightarrow}H^1(\mathcal{O}_M)\oplus\overline{H^1(\mathcal{O}_M)}$ лежит в ядре $\deg$.**

Шаг 5: Каждый класс $[\alpha]\in H^1(\mathcal{O}_M)$ нулевой степени представляется антиголоморфной (следовательно, замкнутой) формой. Значит, **образ j – в точности формы степени 0.** Мы получили, что **j является изоморфизмом, либо последовательность**

$$0\to H^1(M)\stackrel{j}{\to}H^1(\mathcal{O}_M)\oplus\overline{H^1(\mathcal{O}_M)}\stackrel{\deg}{\to}\mathbb{C}\to 0.$$

точна.

Шаг 6: В первом случае, $H^1(M)$ четномерно, во втором нечетномерно, ■

$\partial\overline{\partial}$-лемма для поверхностей с четным b_1

ЗАМЕЧАНИЕ: В доказательстве кэлеровости комплексных поверхностей с четным b_1, используется не сама четность, а следующее полезное свойство поверхностей с четным b_1.

ЛЕММА: ($\partial\overline{\partial}$-лемма для поверхностей с четным b_1). Пусть M - компактная комплексная поверхность с четным $b_1(M)$, а $\eta \in \Lambda^{1,1}(M)$ – точная (1,1)-форма. **Тогда $\eta = \partial\overline{\partial}\psi$, для какой-то функции $\psi \in C^\infty M$.**

Доказательство. Шаг 1: Имеем $\eta = d\rho$, значит, $\eta = \partial\rho^{0,1} + \overline{\partial}\rho^{1,0}$, где $\rho^{1,0}$ и $\rho^{0,1}$ - $(1,0)$ и $(0,1)$-части. Поскольку η типа $(1,1)$, имеем $\partial\rho^{1,0} = \overline{\partial}\rho^{0,1} = 0$.

Шаг 2: В силу предыдущего следствия, ∂-замкнутая (1,0)-форма является суммой голоморфной и ∂-точной, а $\overline{\partial}$-замкнутая (0,1)-форма является суммой антиголоморфной и $\overline{\partial}$-точной. Отбросив антиголоморфные и голоморфные компоненты, которые не дают вклада в $\partial\rho^{0,1} + \overline{\partial}\rho^{1,0}$, получим $\rho^{1,0} = \partial\psi$, $\rho^{0,1} = \overline{\partial}\varphi$, Следовательно

$$\eta = \partial\rho^{0,1} + \overline{\partial}\rho^{1,0} = \partial\overline{\partial}\varphi - \partial\overline{\partial}\psi.$$

■