Комплексные поверхности,

лекция 2: формула Римана-Роха

Миша Вербицкий

НМУ/матфак ВШЭ, Москва

13 февраля 2012

Классы Черна (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Классы Черна** суть классы $c_i(B) \in H^{2i}(B)$, $i = 0, 1, 2, ...$, определенные для любого векторного расслоения B на клеточном пространстве X, и удовлетворяющие следующим аксиомам.

1. $c_0(V) = 1$.

2. **функториальность:** если $f: X \to Y$ непрерывно, то $f^* c_i(B) = c_i(f^* B)$.

3. **Формула Уитни:** $c_*(B \oplus B') = c_*(B) c_*(B')$, где $c_*(B) = \sum_i c_i(B)$ **("тотальный класс Черна")**

4. Если $\mathcal{O}(i)$ – стандартное расслоение на проективном пространстве, то $c_1(\mathcal{O}(1)) = [H]$, где $[H]$ – фундаментальный класс гиперплоскости, а для всех $i > 0$, $c_i(\mathcal{O}(1)) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Характер Черна** расслоения B есть $ch_*(B) := \log(c_*(B))$. Мы считаем $ch_0(B) := \operatorname{rk}(B)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Характер Черна аддитивен** (что следует из формулы Уитни): $ch_*(B \oplus B') = ch_*(B) + ch_*(B')$. Кроме того, $ch_*(B \otimes B') = ch_*(B) \wedge ch_*(B')$ (это следует из принципа расщепления).

K-группа и характер Черна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X – алгебраическое многообразие. Обозначим за $K(X)$ группу, порожденную классами изоморфизма $[F]$ когерентных пучков F на X, и заданную соотношениями вида $[F_1] + [F_3] = [F_2]$ для каждой точной последовательности $0 \to F_1 \to F_2 \to F_3 \to 0$. Эта группа называется **K-группой Гротендика** (и еще иногда K_0).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $F_0 \to F_1 \to F_2 \to ...$ – комплекс когерентных пучков. Соответствующий класс в $K(X)$ обозначается за $[F_*] := \sum_i (-1)^i [F_i]$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если X гладко, любой пучок на X имеет конечную резольвенту из локально тривиальных пучков (докажите это). **Поэтому в качестве образующих $K(X)$ можно брать комплексы векторных расслоений, а в качестве соотношений - точные последовательности комплексов.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Определим **характер Черна** комплекса $F_0 \to F_1 \to ...$ расслоений как $\sum_i (-1)^i ch_*(F_i)$. **Характер Черна задает гомоморфизм колец $K(X) \stackrel{ch_*}{\to} H^{\mathrm{even}}(X)$** (проверьте это).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Определим **класс Черна** когерентного пучка F как $e^{ch_*([F])}$.

Эйлерова характеристика когерентного пучка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эйлерова характеристика** когерентного пучка F есть число $\chi(F) := \sum_i (-1)^i \dim H^i(F)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для любой точной последовательности пучков $0 \to F_1 \to F_2 \to F_3 \to 0$, имеем $\chi(F_2) = \chi(F_1) + \chi(F_3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: **Проверьте самостоятельно** (примените длинную точную последовательность когомологий). ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Таким образом, χ **задает гомоморфизм из** $K(X) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}$**.**

Теорема Римана-Роха-Хирцебруха

ТЕОРЕМА: (Римана-Роха-Хирцебруха) Пусть F – когерентный пучок на гладком компактном многообразии. **Тогда $\chi(F)$ зависит только от классов Черна $c_*(F)$, и выражается через них следующим образом:**

$$\chi(F) = \int_X ch_*(F) \wedge td_*(TX),$$

где $td_*(TX)$ обозначает **тотальный класс Тодда** касательного расслоения TX,

$$td_* = 1 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_1^2 + c_2}{12} + \frac{c_1 c_2}{24} + \frac{-c_1^4 + 4c_1^2 c_2 + c_1 c_3 + 3c_2^2 - c_4}{720} + ...$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Формально **класс Тодда можно определить следующим образом:** он удовлетворяет формуле Уитни $td_*(B \oplus B') = td_*(B) td_*(B')$, а для линейного расслоения L с $c_1(L) = \alpha$, имеем $td_*(L) = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}$.

Доказательство теоремы Римана-Роха для кривых

В утверждении теоремы Римана-Роха есть две части: (а) то, что $\chi(F)$ зависит только от классов Черна F и (б) явная формула. **Я докажу только явную формулу**, для нескольких частных случаев.

ТЕОРЕМА: (Риман-Рох для кривых):
Пусть F – когерентный пучок на кривой. Тогда

$$\chi(F) = c_1(F) + \operatorname{rk}(F)(1 - g).$$

Доказательство. Шаг 1: Поскольку группа $K(X)$ порождена линейными расслоениями, **достаточно проверить формулу для линейного расслоения** L. В самом деле, любой когерентный пучок имеет резольвенту из линейных расслоений степени $-d << 0$ (проверьте это). К тому же, L можно выбрать антиобильным.

Шаг 2: Пусть l – сечение L^*, а $0 \to L \to \mathcal{O}_X \to C \to 0$ – соответствующая точная последовательность. Если l выбрано достаточно общим, у него нет кратных нулей, и тогда C **– прямая сумма пучков-небоскребов** $\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x$**, сосредоточеных в этих нулях.**

Шаг 3: Осталось доказать Римана-Роха для $\mathcal{O}_X$ и для пучков-небоскребов. Для $\mathcal{O}_X$ $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - g$ по определению $g = \dim H^1(\mathcal{O}_X)$. Для пучков-небоскребов, $\chi(F) = 1 = c_1(F)$. ■

Римана-Рох-Хирцебрух для поверхностей (слабая версия)

ЗАМЕЧАНИЕ: В следующем утверждении и его доказательстве, $c_1(L)$ для линейных расслоений обозначается буквой L, а фундаментальный класс дивизора D обозначается D. Форма пересечения в $H^2(X)$ обозначается (A, B).

УТВЕРЖДЕНИЕ: (Риман-Рох-Хирцебрух для линейных расслоений на поверхности; слабая версия): Пусть L – линейное расслоение на поверхности X Тогда

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{(L - K_X, L)}{2}, \qquad (*)$$

где $K_X = \Omega^2 X$ есть каноническое расслоение.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $0 \to L_1 \to L_2 \to L_2|_D \to 0$ – точная последовательность, где L_i – линейные расслоения, а D – гладкая кривая рода g. **В силу РР для кривых, имеем** $\chi(L_1) = \chi(L_2) + (L_2, D) + (1 - g)$

Шаг 2: По формуле присоединения, $K_D = K_X|_D \otimes ND$, где ND есть нормальное расслоение. С другой стороны, $g - 1 = \deg K_D/2$. Это дает $1 - g = -(K_X + D, D)/2$.

Римана-Рох-Хирцебрух для поверхностей (продолжение)

Шаг 3: Обозначим за $\chi'(L)$ правую часть формулы (*), $\chi'(L) := \chi(\mathcal{O}_X) + (L - K_X, L)/2$. В условиях шага 1, имеем $c_1(L_2) = c_1(L_1) + D$, что дает

$$\chi'(L_2) - \chi'(L_1) = \frac{1}{2}\Big[(L_2 - K_X, L_2) - (L_2 - K_X - D, L_2 - D)\Big] = (L_2, D) - (K_X + D, D)/2.$$

Шаг 4: Сравнивая утверждения шага 2 и шага 3, получаем $\chi'(L_2) - \chi'(L_1) = \chi(L_2) - \chi(L_1)$. Значит, **РРХ для L_2 равносилен ему же для L_1.**

Шаг 5: Для каждого обильного расслоения A, $L \otimes A^{\otimes N}$ имеет гладкие сечения для $N >> 0$, что дает точную последовательность $0 \to L \to L \otimes A^{\otimes N+1} \to L \otimes A^{\otimes N+1}|_D \to 0$. Значит, **достаточно доказать (*) для расслоения $L \otimes A^{\otimes N+1}$, которое можно считать очень обильным.**

Шаг 6: Для очень обильных расслоений L, имеем $0 \to \mathcal{O}_X \to L \to L|_D \to 0$, где D – множество нулей общего сечения L. Поскольку D гладко, а (*) верна для $\mathcal{O}_X$, **получаем (*) для L.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Формула Римана-Роха-Хирцебруха для поверхностей следует из (*) и **формулы Нетера**: $\chi(\mathcal{O}_X) = (c_1(X)^2 - c_2(X))/12$.

Топология 4-мерных многообразий: теорема Фридмана

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симметричная билинейная форма η на $V := \mathbb{Z}^n$ называется **унимодулярной**, если она задает изоморфизм $V \to V^*$, **четной**, если множество всех $\eta(x,x)$ содержится в $2 \cdot \mathbb{Z}$, и **нечетной** если нет.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Если M - компактное, односвязное 4-мерное многообразие с четной формой пересечения,** то $b_2^+ - b_2^- = 0 \mod 8$, где b_2^+, b_2^- – число положительных и отрицательных собственных значений.

ТЕОРЕМА: (Фридман, 1982) **Класс гомотопии компактного односвязного 4-мерного многообразия M однозначно определяется его формой пересечения на $H^2(M,\mathbb{Z})$, которая унимодулярна.** Более того, такое M существует для любой нечетной унимодулярной формы, и для любой четной формы, удовлетворяющей $b_2^+ - b_2^- = 0 \mod 8$. Для четных форм пересечения, гомотопическая эквивалентность эквивалентна гомеоморфности. Для нечетных форм пересечения, гомотопическая эквивалентность эквивалентна гомеоморфности на 4-многообразиях, допускающих гладкую структуру.

ТЕОРЕМА: (Дональдсон, 1986) На гладком компактном односвязном многообразии с нечетной, положительно определенной формой пересечения η, **она диагонализуется в каком-то целочисленном базисе: $\eta = \sum x_i \otimes x_i$.**

Топология 4-мерных многообразий: классификация неопределенных форм

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симметричная 2-форма η называется **неопределенной**, если $\eta(x,x)<0$ и $\eta(y,y)>0$ для каких-то x и y.

ТЕОРЕМА:
(классификация унимодулярных симметричных билинейных форм):
* Пусть q – нечетная унимодулярная неопределенная форма. Тогда q **диагональна:** $q=\sum \pm x_i\otimes x_i$.
* Пусть q – четная унимодулярная неопределенная форма на V. **Тогда (V,q) разлагается в ортогональную прямую сумму** подпространств с билинейной формой, которая имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(такие пространства называются "гиперболическими"), и подпространств $E_{\pm 8}$, изоморфных решетке пересечения корней алгебры E_8:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

или такой же решетке с формой пересечения противоположного знака.

К3-поверхности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: К3-поверхность есть комплексная поверхность с $b_1 = 0$ и $c_1 = 0$,

ЗАМЕЧАНИЕ: Все поверхности с $b_1 = 0$- кэлеровы (Бухсдаль-Ламари).

Название К3 дано Андре Вейлем в честь Куммера, Кэлера, Кодаиры.

"Faichan Kangri is the 12th highest mountain on Earth."

Свойства K3-поверхностей

Пусть M – K3-поверхность.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Каноническое расслоение K_M тривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку $b_1 = 0$, а M кэлерово, имеем $h^{0,1} = H^1(\mathcal{O}_M) = 0$. Поэтому из экспоненциальной точнпй последовательности $H^1(M, \mathcal{O}_M) \to H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \xrightarrow{c_1} H^2(M, \mathbb{Z})$ получаем, что K_M **тривиально** (его класс Черна равен нулю же). ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Римана-Роха дает $\chi(\mathcal{O}_M) = 2 = \frac{c_2(M)}{12}$, значит, $c_2(M) = 24$. Поскольку $c_2(M)$ есть эйлерова характеристика M, получаем $b_2(M) = 22$.

Это дает ромб Ходжа для K3-поверхности:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 0 & & 0 & \\
1 & & 20 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & \\
 & & 1 & &
\end{array}
$$

Формула универсальных коэффициентов

ТЕОРЕМА: (формула универсальных коэффициентов): Для любого топологического пространства X и любого кольца коэффициентов A,

$$0 \to H_i(X, \mathbf{Z}) \otimes A \to H_i(X, A) \to \operatorname{Tor}(H_{i-1}(X, \mathbf{Z}), A) \to 0$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Когомологии K3 не имеют кручения.

Доказательство. Шаг 1: Если $H_1(M)$ имеет кручение, то у M есть конечное накрытие. **Такое накрытие – снова K3-поверхность,** то есть его топологическая эйлерова характеристика равна 24. Но эйлерова характеристика $e(\tilde{M})$ n-листного накрытия M равна $n \cdot e(M)$, так что $n = 1$.

Шаг 2: По формуле универсальных коэффициентов, $H_2(M, \mathbb{Z})$ **не имеет кручения.** По двойственности Пуанкаре, то же верно и в отношении $H^2(M, \mathbb{Z})$.

Шаг 3: По формуле универсальных коэффициентов, $H_3(M, \mathbb{Z})$ **не имеет кручения, значит, $H^2(M, \mathbb{Z})$ тоже.** ■