

# Комплексные поверхности,

лекция 4: связность Леви-Чивита и локальная теорема Торелли

Миша Вербицкий

НМУ/матфак ВШЭ, Москва

27 февраля 2012

## Связность на расслоении

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Пространство сечений расслоения  $B$  на гладком многообразии обозначается  $B$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Связность** на векторном расслоении  $B$  есть отображение  $B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes B$  удовлетворяющее  $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$  для любых  $b \in B$ ,  $f \in C^\infty M$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Если  $X \in TM$  – векторное поле,  $b \in B$ , то  $\nabla_X b$  – сечение  $B$ , полученное как  $\langle \nabla b, X \rangle$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Связность на  $B$  определяет связность на двойственном расслоении  $B^*$ , и наоборот, по формуле

$$\langle \nabla_X(b), \xi \rangle + \langle b, \nabla_X(\xi) \rangle = \text{Lie}_X(\langle b, \xi \rangle).$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Для любого тензорного расслоения  $\mathcal{B}_1 := B^* \otimes B^* \otimes \dots \otimes B^* \otimes B \otimes B \otimes \dots \otimes B$  **связность на  $B$  определяет связность на  $\mathcal{B}_1$  по формуле Лейбница:**

$$\nabla(b_1 \otimes b_2) = \nabla(b_1) \otimes b_2 + b_1 \otimes \nabla(b_2).$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Связности образуют **аффинное пространство** над пространством сечений расслоения  $\text{End}(B) \otimes \Lambda^1 M$ .

## Формула Картана

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Для любого  $\eta \in \Lambda^1 M$ , и  $X, Y \in TM$  имеем

$$d\eta(X, Y) = \eta([X, Y]) - \text{Lie}_X(\eta(Y)) + \text{Lie}_Y(\eta(X)).$$

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

1. Обе стороны уравнения удовлетворяют правилу Лейбница.
3. Для  $\eta = df$ , обе стороны уравнения равны нулю.
4. Дифференциал де Рама есть **единственное** отображение

$$d: \Lambda^*(M) \rightarrow \Lambda^{*+1}(M),$$

удовлетворяющее правилу Лейбница и  $d^2 = 0$ .

## Кручение

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $\nabla$  – связность на  $\Lambda^1 M$ ,

$$\Lambda^1 \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

**Кручение**  $\nabla$  задается формулой  $\text{Alt} \circ \nabla - d$ , где  $\text{Alt} : \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \rightarrow \Lambda^2 M$  – внешнее умножение. Кручение есть отображение  $T_\nabla : \Lambda^1 M \rightarrow \Lambda^2 M$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:**

$$\begin{aligned} T_\nabla(f\eta) &= \text{Alt}(f\nabla\eta + df \otimes \eta) - d(f\eta) \\ &= f \left[ \text{Alt}(\nabla\eta) - d\eta \right] + df \wedge \eta - df \wedge \eta = fT_\nabla(\eta). \end{aligned}$$

Значит,  $T_\nabla$  линейно.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Связность на римановом многообразии  $(M, g)$  называется **ортогональной**, если  $\nabla(g) = 0$ , и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

**ТЕОРЕМА:** ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

**Кручение и коммутатор векторных полей****ЗАМЕЧАНИЕ:** По формуле Картана,

$$\begin{aligned} T_{\nabla}(\eta)(X, Y) &= \nabla_X(\eta)(Y) - \nabla_Y(\eta)(X) - d\eta(X, Y) \\ &= \nabla_X(\eta)(Y) - \nabla_Y(\eta)(X) - \eta([X, Y]) - \text{Lie}_X(\eta(Y)) + \text{Lie}_Y(\eta(X)). \end{aligned}$$

С другой стороны,  $\nabla_X(\eta)(Y) = \text{Lie}_X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X(Y))$ . Сравнивая и сокращая  $\text{Lie}_X(\eta(Y))$ ,  $\text{Lie}_Y(\eta(X))$ , получаем

$$T_{\nabla}(\eta)(X, Y) = \eta\left(\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y]\right).$$

**Кручение часто определяют как отображение  $\Lambda^2 TM \rightarrow TM$  формулой  $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y]$ . Это оператор, двойственный определенному выше.**

## Аффинные пространства

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Торсор** над группой  $G$  есть пространство  $X$ , снабженное свободным и транзитивным действием  $G$ ,  $g, x \rightarrow \rho(g, x)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Морфизм** торсоров  $(X, G, \rho) \xrightarrow{\Psi} (X', G', \rho')$  есть пара  $\Psi_X : X \rightarrow X', \Psi_G : G \rightarrow G'$ , где  $\Psi_G$  есть гомоморфизм групп, и согласованное с действием  $G, G'$  на  $X, X'$  так:  $\Psi_X(\rho(g, x)) = \rho'(\Psi_G(g), \Psi_X(x))$

**ЗАМЕЧАНИЕ: Торсоры образуют категорию.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Аффинное пространство** есть торсор над линейным пространством  $V$ , которое называется его **линеаризацией**.

**ЗАМЕЧАНИЕ: Действие  $V$  на  $A$  обозначается  $a, v \rightarrow a + v$ .**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Морфизм** аффинных пространств есть морфизм соответствующих торсоров.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Это то же самое, что отображение  $A \xrightarrow{\Psi_A} A'$ , плюс гомоморфизм линеаризаций  $L \xrightarrow{\Psi_L} L'$  такой, что  $\Psi_A(a + l) = \Psi_A(a) + \Psi_L(l)$ .

## Линеаризация кручения

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Если  $\nabla_1$  и  $\nabla_2$  – связности на расслоении  $B$ , их разность есть сечение  $\text{End}(B) \otimes \Lambda^1 M$ . **Пространство  $\mathcal{A}(B)$  связностей на  $B$  есть аффинное пространство**, то есть торсор над пространством сечений  $\text{End}(B) \otimes \Lambda^1 M$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Кручение есть аффинное отображение

$$\mathcal{A}(\Lambda^1 M) \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^1 M, \Lambda^2 M) = TM \otimes \Lambda^2 M.$$

потому что  $T(\nabla + \alpha) = T(\nabla) + \text{Alt}_{12}(\alpha)$ , где  $\text{Alt}_{12} : \Lambda^1 M \otimes \text{End}(\Lambda^1 M) \rightarrow \Lambda^2 M \otimes TM$  есть альтернирование по первым двум индексам.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Линеаризованное кручение** есть отображение

$$T_{lin} = \text{Alt},$$

$$T_{lin} : \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^1(M) \otimes TM \rightarrow \Lambda^2 M \otimes TM$$

полученное как линеаризация кручения.

## Связность Леви-Чивита

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Связность на римановом многообразии  $(M, g)$  называется **ортогональной**, если  $\nabla(g) = 0$ , и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть  $B$  – расслоение с метрикой. **Тогда на  $B$  всегда существует ортогональная связность.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Выберем покрытие  $\{U_i\}$ , в котором  $B$  тривиально и допускает ортонормальный базис. На каждом  $U_i$  выберем связность  $\nabla_i$ , которая сохраняет этот базис. Пусть  $\psi_i$  – разбиение единицы, подчиненное  $\{U_i\}$ . Тогда **формула  $\nabla(b) := \sum \nabla_i(\psi_i b)$  определяет ортогональную связность** (проверьте это). ■

**ТЕОРЕМА:** ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

## Связность Леви-Чивита (существование и единственность)

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Выберем ортогональную связность  $\nabla$  на  $\Lambda^1 M$ . Пространство ортогональных связностей – аффинное, и **его линеаризация есть  $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$** .

**Шаг 1:** Отождествляя  $TM$  и  $\Lambda^1 M$ , получаем  $\mathfrak{so}(TM) = \Lambda^2 M$ .

**Шаг 2:** Линеаризованное кручение есть отображение

$$T_{lin} : \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM) = \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^2 M \xrightarrow{\text{Alt}} \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M = \Lambda^2 M \otimes TM.$$

**Это изоморфизм.** Справа и слева расслоения одной размерности, так что **достаточно доказать, что  $T_{lin}$  нет ядра**. Но если  $\eta \in \ker T_{lin}$ ,  $\eta$  **симметрична по первым двум аргументам и кососимметрична по последним**, что дает  $\eta(x, y, z) = \eta(y, x, z) = -\eta(y, z, x)$ . **То есть  $\sigma(\eta) = -\eta$ , где  $\sigma$  есть циклическая перестановка аргументов**. Поскольку  $\sigma^3 = 1$ , из этого следует, что  $\eta = 0$ .

**Шаг 3:** Мы получили, что **ортогональная связность однозначно задается своим кручением**, ибо кручение задает изоморфизм аффинных пространств.

**Шаг 4:** Возьмем  $\nabla := \nabla_0 - T_{lin}^{-1}(T_{\nabla_0})$ . Тогда  $T_{\nabla} = T_{\nabla_0} - T_{lin}(T_{lin}^{-1}(T_{\nabla_0})) = 0$ , значит  **$\nabla$  – связность без кручения**. ■

## Кривизна связности (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $\nabla : V \rightarrow V \otimes \Lambda^1 M$  – связность на гладком расслоении. Продолжим  $\nabla$  до оператора на формах

$$V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \dots$$

по формуле  $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta \otimes b + (-1)^{\tilde{n}} \eta \wedge \nabla b$ . Тогда оператор  $\nabla^2 : V \rightarrow V \otimes \Lambda^2(M)$  называется **кривизной**  $\nabla$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Из соотношения  $\nabla \circ \nabla^2 = \nabla^2 \circ \nabla$  следует **тождество Бианки**:  $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$ .

Если  $V$  – линейное расслоение, то  $\text{End } V$  тривиально, и  $\Theta_B$  есть 2-форма.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Кривизна линейного расслоения – замкнутая 2-форма.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Для любой  $2i$ -формы  $\theta$  имеем  $\nabla(\theta \wedge \eta) = d\theta \wedge \eta + \theta \wedge \nabla(\eta)$  (правило Лейбница). Тождество Бианки дает  $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$ . Следовательно,  $d\Theta_B = 0$ . ■

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Класс когомологий  $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} [\Theta_B]$  называется **первым классом Черна** линейного расслоения.

## Первый класс Черна (повторение)

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Пусть  $B$  – линейное расслоение на многообразии,  $U_\alpha$  – его покрытие, на котором  $B$  тривиализовано, а  $\varphi_{\alpha\beta}$  – функции перехода, определенные на  $U_\alpha \cap U_\beta$ . На пересечении  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$  имеем  $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}$  то есть  $B$  задает  $(C^\infty M)^*$ -значный 1-коцикл.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Классы изоморфизма расслоений взаимно однозначно соответствуют  $H^1(M, (C^\infty M)^*)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Из экспоненциальной точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_M \rightarrow C^\infty M \rightarrow (C^\infty M)^* \rightarrow 0,$$

получаем  $0 \rightarrow H^1(M, (C^\infty M)^*) \xrightarrow{c_1^{\mathbb{Z}}} H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Из определения ясно, что комплексное линейное расслоение топологически тривиально  $\Leftrightarrow c_1^{\mathbb{Z}}(B) = 0$ .

## Формула Гаусса-Бонне (повторение)

### ТЕОРЕМА: (Гаусс-Бонне)

При естественном отображении

$$H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M, \mathbb{R})$$

класс  $c_1^{\mathbb{Z}}(B) \in H^2(M, \mathbb{Z})$  **переходит в класса Черна  $c_1(B) \in H^2(M, \mathbb{R})$ , выраженный через кривизну.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $(M, I, \omega)$  –  $n$ -мерное кэлерово многообразие, а  $K(M) := \Lambda^{n,0}(M)$  – его **каноническое расслоение**, с естественной голоморфной структурой, заданной оператором  $\bar{\partial} : \Lambda^{n,0}(M) \rightarrow \Lambda^{n,1}(M) = \Lambda^{n,0}(M) \otimes \Lambda^{0,1}(M)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Первый класс Черна комплексного  $n$ -мерного многообразия** есть  $c_1(M) := c_1(\Lambda^{n,0}(M))$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Многообразие Калаби-Яу** есть компактное кэлерово многообразие с  $c_1^{\mathbb{Z}}(M) = 0$ .

## Теорема Калаби-Яу (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Кэлеров класс  $[\omega] \in H^2(M)$  кэлерова многообразия есть класс когомологий кэлеровой формы  $\omega$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Если задана вещественная  $(1, 1)$ -форма  $\eta$ , ей соответствует симметрическая 2-форма  $g_\eta(x, y) = \eta(x, Iy)$ . Это задает биекцию между вещественными  $(1, 1)$ -формами и  $I$ -инвариантными симметрическими 2-формами (проверьте это).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Зададим на каноническом расслоении эрмитову метрику по формуле

$$(\alpha, \alpha') \rightarrow \frac{\alpha \wedge \bar{\alpha}'}{\omega^n}.$$

и пусть  $\Theta_K$  – кривизна соответствующей связности Черна. **Кривизна Риччи**  $M$  есть симметрическая 2-форма  $\text{Ric}(x, y) = \Theta_K(x, Iy)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Метрика называется **риччи-плоской**, если ее кривизна Риччи равна нулю.

**ТЕОРЕМА:** (Калаби-Яу) Пусть  $(M, I)$  – многообразие Калаби-Яу. Тогда существует единственная риччи-плоская кэлерова метрика в каждом кэлеровом классе.

**К3-поверхности (повторение)**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **К3-поверхность** есть комплексная поверхность с  $b_1 = 0$  и  $c_1 = 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Все поверхности с  $b_1 = 0$  - кэлеровы (Бухсдаль-Ламари).

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Каноническое расслоение  $K_M$  тривиально.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Теорема Римана-Роха дает  $\chi(\mathcal{O}_M) = 2 = \frac{c_2(M)}{12}$ , значит,  $c_2(M) = 24$ . Поскольку  $c_2(M)$  есть эйлерова характеристика  $M$ , получаем  $b_2(M) = 22$ .

Это дает ромб Ходжа для К3-поверхности:

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & & 0 & 0 \\ 1 & & 20 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & 1 & \end{array}$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Когомологии К3 не имеют кручения.

## Гиперкэлэровы многообразия (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Гиперкомплексное многообразие** есть гладкое многообразие, снабженное комплексными структурами  $I, J, K : TM \rightarrow TM$ , которые удовлетворяют кватернионным соотношениям:  $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\text{Id}$ . **Гиперкэлэрово многообразие** есть гиперкомплексное многообразие, снабженное римановой метрикой  $g$ , которая кэлэрова по отношению к  $I, J, K$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Кэлэровость  $I$  равносильна условию  $\nabla(I) = 0$ , где  $\nabla$  – связность Леви-Чивита, а гиперкэлэровость – **условию  $\nabla(I) = \nabla(J) = \nabla(K) = 0$  плюс кватернионные соотношения.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $h \in \mathbb{H}$  – унитарный кватернион, а  $(M, I, J, K, g)$  – гиперкэлэрово многообразие. Тогда  $(M, hIh^{-1}, hJh^{-1}, hKh^{-1}, g)$  – тоже гиперкэлэрово многообразие (**проверьте это**). Многообразия  $(M, I, J, K, g)$  и  $(M, hIh^{-1}, hJh^{-1}, hKh^{-1}, g)$  называются **эквивалентными**.

## Гиперкэлэровы структуры на КЗ-поверхности (повторение)

**ТЕОРЕМА:** Пусть  $(M, I, g)$  – КЗ-поверхность, где  $g$  – кэлэрова метрика. Тогда  $M$  допускает гиперкэлэрову структуру  $(M, I, J, K, g)$  тогда и только тогда, когда  $g$  Риччи-плоская.

Выведем, для примера, из гиперкэлэровой структуры риччи-плоскость метрики.

**Шаг 1:** Пусть  $(M, I, J, K, g)$  – гиперкэлэрова метрика на КЗ. Пусть  $z_1, z_2$  – ортонормированный базис в  $\Lambda_x^{1,0} M$  такой, что  $J(z_1) = \bar{z}_2$  (поскольку  $IJ = -JI$ , оператор  $J$  отображает  $\Lambda^{1,0}$  в  $\Lambda^{0,1}$ ).

**Шаг 2:** Записав  $z_1 = e_1 + \sqrt{-1} e_2$  и  $z_2 = e_3 + \sqrt{-1} e_4$ , получаем  $I(e_1) = e_2, I(e_2) = -e_1$ . Аналогично,  $J(e_1) = e_3, J(e_2) = e_4$  и т.д. Словом,  $I, J, K$  действуют на векторах  $\pm e_i$  перестановками (допишите это действие самостоятельно).

**Шаг 3:** Рассмотрим кэлэровы формы, связанные с  $I, J, K$ :  $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ . Они очень просто записываются в этом базисе:  $\omega_I = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ ,  $\omega_J = e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$ ,  $\omega_K = e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3$ . Это дает  $\omega_J + \sqrt{-1} \omega_K = z_1 \wedge z_2$ . Мы получили сечение канонического расслоения. Поскольку  $\nabla \Omega = 0$ , это сечение имеет постоянную длину, голоморфно, и метрика  $g$  риччи-плоская. ■

## Гиперкэлеровы структуры на КЗ-поверхности: существование и единственность

**ТЕОРЕМА:** Пусть  $(M, I)$  – КЗ-поверхность,  $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$  ее кэлеров класс,  $\Omega$  – голоморфная симплектическая форма. Предположим, что  $\text{Re } \Omega^2 = [\omega]^2$ . Тогда **на  $(M, I)$  существует и единственна гиперкэлерова структура, такая, что  $[\omega_I] = [\omega]$ ,  $\omega_J = \text{Re } \Omega$ ,  $\omega_K = \text{Im } \Omega$ .**

**Доказательство. Шаг 1:** Выберем риччи-плоскую метрику  $g$  в том же кэлеровом классе. Она существует и единственна (Калаби-Яу). **Гиперкэлерова метрика должна быть риччи-плоской**, что доказывает единственность такой метрики.

**Шаг 2:** Рассмотрим  $\omega_I, \omega_J, \omega_K$  как гомоморфизмы из  $TM$  в  $T^*M$ . Тогда  $\omega_I \circ \omega_J^{-1} = K$ ,  $\omega_J \circ \omega_K^{-1} = I$ ,  $\omega_K \circ \omega_I^{-1} = J$  (проверьте это). Значит, **гиперкэлерова структура единственным образом определяется тремя симплектическими формами**. Теперь, единственность гиперкэлеровой структуры на  $M$  следует из шага 1.

**Шаг 3:** Запишем  $\omega_J = \text{Re } \Omega$ ,  $\omega_K = \text{Im } \Omega$ , и выразим  $I, J, K$  через эти операторы, как указано в шаге 2. Кватернионные соотношения следуют из приведенного выше вычисления. Кэлеровость  $I, J, K$  очевидна, потому что **эти операторы параллельны**. ■

## Отображение периодов для гиперкэлеровых структур

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Для гиперкэлеровой структуры на поверхности,  $\int_M \omega_I \wedge \omega_J = \int \omega_I \wedge \omega_K = \int \omega_J \wedge \omega_K = 0$ ,  $\int_M \omega_I^2 = \int_M \omega_J^2 = \int_M \omega_K^2$  (**проверьте это**). Назовем базис, удовлетворяющий этим условиям, **конформно ортонормальным**.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Группа изотопий**  $\text{Diff}_0(M)$  многообразия  $M$  есть связная компонента группы диффеоморфизмов  $M$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Пространство Тейхмюллера**  $\text{Teich}_{hk}(M)$  гиперкэлеровых структур есть фактор пространства всех гиперкэлеровых структур на  $M$  по  $\text{Diff}_0(M)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Обозначим за  $\text{St}_3^c(H^2(M, \mathbb{R}))$  пространство конформно ортонормированных троек классов  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in H^2(M, \mathbb{R})$ . **Отображение периодов**  $\text{Teich}_{hk}(M) \xrightarrow{\text{Per}} \text{St}_3^c(H^2(M, \mathbb{R}))$  переводит гиперкэлерову структуру  $I, J, K, g$  в тройку  $\omega_I, \omega_J, \omega_K \in \text{St}_3^c(H^2(M, \mathbb{R}))$

Сейчас будет доказана такая теорема.

**ТЕОРЕМА:** Пусть  $M$  - КЗ-поверхность. Тогда **образ**  $\text{Teich}_{hk}(M) \xrightarrow{\text{Per}} \text{St}_3^c(H^2(M, \mathbb{R}))$  **открыт в**  $\text{St}_3^c(H^2(M, \mathbb{R}))$ .

## Деформации кэлеровых структур

**ЗАМЕЧАНИЕ:** На любом комплексном многообразии, форма  $\omega$  кэлерова, если она типа  $(1, 1)$ , замкнута, и удовлетворяет  $\omega(x, Ix) > 0$  для всех ненулевых  $x \in T_x M$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть  $(M, I, \omega)$  – компактное кэлерово многообразие, а  $\text{Kah}(M) \subset H^{1,1}(M)$  – кэлеров конус (множество кэлеровых классов). Введем на  $H^2(M)$  евклидову метрику  $E$ . Тогда **существует  $\varepsilon_g > 0$  такое, что  $\varepsilon$ -шар  $B := B_{E, \varepsilon_g}([\omega])$  с центром в  $\omega$  содержится в  $\text{Kah}(M)$** . Более того,  $\varepsilon_g$  непрерывно зависит от  $g$ ,  $I$  и их производных.

**Доказательство. Шаг 1:** Рассмотрим следующую функцию на  $H^{1,1}(M)$ : для каждого класса когомологий  $[\eta]$  выбирается гармоничный представитель  $\eta_h$ . Обозначим за  $S([\eta])$  супремум

$$S([\eta]) := \sup_M \frac{|\eta_h(x, Ix)|}{\omega(x, Ix)}.$$

Пусть  $C := \sup_{[\eta] \in B} S([\eta])$ , где  $B$  есть единичный шар в  $(H^{1,1}(M), E)$ . Тогда **все собственные значения гармонических представителей всех классов из  $B$  ограничены  $C$** .

**Шаг 2:** Значит, для любого  $\eta \in B$ , все собственные значения  $C\omega + \eta_h$  положительны, и **эта форма кэлерова**.

## Деформации кэлеровых структур (продолжение)

**Шаг 2:** Значит, для любого  $\eta \in B$ , все собственные значения  $C\omega + \eta_h$  положительны, и **эта форма кэлерова**.

**Шаг 3:** Значит, для любого  $\eta$  в шаре радиуса  $\leq 1/C$  с центром в  $[\omega]$ , форма  $\eta_h + \omega$  кэлерова. **Это доказывает открытость кэлерова конуса в  $H^{1,1}(M, \mathbb{R})$ .**

**Шаг 4:** В качестве  $\varepsilon_g$  можно выбрать  $\frac{1}{C}$ , а  $C$  непрерывно зависит от  $g$  в силу свойств гармонической проекции. ■

## Образ отображения периодов для гиперкэлеровых структур

**ТЕОРЕМА:** Пусть  $M$  - КЗ-поверхность. Тогда образ  $\text{Teich}_{hk}(M) \xrightarrow{\text{Per}}$   $\text{St}_3^c(H^2(M, \mathbb{R}))$  открыт в  $\text{St}_3^c(H^2(M, \mathbb{R}))$ .

**Доказательство. Шаг 1:** Рассмотрим ортогональное дополнение  $\langle \omega_J, \omega_K \rangle^\perp \subset H^2(M, \mathbb{R})$ . Тогда

$$\langle \omega_J, \omega_K \rangle^\perp = H^{1,1}(M, I).$$

В самом деле,  $\int \eta \wedge \Omega = 0$  для любой  $(1,1)$ -формы  $\eta$  (а почему?), а  $\dim \langle \omega_J, \omega_K \rangle^\perp = \dim h^{1,1}(M)$  (проверьте).

**Шаг 2:** Каждый кэлеров класс  $[\omega] \in H^{1,1}(M, I)$ , удовлетворяющий

$$\int_M [\omega]^2 = \int_M \text{Re} \Omega^2,$$

является классом  $\omega_I$  для какой-то гиперкэлеровой структуры, в силу доказанного выше.

## Образ отображения периодов для гиперкэлеровых структур (продолжение)

**Шаг 3:** Значит,  $\text{Per}(\text{Teich}_{hk}(M))$  вместе с каждой тройкой  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \text{St}_3^c(H^2(M, \mathbb{R}))$  содержит множество всех троек вида  $\omega'_1, \omega_2, \omega_3 \in \text{St}_3^c(H^2(M, \mathbb{R}))$ , для всех  $\omega'_1 \in S$ , где  $S \subset \langle \omega_2, \omega_3 \rangle^\perp$  – пересечение  $\text{Kah}(M, I)$  и сферы радиуса  $\int_M \omega_1^2$ .

**Шаг 4:** Пусть  $\pi : X \rightarrow Y$  – локально-тривиальное гладкое расслоение многообразий. Назовем **расслоением** такое подмножество  $U \subset X$ , что все слои отображения  $\pi : U \rightarrow \pi(Y)$  открыты в слоях  $\pi$ , причем для каждой точки  $U$  найдется окрестность  $U' \subset U$ , которая локально-тривиально расслоена над  $\pi(U')$ . Мы доказали, что **забывающая проекция  $\text{Per}(\text{Teich}_{hk}(M)) \rightarrow \text{St}_2^c(H^2(M, \mathbb{R}))$  – расслоение.**

**Шаг 5:** Теперь утверждение теоремы сводится к следующему геометрическому наблюдению:

**ЛЕММА:** Пусть  $V$  – вещественное векторное пространство с невырожденным скалярным произведением, а  $\text{St}_k(V)$  – многообразие ортонормированных  $k$ -реперов. Рассмотрим отображения забывания  $\text{St}_k(V) \rightarrow \text{St}_{k-1}(V)$  (их  $k$  штук:  $\pi_1, \dots, \pi_k$ ). Пусть  $U \subset \text{St}_k(V)$  – какое-то подмножество, такое, что  $\pi_i|_U$  – расслоение для всех  $i$ . **Тогда  $U$  открыто в  $\text{St}_k(V)$ .**

## Образ отображения периодов для гиперкэлеровых структур: простая геометрическая лемма

**ЛЕММА:** Пусть  $V$  – вещественное векторное пространство с невырожденным скалярным произведением, а  $\text{St}_k(V)$  – многообразие ортонормированных  $k$ -реперов. Рассмотрим отображения забывания  $\text{St}_k(V) \rightarrow \text{St}_{k-1}(V)$  (их  $k$  штук:  $\pi_1, \dots, \pi_k$ ). Пусть  $U \subset \text{St}_k(V)$  – какое-то подмножество, такое, что  $\pi_i|_U$  – расслоение для всех  $i$ . **Тогда  $U$  открыто в  $\text{St}_k(V)$ .**

**Доказательство. Шаг 1:** Зафиксируем первую компоненту  $v_1$  репера, и пусть  $U(v_1)$  – все реперы из  $U$ , у которых первая компонента равна  $v_1$ . Тогда  $U(v_1) \subset \text{St}_{k-1}(v_1^\perp)$  удовлетворяет условиям леммы, и **по индукции можно считать его открытым.**

**Шаг 2:** Рассмотрим композицию двух забываний,  $\text{St}_k(V) \xrightarrow{\pi_{ij}} \text{St}_{k-2}(V)$ . Слой  $\pi_{ij}|_U$  – реперы из  $U$ , у которых зафиксированы все компоненты  $v_1, \dots, v_n$ , кроме  $i$ -й и  $j$ -й. В силу предыдущего шага, это открытое подмножество в  $\text{St}_2(W)$ , где  $W$  – ортогональное дополнение к  $v_1, \dots, \check{v}_i, \dots, \check{v}_j, \dots, v_n$ .

**Шаг 3:** Рассмотрим пространство  $U_1 := \pi_i(U)$ . В силу предыдущего шага,  $\pi_j : U_1 \rightarrow \pi_j(U_1)$  **есть расслоение**, значит,  $U_1 \subset \text{St}_{k-1}(V)$  удовлетворяет условиям леммы, и можно считать его открытым в  $\text{St}_{k-1}(V)$ . **Поскольку  $U$  расслоено над  $U_1$  с открытыми слоями, оно тоже открыто. ■**

## Классификация форм пересечения (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Симметричная билинейная форма  $\eta$  на  $V := \mathbb{Z}^n$  называется **унимодулярной**, если она задает изоморфизм  $V \rightarrow V^*$ , **четной**, если множество всех  $\eta(x, x)$  содержится в  $2 \cdot \mathbb{Z}$ , и **нечетной** если нет.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Симметричная 2-форма  $\eta$  называется **неопределенной**, если  $\eta(x, x) < 0$  и  $\eta(y, y) > 0$  для каких-то  $x$  и  $y$ .

### ТЕОРЕМА:

**(классификация унимодулярных симметричных билинейных форм):**

Пусть  $q$  – четная унимодулярная неопределенная форма на  $V$ . **Тогда  $(V, q)$  разлагается в ортогональную прямую сумму** подпространств с билинейной формой, которая имеет вид  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  (такие пространства называются "гиперболическими"), и подпространств  $E_{\pm 8}$ , изоморфных решетке пересечения корней алгебры  $E_8$ :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

или такой же решетке с формой пересечения противоположного знака.

## Форма пересечения для КЗ-поверхности

**ЛЕММА:** Пусть  $\eta$  – нечетная форма пересечения на  $V := \mathbb{Z}^n$ , а  $P := \mathbb{P}(V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$  – соответствующее проективное пространство. Обозначим за  $R$  множество нечетных векторов  $r \in V$ . Тогда образ  $\pi(R)$  в  $P$  плотен.

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть  $s \in V$  – любой вектор. Для доказательства плотности  $R$  в  $P$  достаточно найти элемент из  $\pi(R)$  в любой окрестности  $\pi(S)$ .

**Шаг 2:** Пусть  $r_0 \in R$ . Последовательность  $r_0 + 2Ns$  состоит из нечетных векторов, а ее образ в  $P$  сходится к  $s$ . ■

**ТЕОРЕМА:** Форма пересечения КЗ-поверхности  $M$  четная.

**Доказательство. Шаг 1:** В силу доказанного выше, множество  $K$  кэлеровых форм  $M$  открыто в  $H^2(M, \mathbb{R})$ . Значит, его проективизация  $\mathbb{P}K$  открыта в  $\mathbb{P}H^2(M, \mathbb{R})$ .

**Шаг 2:** Если форма пересечения  $H^2(M, \mathbb{Z})$  нечетна, в силу предыдущей леммы, найдется нечетный целочисленный класс  $r$  с  $\pi(r) \in \mathbb{P}K$ . Тогда  $r \in H^{1,1}(M, \mathbb{Z})$ , значит, **существует голоморфное расслоение  $L$  с  $c_1(L) = r$** . Но  $\chi(L) = 2 + \frac{1}{2} \int_M r \wedge r$  по формуле Римана-Роха. Значит, **самопересечение  $r$  четно**. ■