Комплексные поверхности,

лекция 5: многообразия Фреше и теорема Мозера

Миша Вербицкий

НМУ/матфак ВШЭ, Москва

5 марта 2012

Полунормы на векторном пространстве

Определение: Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{R}$. Функция $\nu : V \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **полунормой** на V, если имеет место следующее

Неравенство треугольника: $\nu(v + v') \leqslant \nu(v) + \nu(v')$.
Инвариантность относительно гомотетии: $\nu(\lambda v) = |\lambda|\nu(v)$.

Векторное пространство с полунормой наделено **полуметрикой,** по формуле $d(x, y) = \nu(x - y)$.

Определение: Множество векторов, удовлетворяющих $\nu(x) = 0$, называется **нуль-пространством** полунормы.

Замечание: Отображение $V \to \underline{V}$ это отображение V в его факторпространство по нуль-пространству, а $\underline{V}$ - нормированное векторное пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $(V, \{\nu_\alpha\})$ – пространство, снабженное системой полунорм. Последовательность x_i **сходится к x в этой системе полунорм**, если $\lim_i \nu_\alpha(x_i - x) = 0$ для всех полунорм ν_α.

Последовательности Коши

Определение: Пусть $(M, \{d_\alpha\})$ пространство с семейством полуметрик, а $\{x_i\}$ – последовательность точек в M. Говорится, что $\{x_i\}$ – **последовательность Коши относительно этого семейства полуметрик**, если для каждого индекса α, и для каждого $\varepsilon > 0$, почти все элементы $\{x_i\}$ лежат в ε-шаре $B_{\varepsilon, d_\alpha}(x)$. Говорится, что $(M, \{d_\alpha\})$ **полно**, если каждая последовательность Коши имеет предел в топологии, заданной полуметриками.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $(V, \{\nu_\alpha\})$ – пространство с системой полунорм. Соответствующая **топология хаусдорфова тогда и только тогда, когда $\cap_\alpha N(\nu_\alpha) = 0$,** где $N(\nu_\alpha)$ – нуль-пространства норм ν_α. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Система полунорм называется **полной**, если каждая последовательность $\{x_i\}$, которая является последовательностью Коши относительно всех полунорм ν_α, сходится к какому-то $x \in V$.

Пространства Фреше

Определение: Пусть V – топологическое векторное пространство с хаусдорфовой топологией. Напомним, что V называется **пространством Фреше**, когда топология на V может быть задана полной, счетной системой полунорм $\{\nu_\alpha\}$.

ПРИМЕР: Пусть M – локально компактное топологическое пространство, а V – пространство непрерывных функций на M. Для каждого компактного подмножества $K \subset M$, рассмотрим полунорму на V,

$$|f|_K := \sup_{x \in K} |f(x)|$$

Определение: Эта система полунорм задает на V топологию, которая называется **топология равномерной сходимости на компактах**.

Замечание: **Эта система полунорм полна.** Действительно, поточечный предел последовательности Коши существует, и непрерывен на каждом компакте.

Пространство гладких функций на отрезке

Определение: Пусть $C^\infty([0,1])$ – пространство гладких функций на отрезке. Рассмотрим, для каждого n, норму $|f|_{C^n}$, определенную следующим образом:

$$|f|_{C^0} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad |f|_{C^1} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + |f'(x)|, \quad ...,$$

$$|f|_{C^n} := \sup_{x\in[0,1]} \sum_{i=0}^{n} |f^{(i)}(x)|.$$

Утверждение:
$C^\infty([0,1])$ с такой системой полунорм – пространство Фреше.

Доказательство: Поскольку

$$|\varphi|_{C^n} \geqslant \left|\varphi^{(k)}\right|_{C^{n-k}},$$

для любой последовательности Коши $\{f_i\}$, $\{f_i^{(k)}\}$ – тоже последовательность Коши. Предел последовательности $\{f_i\}$ будет k-кратной первообразной для предела $\{f_i^{(k)}\}$, значит, предел $\{f_i\}$ – гладкий.

Пространства Фреше и метрики

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $(V, \{\nu_i\})$ – пространство, снабженное системой полунорм, а $d(x,y) := \sum_i \max\left(\nu_i(x,y), \frac{1}{2^i}\right)$. Тогда d задает полуметрику на V. Более того, d - **полная метрика тогда и только тогда, когда** $(V, \{\nu_i\})$ **– пространство Фреше.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Последовательность $\{x_i\}$ является последовательностью Коши относительно всех ν_α тогда и только тогда, когда это последовательность Коши относительно d. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Трансляционно-инвариантная** значит "инвариантная относительно параллельных переносов".

ТЕОРЕМА:
Пусть V – локально выпуклое топологическое векторное пространство, причем топология на V может быть задана полной, трансляционно-инвариантной метрикой d. **Тогда V есть пространство Фреше.**

Доказательство см. след. слайд.

Пространства Фреше (второе определение)

Доказательство. Шаг 1:

Шаг 2: Пусть B_ε – шар радиуса ε с центром в 0, $\tilde{B}_\varepsilon$ - выпуклая оболочка $B_\varepsilon \cup -B_\varepsilon$, а

$$\nu_\varepsilon(x) := \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^{>0}} \left[\lambda^{-1} x \in \tilde{B}_\varepsilon\right].$$

Поскольку $\tilde{B}_\varepsilon$ выпуклый, ν_ε – полунорма.

Шаг 3: Последовательность x_i сходится к 0 тогда и только тогда, когда для какой-то $\varepsilon_i \to 0$, имеем $x_{i+j} \in B_{\varepsilon_i}$, для всех $j \geqslant 0$, что дает $\nu_{\varepsilon_i}(x_{i+j}) \leqslant 1$.

Шаг 4: В силу неравенства треугольника, $NB_\varepsilon \supset B_{N\varepsilon}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, значит, $\nu_{N\varepsilon} \geqslant N\nu_\varepsilon$. Поэтому $\nu_{N\varepsilon}(x_{i+j}) \leqslant 1$ дает $\nu_\varepsilon(x_{i+j}) \leqslant 1/N$. Значит, **последовательность $\{x_i\}$ сходится к нулю в каждой из норм.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Можно определить пространства Фреше как **локально выпуклые топологические векторные пространства, допускающие трансляционно-инвариантную, полную метрику.**

Дифференцирование в пространствах Фреше

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $U_i \subset F_i$, $i = 1, 2$ – открытые подмножества пространств Фреше. Непрерывное отображение $f : U_1 \to U_2$ называется **дифференцируемым**, если для любой точки $x \in U_1$ и любого вектора $v \in F_1$, существует предел $\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$. Этот предел называется **производной**, а соответствующее отображение $U_1 \times F_1 \to F_2$ – тоже производной, или **дифференциалом**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение $f : U_1 \to U_2$ называется **k-кратно дифференцируемым**, если $k-1$-я производная $f^{(k-1)} : U_1 \times F_1^{k-1} \to F_2$ задает дифференцируемое отображение на пространствах Фреше. В этой ситуации, **k-я производная** определяется как предел

$$f^{(k)}(x, \lambda_1, ..., \lambda_{k-1}, v) := \lim_{t \to 0} \frac{f^{(k-1)}(x + tv)(\lambda_1, ..., \lambda_{k-1}) - f(x)(\lambda_1, ..., \lambda_{k-1})}{t}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение $f : U_1 \to U_2$ **гладко**, если оно k-кратно дифференцируемо, для любого $k > 0$.

Многообразия Фреше

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Многообразие Фреше** есть топологическое пространство, снабженное атласом $\{U_i\}$, где каждая из карт U_i реализована как открытое подмножество в каком-то пространстве Фреше, а все функции перехода гладкие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гладкое отображение** многообразий Фреше - такое, которое задается гладкими отображениями в каждой из карт.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа Ли-Фреше есть группа, снабженная структурой многообразия Фреше, таким образом, что все групповые операции являются гладкими.

ЗАМЕЧАНИЕ: Заменив "Фреше" на "банаховы", получим определение **банахова многообразия** и **банаховой группы Ли**.

Примеры многообразий Фреше

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $E \stackrel{\pi}{\to} X$ – векторное расслоение на компактном многообразии. Тогда **пространство гладких сечений E есть пространство Фреше.** Это доказывается тем же аргументом, который использовали, чтоб построить структуру Фреше на $C^\infty([0,1])$.

ПРИМЕР: Пусть $E \stackrel{\pi}{\to} X$ – морфизм многообразий, дифференциал которого всюду имеет максимальный ранг, X компактно, а $\varphi: X \to E$ – сечение этой проекции. Легко видеть, что для подходящей окрестности U образа φ, проекция $U \stackrel{\pi}{\to} X$ – локально тривиальное расслоение со слоем открытый шар. В силу предыдущего замечания, пространство сечений проекции $U \to X$ есть пространство Фреше. **Это задает атлас Фреше на пространстве сечений π,** превращая его в многообразие Фреше.

ПРИМЕР: Пространство сечений гладкого расслоения $X \times Y \to Y$ отождествляется с пространством $\operatorname{Map}(X,Y)$ гладких отображений из X в Y. Значит, $\operatorname{Map}(X,Y)$ **есть многообразие Фреше.**

Примеры многообразий Фреше (продолжение)

ПРИМЕР: Следовательно **группа диффеоморфизмов есть группа Фреше-Ли**.

ПРИМЕР: Пусть X – гладкое многообразие. **Пространство всех гладких, компактных подмногообразий $Y \subset X$ – многообразие Фреше.** Для каждого $Y \subset X$, выберем трубчатую окрестность $U \subset X$. Небольшие деформации Y задаются сечениями проекции $U \to Y$, что определяет атлас.

ЗАМЕЧАНИЕ: Замкнутое подпространство пространства Фреше - снова пространство Фреше. Фактор пространства Фреше по замкнутому подрпостранству является пространством Фреше.

ПРИМЕР: **Пространство симплектических форм на компактном многообразии M является многообразием Фреше.** В самом деле, оно открыто в пространстве всех замкнутых 2-форм. Отображение $d : \Lambda^2 M \to \Lambda^3 M$ непрерывно в топологии Фреше, значит его ядро замкнуто.

Теорема об обратной функции и повороты окружности

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема об обратной функции **неверна** для пространств Фреше.

ПРИМЕР: Пусть $\operatorname{Diff}(S^1)$ – группа диффеоморфизмов окружности, $\operatorname{Lie}(S^1)$ – ее алгебра Ли, то есть пространство векторных полей, а $E(x) := e^x$ – естественное отображение $\operatorname{Lie}(S^1) \to \operatorname{Diff}(S^1)$. Очевидно, что $E(x)$ гладко, и его производная в нуле – тождественное отображение.

ТЕОРЕМА: **Образ $E(\operatorname{Lie}(S^1))$ не содержит никакой открытой окрестности 1 в $\operatorname{Diff}(S^1)$.**

Доказательство. Шаг 1: Любое векторное поле v на S^1, не имеющее нулей, сопряжено постоянному. В самом деле, выберем на S^1 координаты таким образом, что $e^{tv}(0) = \lambda t$. В этих координатах, v – постоянное.

Шаг 2: Пусть $f \in \operatorname{Diff}(S^1)$ – экспонента векторного поля, не имеющего нулей. **Тогда f сопряжен повороту.**

Теорема об обратной функции и повороты окружности (продолжение)

Шаг 2: Пусть $f \in \operatorname{Diff}(S^1)$ – экспонента векторного поля, не имеющего нулей. **Тогда f сопряжен повороту.**

Шаг 3: Если $f \in E(\operatorname{Lie}(S^1))$ – диффеоморфизм без неподвижных точек, то он сопряжен повороту. Значит, **f^n тождественный, либо не имеет неподвижных точек.**

Шаг 4: В любой окрестности единицы содержится диффеоморфизм f, который не имеет неподвижных точек, при этом f^N имеет неподвижную точку, и не тождественный. **Такой диффеоморфизм не может быть экспонентой.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Правильная версия теоремы об обратной функции для пространств Фреше называется **"теорема Нэша-Мозера"** и широко используется в разных науках. Эта теорема о морфизмах в категории **"ручных многообразий Фреше"**, которая несколько уже, чем категория всех многообразий Фреше (группа и алгебра Ли диффеоморфизмов лежат в этой категории, а вот экспоненциальный морфизм - нет).

Ссылка: Richard S. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) Volume 7, Number 1 (1982), 65-222.

Пространство Тейхмюллера

ЗАМЕЧАНИЕ: Отныне и до конца лекции, **многообразие M предполагается компактным.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\operatorname{Diff}_0(M)$ – связная компонента группы диффеоморфизмов, а Symp – многообразие Фреше всех симплектических форм на M. **Пространство Тейхмюллера** Teich_s **симплектических форм на M** есть фактор $\operatorname{Teich}_s := \operatorname{Symp} / \operatorname{Diff}_0(M)$, с индуцированной топологией.

ЗАМЕЧАНИЕ: Аналогичным образом определяется пространство Тейхмюллера комплексных структур, эрмитовых, кэлеровых, гиперкэлеровых и так далее.

Отображение периодов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Отображение периодов** $\operatorname{Teich}_s \stackrel{\mathcal{P}\mathrm{er}}{\to} H^2(M,\mathbb{R})$ переводит симплектическую форму ω в ее класс когомологий $[\omega]$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Образ $\mathcal{P}\mathrm{er}(\operatorname{Teich}_s)$ открыт в $H^2(M,\mathbb{R})$**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Введем на M риманову метрику. Это позволяет говорить о **"собственных значениях"** 2-формы.

Шаг 1: Для каждой невырожденной формы ω с собственными значениями α_i, **сумма $\omega+\eta$ невырождена, если все собственные значения η меньше $\min|\alpha_i|$.**

Шаг 2: Выберем какую-то метрику на $H^2(M,\mathbb{R})$, пусть $V\subset\Lambda^2(M,\mathbb{R})$ b_1-мерное пространство замкнутых форм, которое проектируется на $H^2(M,\mathbb{R})$ изоморфно. Пусть α есть имфимум модулей всех собственных значений ω на M. Обозначим за B единичный шар в V, и пусть S есть супремум всех модулей собственных значений для всех $\eta\in B$. Тогда **для любой $\eta\in\frac{\alpha}{S}B$, сумма $\eta+\omega$ замкнута и невырождена.**

Шаг 3: Значит, $\operatorname{Teich}_s \stackrel{\mathcal{P}\mathrm{er}}{\to} H^2(M,\mathbb{R})$ **сюрьективен на шаре $[\omega]+\frac{\alpha}{S}B$ с центром в $[\omega]$.** ■

Теорема Мозера и пространства Тейхмюллера

ТЕОРЕМА: (Мозер) В какой-то окрестности $U \subset \mathrm{Teich}_s$ каждой точки $x \in \mathrm{Teich}_s$, **отображение периодов** $\mathrm{Teich}_s \to H^2(M, \mathbb{R})$ **– гомеоморфизм** U **на его образ.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Таким образом, **пространство Тейхмюллера для симплектических структур на** M **является многообразием.**

Пусть Symp_ω – множество всех симплектических структур на M, класс когомологий которых равен $[\omega]$. Для доказательства теоремы Мозера **достаточно проверить, что** $\mathrm{Diff}_0(M)$ **действует транзитивно на** Symp_ω **в какой-то окрестности** ω**.**

ТЕОРЕМА: (теорема Мозера, вариант 2)
Пусть Symp^0_ω – связная компонента Symp_ω. **Тогда** $\mathrm{Diff}_0(M)$ **действует транзитивно на** Symp^0_ω

Теорема Мозера и локальная связность

Поскольку Symp_ω – открытая часть линейного пространства, Symp_ω локально линейно связно.

Поэтому **теорема Мозера следует из следующей теоремы.**

ТЕОРЕМА: (теорема Мозера, канонический вариант)
Пусть ω_t – семейство симплектических форм на M, гладко зависящих от параметра t. Предположим, что все ω_t когомологичны. **Тогда найдется диффеоморфизм $\Psi_t \in \mathrm{Diff}_0(M)$, такой, что $\Psi_t^*\omega_0 = \omega_t$.**

Доказательство: Мы построим Ψ_t как решение уравнения $\frac{d\Psi_t}{dt} = V_t$, где $V_t \in TM$ – векторное поле, зависящее от параметра t.

Доказательство теоремы Мозера

ТЕОРЕМА: (теорема Мозера, канонический вариант)
Пусть ω_t – семейство симплектических форм на M, гладко зависящих от параметра t. Предположим, что все ω_t когомологичны. **Тогда найдется диффеоморфизм $\Psi_t \in \mathrm{Diff}_0(M)$, такой, что $\Psi_t^*\omega_0 = \omega_t$.**

Доказательство: Мы построим Ψ_t как решение уравнения $\frac{d\Psi_t}{dt} = V_t$, где $V_t \in TM$ – векторное поле, зависящее от параметра t.

Шаг 1: Поскольку ω_t все когомологичны, форма $\frac{d\omega_t}{dt}$ точна. Значит, $\frac{d\omega_t}{dt} = d\eta_t$, где $\eta_t \in \Lambda^1(M)$.

Шаг 2: Пусть X_t – векторное поле, такое, что $\omega_t \lrcorner X_t = \eta_t$. По формуле Картана, $\mathrm{Lie}_{X_t}\omega_t = d(\omega_t \lrcorner X_t) = d\eta_t = \frac{d\omega_t}{dt}$.

Шаг 3: Интегрируя по t обе части $\mathrm{Lie}_{X_t}\omega_t = \frac{d\omega_t}{dt}$, получаем

$$\Psi_{t_1}^*\omega_0 = \int_0^{t_1} \mathrm{Lie}_{X_t}\omega_t dt = \int_0^{t_1} \frac{d\omega_t}{dt} dt = \omega_{t_1}$$

■