# Комплексные поверхности,

## лекция 6: теорема Торелли для K3-поверхностей

Миша Вербицкий

**НМУ/матфак ВШЭ, Москва**

**19 марта 2012**

## Пространства Фреше (повторение)

**Определение:** Пусть $V$ - векторное пространство над $\mathbb{R}$. Функция $\nu : V \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **полунормой** на $V$, если имеет место следующее
(*) **Неравенство треугольника:** $\nu(v+v') \leqslant \nu(v) + \nu(v')$.
(**) **Инвариантность относительно гомотетии:** $\nu(\lambda v) = |\lambda|\nu(v)$.
Векторное пространство с полунормой наделено **полуметрикой,** по формуле $d(x,y) = \nu(x-y)$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $(V, \{\nu_\alpha\})$ – пространство, снабженное системой полунорм. Последовательность $x_i$ **сходится к $x$ в этой системе полунорм**, если $\lim_i \nu_\alpha(x_i - x) = 0$ для всех полунорм $\nu_\alpha$. Говорится, что $(M, \{d_\alpha\})$ **полно**, если **каждая последовательность Коши имеет предел в топологии, заданной полуметриками.**

**Определение:** Пусть $V$ – топологическое векторное пространство с хаусдорфовой топологией. $V$ называется **пространством Фреше**, когда топология на $V$ может быть задана полной, счетной системой полунорм $\{\nu_\alpha\}$.

## Пространство гладких функций на отрезке (повторение)

**Определение:** Пусть $C^\infty([0,1])$ – пространство гладких функций на отрезке. Рассмотрим, для каждого $n$, норму $|f|_{C^n}$, определенную следующим образом:

$$|f|_{C^0} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad |f|_{C^1} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + |f'(x)|, \quad ...,$$

$$|f|_{C^n} := \sup_{x\in[0,1]} \sum_{i=0}^{n} |f^{(i)}(x)|.$$

**Утверждение:**
$C^\infty([0,1])$ **с такой системой полунорм – пространство Фреше.**

**Доказательство:** Поскольку

$$|\varphi|_{C^n} \geqslant \left|\varphi^{(k)}\right|_{C^{n-k}},$$

**для любой последовательности Коши $\{f_i\}$, $\{f_i^{(k)}\}$ – тоже последовательность Коши.** Предел последовательности $\{f_i\}$ будет $k$-кратной первообразной для предела $\{f_i^{(k)}\}$, значит, предел $\{f_i\}$ – гладкий.

## Многообразия Фреше (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Многообразие Фреше** есть топологическое пространство, снабженное атласом $\{U_i\}$, где каждая из карт $U_i$ реализована как открытое подмножество в каком-то пространстве Фреше, а все функции перехода гладкие.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Гладкое отображение** многообразий Фреше - такое, которое задается гладкими отображениями в каждой из карт.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Группа Ли-Фреше есть группа, снабженная структурой многообразия Фреше, таким образом, что все групповые операции являются гладкими.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Заменив "Фреше" на "банаховы", получим определение **банахова многообразия** и **банаховой группы Ли**.

## Пространство Тейхмюллера (повторение)

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Отныне и до конца лекции, **многообразие $M$ предполагается компактным.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $\operatorname{Diff}_0(M)$ – связная компонента группы диффеоморфизмов, а Symp – многообразие Фреше всех симплектических форм на $M$. **Пространство Тейхмюллера** $\operatorname{Teich}_s$ **симплектических форм на $M$** есть фактор $\operatorname{Teich}_s := \operatorname{Symp} / \operatorname{Diff}_0(M)$, с индуцированной топологией.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Аналогичным образом определяется пространство Тейхмюллера комплексных структур, эрмитовых, кэлеровых, гиперкэлеровых и так далее.

## Теорема Мозера и отображение периодов (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Отображение периодов** $\operatorname{Teich}_s \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} H^2(M,\mathbb{R})$ переводит симплектическую форму $\omega$ в ее класс когомологий $[\omega]$.

**ТЕОРЕМА:** (Мозер) Пусть  – компактное симплектическое многообразие, а $\operatorname{Teich}_s$ – симплектическое пространство Тейхмюллера. В какой-то окрестности $U \subset \operatorname{Teich}_s$ каждой точки $x \in \operatorname{Teich}_s$, **отображение периодов $\operatorname{Teich}_s \to H^2(M,\mathbb{R})$ – гомеоморфизм $U$ на его образ.**

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Таким образом, **пространство Тейхмюллера для симплектических структур на $M$ является многообразием.**

Пусть $\operatorname{Symp}_\omega$ – множество всех симплектических структур на $M$, класс когомологий которых равен $[\omega]$. Для доказательства теоремы Мозера **достаточно проверить, что $\operatorname{Diff}_0(M)$ действует транзитивно на $\operatorname{Symp}_\omega$ в какой-то окрестности $\omega$.**

**ТЕОРЕМА:** (теорема Мозера, вариант 2)
Пусть $\operatorname{Symp}_\omega^0$ – связная компонента $\operatorname{Symp}_\omega$. **Тогда $\operatorname{Diff}_0(M)$ действует транзитивно на $\operatorname{Symp}_\omega^0$**

## Теорема Мозера и локальная связность (повторение)

Поскольку $\mathrm{Symp}_\omega$ – открытая часть линейного пространства, $\mathrm{Symp}_\omega$ локально линейно связно.

Поэтому **теорема Мозера следует из следующей теоремы.**

**ТЕОРЕМА: (теорема Мозера, канонический вариант)**
Пусть $\omega_t$ – семейство симплектических форм на $M$, гладко зависящих от параметра $t$. Предположим, что все $\omega_t$ когомологичны. **Тогда найдется диффеоморфизм $\Psi_t \in \mathrm{Diff}_0(M)$, такой, что $\Psi_t^*\omega_0 = \omega_t$.**

**Доказательство:** Мы построим $\Psi_t$ как решение уравнения $\frac{d\Psi_t}{dt} = V_t$, где $V_t \in TM$ – векторное поле, зависящее от параметра $t$.

## Доказательство теоремы Мозера (повторение)

**ТЕОРЕМА: (теорема Мозера, канонический вариант)**
Пусть $\omega_t$ – семейство симплектических форм на $M$, гладко зависящих от параметра $t$. Предположим, что все $\omega_t$ когомологичны. **Тогда найдется диффеоморфизм $\Psi_t \in \operatorname{Diff}_0(M)$, такой, что $\Psi_t^* \omega_0 = \omega_t$.**

**Доказательство:** Мы построим $\Psi_t$ как решение уравнения $\frac{d\Psi_t}{dt} = V_t$, где $V_t \in TM$ – векторное поле, зависящее от параметра $t$.

**Шаг 1:** Поскольку $\omega_t$ все когомологичны, форма $\frac{d\omega_t}{dt}$ точна. Значит, $\frac{d\omega_t}{dt} = d\eta_t$, где $\eta_t \in \Lambda^1(M)$.

**Шаг 2:** Пусть $X_t$ – векторное поле, такое, что $\omega_t \lrcorner X_t = \eta_t$. По формуле Картана, $\operatorname{Lie}_{X_t} \omega_t = d(\omega_t \lrcorner X_t) = d\eta_t = \frac{d\omega_t}{dt}$.

**Шаг 3:** Интегрируя по $t$ обе части $\operatorname{Lie}_{X_t} \omega_t = \frac{d\omega_t}{dt}$, получаем

$$\Psi_{t_1}^* \omega_0 = \int_0^{t_1} \operatorname{Lie}_{X_t} \omega_t dt = \int_0^{t_1} \frac{d\omega_t}{dt} dt = \omega_{t_1}$$

■

## К3-поверхности (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **К3-поверхность** есть комплексная поверхность с $b_1 = 0$ и $c_1 = 0$.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** **Все поверхности с $b_1 = 0$ - кэлеровы** (Бухсдаль-Ламари).

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** **Каноническое расслоение $K_M$ тривиально.**

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Теорема Римана-Роха дает $\chi(\mathcal{O}_M) = 2 = \frac{c_2(M)}{12}$, значит, $c_2(M) = 24$. Поскольку $c_2(M)$ есть эйлерова характеристика $M$, получаем $b_2(M) = 22$.

Это дает ромб Ходжа для К3-поверхности:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** **Когомологии К3 не имеют кручения.**

## Гиперкэлеровы многообразия (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Гиперкомплексное многообразие** есть гладкое многообразие, снабженное комплексными структурами $I, J, K : TM \to TM$, которые удовлетворяют кватернионным соотношениям: $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\operatorname{Id}$. **Гиперкэлерово многообразие** есть гиперкомплексное многообразие, снабженное римановой метрикой $g$, которая кэлерова по отношению к $I, J, K$.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Кэлеровость $I$ равносильна условию $\nabla(I) = 0$, где $\nabla$ – связность Леви-Чивита, а гиперкэлеровость – **условию $\nabla(I) = \nabla(J) = \nabla(K) = 0$ плюс кватернионные соотношения.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $h \in \mathbb{H}$ – унитарный кватернион, а $(M, I, J, K, g)$ – гиперкэлерово многообразие. Тогда $(M, hIh^{-1}, hJh^{-1}, hKh^{-1}, g)$ – тоже гиперкэлерово многообразие (**проверьте это**). Многообразия $(M, I, J, K, g)$ и $(M, hIh^{-1}, hJh^{-1}, hKh^{-1}, g)$ называются **эквивалентными**.

## Гиперкэлеровы структуры на K3-поверхности (повторение)

**ТЕОРЕМА:** Пусть $(M, I, g)$ – K3-поверхность, где $g$ – кэлерова метрика. Тогда $M$ **допускает гиперкэлерову структуру** $(M, I, J, K, g)$ **тогда и только тогда, когда** $g$ **Риччи-плоская**.

**ТЕОРЕМА:** Пусть $(M, I)$ – K3-поверхность, $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ ее кэлеров класс, $\Omega$ – голоморфная симплектическая форма. Предположим, что $\operatorname{Re}\Omega^2 = [\omega]^2$. Тогда **на** $(M, I)$ **существует и единственна гиперкэлерова структура, такая, что** $[\omega_I] = [\omega]$, $\omega_J = \operatorname{Re}\Omega$, $\omega_K = \operatorname{Im}\Omega$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Для гиперкэлеровой структуры на поверхности, $\int_M \omega_I \wedge \omega_J = \int \omega_I \wedge \omega_K = \int \omega_J \wedge \omega_K = 0$, $\int_M \omega_I^2 = \int_M \omega_J^2 = \int_M \omega_K^2$ **(проверьте это).** Назовем базис, удовлетворяющий этим условиям, **конформно ортонормальным**.

## Отображение периодов для гиперкэлеровых структур (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Группа изотопий** $\operatorname{Diff}_0(M)$ многообразия $M$ есть связная компонента группы диффеоморфизмов $M$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Пространство Тейхмюллера** $\operatorname{Teich}_{hk}(M)$ гиперкэлеровых структур есть фактор пространства всех гиперкэлеровых структур на $M$ по $\operatorname{Diff}_0(M)$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Обозначим за $\operatorname{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$ пространство конформно ортонормированных троек классов $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in H^2(M,\mathbb{R})$. **Отображение периодов** $\operatorname{Teich}_{hk}(M) \stackrel{\mathcal{P}\mathrm{er}}{\to} \operatorname{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$ переводит гиперкэлерову структуру $I, J, K, g$ в тройку $\omega_I, \omega_J, \omega_K \in \operatorname{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Открытое отображение** есть отображение, переводящее открытые множества в открытые.

**ТЕОРЕМА:** Пусть $M$ - K3-поверхность. Тогда **отображение** $\operatorname{Teich}_{hk}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} \operatorname{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$ **открыто в** $\operatorname{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$.

## Комплексные многообразия

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пучок колец** есть пучок $U \to \mathcal{F}(U)$ такой, что на каждом $\mathcal{F}(U)$ задана структура кольца, а отображения ограничения являются гомоморфизмами.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Окольцованное пространство** есть топологическое пространство с заданным на нем пучком колец.

**ПРИМЕР: Открытый шар $B \subset \mathbb{C}^n$ с пучком $\mathcal{O}_B$ голоморфных функций является окольцованным пространством.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Комплексное многообразие** $(M, \mathcal{O}_M)$ есть окольцованное пространство, которое локально изоморфно (как окольцованное пространство) открытому шару $(B, \mathcal{O}_B)$.

## Почти комплексные многообразия

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Почти комплексная структура** на многообразии есть оператор $I \in \operatorname{End} TM$ в эндоморфизмах касательного расслоения, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_{TM}$.

Пусть $(M, I)$ – почти комплексное многообразие. Обозначим за

$$\Lambda^{*,0}(M) := \bigoplus_p \Lambda^{p,0}(M), \quad \Lambda^{0,*}(M) := \bigoplus_q \Lambda^{0,q}(M)$$

подалгебры в алгебре де Рама, порожденные $\Lambda^{1,0}(M) = (T^*M)^{1,0}$ и $\Lambda^{0,1}(M) = (T^*M)^{0,1}$ соответственно.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Разложение Ходжа** на дифференциальных формах записывается $\Lambda^*(M) = \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q}(M)$, причем $\Lambda^{p,q}(M) = \Lambda^{p,0}(M) \wedge \Lambda^{0,q}(M)$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Функция $f: M \to \mathbb{C}$ на почти комплексном многообразии называется **голоморфной**, если $df \in \Lambda^{1,0}(M)$.

## Интегрируемые почти комплексные многообразия

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Почти комплексное многообразие $(M, I)$ называется **интегрируемым**, если $M$, окольцованное пучком голоморфных функций, является комплексным многообразием.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $(M, I)$ – почти комплексное многообразие, $T^{1,0} \subset TM \otimes \mathbb{C}$ – подрасслоение векторов типа $(1, 0)$, а $[T^{1,0}, T^{1,0}] \xrightarrow{N} TM \otimes \mathbb{C}/T^{1,0}$ – скобка Фробениуса. Отождествив $TM \otimes \mathbb{C}/T^{1,0}$ с $T^{0,1}$, мы представим $N$ как оператор

$$N: \Lambda^2(T^{1,0}M) \to T^{0,1}M.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Этот оператор называется **тензором Ниейхойса** (Nijenhuis tensor). Его можно преставить как сечение $N \in \Lambda^{2,0}M \otimes T^{0,1}M$.

**ТЕОРЕМА:** Пусть $(M, I)$ – гладкое почти комплексное многообразие, причем $[T^{0,1}, T^{0,1}] \subset T^{0,1}$. **Тогда почти комплексная структура $I$ интегрируема.**

**ЗАМЕЧАНИЕ:** **Это то же самое, что зануление тензора Ниейхойса.**

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Подрасслоение $B \subset TM$, удовлетворяющее $[B, B] \subset B$, называется **инволютивным.**

## Комплексные структуры и симплектические 2-формы

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $\Omega \in \Lambda^2(M, \mathbb{C})$ – комплексная 2-форма. Такая форма называется **невырожденной**, если $\operatorname{Re}\Omega$ либо $\operatorname{Im}\Omega$ – невырожденные 2-формы.

**ТЕОРЕМА:** Пусть $M$ – вещественное 4-мерное многообразие, а $\Omega \in \Lambda^2(M, \mathbb{C})$ – замкнутая, невырожденная комплексная 2-форма. Предположим, что $\Omega^2 = 0$. Тогда **на $M$ существует комплексная структура $I$ такая, что $\Omega$ – голоморфная симплектическая форма на $(M, I)$.**

**Доказательство. Шаг 1:** Поскольку $\Omega^2 = 0$, форма $\Omega$ **разложима**, то есть представляется в виде $\Omega = \xi \wedge \zeta$ для каких-то 1-форм $\xi, \zeta \in\in \Lambda^2(M, \mathbb{C})$ **(докажите это).**

**Шаг 2:** **Ядро** формы $\Omega$ есть множество всех векторов $x \in TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, таких, что $\Omega(x, \cdot) = 0$. **В силу шага 1,** $\dim_{\mathbb{C}} \ker \Omega \geqslant 2$.

**Шаг 3:** Обозначим $\operatorname{Re}\Omega$ за $\omega_1$ и $\operatorname{Im}\Omega$ за $\omega_2$. Поскольку $\Omega^2 = 0$, имеем $\omega_1^2 = \omega_2^2$ **и** $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. Значит, **форма** $\Omega \wedge \overline{\Omega} = \omega_1^2 + \omega_2^2 = 2\omega_1^2$ **невырожденна.**

## Комплексные структуры и симплектические 2-формы (продолжение)

**Шаг 3:** Обозначим $\operatorname{Re}\Omega$ за $\omega_1$ и $\operatorname{Im}\Omega$ за $\omega_2$. Поскольку $\Omega^2 = 0$, имеем $\omega_1^2 = \omega_2^2$ **и** $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. Значит, **форма** $\Omega \wedge \overline{\Omega} = \omega_1^2 + \omega_2^2 = 2\omega_1^2$ **невырожденна.**

**Шаг 4:** Значит, $\dim_{\mathbb C} \ker \Omega > 2$. Поскольку $\Omega$ симплектична на $TM/\ker\Omega$, пространство $\ker\Omega$ четномерно. Из шага 2 получаем, что $\dim\ker\Omega = 2$ везде на $M$, то есть $\ker\Omega$ **есть двумерное подрасслоение в** $TM\otimes_{\mathbb R}\mathbb C$**.**

**Шаг 5:** По формуле Картана, $0 = d\Omega(x,y,z) = \operatorname{Lie}_x\Omega(x,y) - \operatorname{Lie}_y\Omega(x,z) +$
$$\operatorname{Lie}_z\Omega(x,y) + \Omega([x,y],z) - \Omega(y,[x,z]) + \Omega(x,[y,z]). \quad (*)$$
Если $x,y\in\ker\Omega$, все слагаемые (*), кроме одного, автоматически зануляются, и мы получаем $\Omega([x,y],z) = 0$ (для любого $z$), иначе говоря, $[x,y]\in\ker\Omega$, и $\ker\Omega$ **– инволютивное подрасслоение.**

**Шаг 6:** Локально, имеем $\Omega = \xi\wedge\zeta$. Если плоскость $\langle\xi,\zeta\rangle$, порожденная $\xi, zeta$, пересекается с $\langle\overline{\xi},\overline{\zeta}\rangle$, мы получим $\Omega\wedge\overline{\Omega} = 0$. В силу шага 3, это невозможно. Значит, $\ker\Omega$ **не пересекается с** $\overline{\ker\Omega}$**.**

**Шаг 7:** Рассмотрим оператор $I: TM \to TM$, который равен $\sqrt{-1}$ на $\ker\Omega$ и $-\sqrt{-1}$ на $\overline{\ker\Omega}$. Поскольку $\overline{I} = I$, это оператор почти комплексной структуры. $T^{1,0}M = \ker\Omega$ **инволютивно, значит,** $I$ **интегрируема.** ■

## Отображение периодов для К3-поверхности

Мы получили такое следствие

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть $M$ – К3-поверхность, а $V$ – множество всех невырожденных комплексных 2-форм $\Omega \in \Lambda^2(M, \mathbb{C})$, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{P}V := V/\mathbb{C}^*$. Тогда **множество $\mathbb{P}V$ находится в биективном соответствии с множеством** $\operatorname{Comp}(M)$ **комплексных структур на $M$.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $\operatorname{Comp}(M)$ есть множество всех интегрируемых почти комплексных структур на многообразии, с топологией, индуцированной топологией Фреше на пространстве тензоров. **Пространство Тейхмюллера** $\operatorname{Teich}(M)$ комплексных структур есть факторпространство $\operatorname{Comp}(M)/\operatorname{Diff}_0(M)$, где $\operatorname{Diff}_0(M)$ есть **группа изотопий** (связная компонента группы диффеоморфизмов).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $M$ есть К3-поверхность. **Отображение периодов** $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{C})$ сопоставляет каждой комплексной структуре $I$ на $M$ прямую $H^{2,0}(M, I) \subset H^2(M, \mathbb{C})$.

## Пространство периодов для K3-поверхности

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Пусть $l \in \mathcal{P}\mathrm{er}(\mathrm{Teich}(M))$ - класс когомологий в образе отображения периодов. Тогда $l \wedge l = 0$ (потому что это (2,0)-форма) и $l \wedge \bar{l} > 0$, потому что $l = \xi \wedge \zeta$ для каких-то $\xi, \zeta \in \Lambda^{1,0}(M, I)$ и и $l \wedge \bar{l} = \xi \wedge \zeta \wedge \bar{\xi} \wedge \bar{\zeta}$. локально в окрестности каждой точки $M$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Пространство периодов** K3-поверхности есть пространство $\mathbb{P}\mathrm{er} \subset \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{C})$ состоящее из всех прямых $\mathbb{C} \cdot l$ таких, что $l \wedge l = 0$ и $l \wedge \bar{l} > 0$. **Отображение периодов** есть отображение $\mathrm{Teich}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} \mathbb{P}\mathrm{er}$.

Основной результат этой лекции:

**ТЕОРЕМА:** **(Локальная теорема Торелли для K3)** **Отображение периодов $\mathrm{Teich}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} \mathbb{P}\mathrm{er}$ этально, т.е. задается гомеоморфизмом в окрестности каждой точки $I \in \mathrm{Teich}(M)$.**

## Скрученный дифференциал $d^c$ (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $(M, I)$ – комплексное многообразие, $I: TM \to TM$ – **оператор комплексной структуры**, $I^2 = -\operatorname{Id}_{TM}$. **скрученный дифференциал** $d^c$ определяется формулой $d^c := I^{-1} dI$.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть $(M, I)$ - комплексное многообразие. Тогда $\partial := \frac{d+\sqrt{-1}\, d^c}{2}$, $\overline{\partial} := \frac{d-\sqrt{-1}\, d^c}{2}$ **– компоненты в разложении Ходжа** $d$: $\partial = d^{1,0}$, $\overline{\partial} = d^{0,1}$.

**ТЕОРЕМА:** Пусть $(M, I)$ – почти комплексное многообразие. **Тогда следующие утверждения равносильны:**

1. $I$ интегрируемо. 2. $\partial^2 = 0$. 3. $\overline{\partial}^2 = 0$. 4. $dd^c = -d^c d$ 5. $dd^c = 2\sqrt{-1}\, \partial\overline{\partial}$.

**ТЕОРЕМА:** **($dd^c$-лемма)**
Пусть $\eta$ - форма на компактном кэлеровом многообразии, которая удовлетворяет какому-то из условий
1. $\eta$ – точная (p,q)-форма.
2. $\eta$ – $d^c$-точная, $d$-замкнутая.
3. $\eta$ – $\partial$-точная, $\overline{\partial}$-замкнутая.

**Тогда $\eta \in \operatorname{im} dd^c = \operatorname{im} \partial\overline{\partial}$.**

## Невырожденная нульмерная квадрика

**ЛЕММА:** Пусть $V$ – 2-мерное вещественное векторное пространство, снабженное положительно определенным скалярным произведением $q$, а $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ его комплексификация. Тогда

в $V_{\mathbb{C}}$ **есть ровно два одномерных подпространства** $L_+, L_- \subset V_{\mathbb{C}}$ **таких, что** $q\big|_{V_\pm} = 0$

**отображение** $l \to \operatorname{Re}(l)$ **задает изоморфизм между** $L_\pm$ **и** $V$**,** причем $L_+ = \overline{L}_-$, и $L_+$ **и** $L_-$ **задают на** $V$ **противоположную ориентацию**.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Пусть $x, y$ – ортонормированный базис в $V$. Тогда $q(ax + by) = a^2 + b^2$, и это зануляется, только если $a = \pm\sqrt{-1}\, b$. Получаем $L_+ = \langle x + \sqrt{-1}\, y\rangle$, $L_- = \langle x - \sqrt{-1}\, y\rangle$, или наоборот. ■

## Пространство периодов и $++$-грассманиан

Пусть $V$ – вещественное векторное пространство, снабженное скалярным произведением $q$. Обозначим за $\mathbb{P}\mathrm{er}(V)$ множество прямых $l \in \mathbb{P}V_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих $q(l,l) = 0$ и $q(l,\bar{l}) > 0$, и пусть $\mathrm{Gr}_{+,+}(V)$ – пространство ориентированных 2-мерных плоскостей $W \subset V$, таких, что $q|_W$ положительно определено.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Для каждого $W \in \mathrm{Gr}_{+,+}(V)$, рассмотрим оператор поворота на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки: $I_B: W \to W$. Обозначим за $P(B) \in \mathbb{P}V_{\mathbb{C}}$ прямую, порожденную $x + \sqrt{-1}\, I_B(x)$, для $x \in B$. Тогда **$P$ задает биекцию $P: \mathrm{Gr}_{+,+}(V) \to \mathbb{P}\mathrm{er}(V)$.**

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть $l = x + \sqrt{-1}\, I_B(x)$. Поскольку $q(l,l) = q(x,x) - q(x,x) = 0$ и $q(l,\bar{l}) = q(x,x) + q(x,x) > 0$, **$P$ отображает $\mathrm{Gr}_{+,+}(V)$ в $\mathbb{P}\mathrm{er}(V)$.**

**Шаг 2:** Для каждой точки $W \subset \mathrm{Gr}_{+,+}(V)$ **прообраз $L_+ \in \mathbb{P}\mathrm{er}(V)$ единственный в силу предыдущей леммы.** ■

**СЛЕДСТВИЕ: Пространство периодов для K3-поверхности изоморфно $SO(19,3)/SO(2) \times SO(19,1)$.**

## Пространство периодов и гиперкэлеровы структуры

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Пусть $M$ – K3, а $\operatorname{Teich}_h^{\operatorname{Vol}}(M)$ – пространстве Тейхмюллера всех гиперкэлеровых структур $(M, I, J, K, g)$ таких, что $\operatorname{Vol}_g(M) = 1$. Рассмотрим пространство $\operatorname{St}_3(H^2(M, \mathbb{R}))$ всех ортонормированных троек векторов в $H^2(M, \mathbb{R})$. **Раньше было доказано, что $\operatorname{Teich}_h^{\operatorname{Vol}}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} \operatorname{St}_3(H^2(M, \mathbb{R}))$ – открытое отображение.**

Рассмотрим следующую диаграмму пространств Тейхмюллера и пространств периодов:

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Teich}_h^{\operatorname{Vol}}(M) & \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} & \operatorname{St}_3(H^2(M, \mathbb{R})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Teich}(M) & \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} & \operatorname{Gr}_{+,+}(V)
\end{array}$$

Здесь первая вертикальная стрелка переводит $(M, I, J, K, g)$ в $(M, I)$, вторая переводит $(\omega_I, \omega_J, \omega_K) \in \operatorname{St}_3(H^2(M, \mathbb{R}))$ в $\langle \omega_J, \omega_K \rangle$.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:**
**Все стрелки в этой диаграмме – открытые отображения.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Вертикальные стрелки представляют собой локально тривиальные расслоения, поэтому открыты, верхнее отображение периодов открыто, как было уже доказано, а нижнее открыто в силу коммутативности этой диаграммы. ■

## Локальная теорема Торелли

**УПРАЖНЕНИЕ:** Пусть $M$ – K3. Рассмотрим отображение периодов $\Psi : \operatorname{Comp}(M) \to \mathbb{P}\mathrm{er}$. **Тогда все слои $\Psi$ локально линейно связны.**

**УКАЗАНИЕ:** Надо построить локально ретракцию из пространства невырожденных 2-форм в пространство $\widetilde{\operatorname{Comp}}(M)$ всех невырожденных, замкнутых 2-форм, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$.

**ТЕОРЕМА: (Локальная теорема Торелли для K3) Отображение периодов $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} \mathbb{P}\mathrm{er}$ этально, т.е. задается гомеоморфизмом в окрестности каждой точки $I \in \operatorname{Teich}(M)$.**

**Доказательство. Шаг 1:** Поскольку $\mathcal{P}\mathrm{er}$ открыто, и непрерывно, **достаточно показать, что в окрестности каждой точки $I \in \operatorname{Teich}(M)$ оно задает биекцию этой окрестности на ее образ.**

## Локальная теорема Торелли (продолжение)

**Шаг 2:** Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Comp}(M) & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{P}\mathrm{er} \\ {\scriptstyle \Psi_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} \\ \mathrm{Teich}(M) & \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} & \mathbb{P}\mathrm{er} \end{array}$$

Осталось проверить, что **каждая связная компонента слоя $\Psi$ равна связной компоненте слоя $\Psi_0$, то есть орбите $\mathrm{Diff}_0(M)$.**

**Шаг 3:** Как и в доказательстве теоремы Мозера, мы свели локальную теорему Торелли к следующему утверждению.

**Теорема 1:** Пусть $I_t: [0,1] \to \mathrm{Comp}(M)$ – семейство комплексных структур на K3, причем периоды у них одинаковы. **Тогда существует семейство диффеоморфизмов $V_t \in \mathrm{Diff}_0(M)$, переводящих $I_0$ в $I_t$.**

## Теорема Мозера для отображения периодов

Комплексные структуры находятся в биективном соответствии $\mathbb{P}\widetilde{\operatorname{Comp}}(M)$, где $\widetilde{\operatorname{Comp}}(M)$ – множество замкнутых, невырожденных комплексных 2-форм $\Omega$, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$. Отображение периодов переводит $\Omega \in \widetilde{\operatorname{Comp}}(M)$ в его класс когомологий. Значит, Теорема 1 вытекает из следующей.

**Теорема 2:** Пусть $\Omega_t: [0,1] \to \tilde{\operatorname{Comp}}(M)$ – семейство замкнутых, невырожденных комплексных 2-форм, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$, причем класс когомологий $[\Omega_t] \in H^2(M, \mathbb{C})$ не зависит от $t$. **Тогда существует семейство диффеоморфизмов $V_t \in \operatorname{Diff}_0(M)$, таких, что $V_t^*\Omega_0 = \Omega_t$.**

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть $\Omega_t' := \frac{d\Omega_t}{dt}$. Если найдется векторное поле $X_t$ такое, что $\operatorname{Lie}_{X_t}\Omega_t = \Omega_t'$, то

$$V_{t_1}^*\Omega_0 = \int_0^{t_1} \operatorname{Lie}_{X_t}\Omega_t dt = \int_0^{t_1} \frac{d\Omega_t}{dt} dt = \Omega_{t_1}$$

для потока диффеоморфизмов $V_t$, полученного из формулы $\frac{dV_t}{dt} = X_t$. **Осталось найти $X_t$.**

## Теорема Мозера для отображения периодов (продолжение)

**Нам нужно найти векторное поле $X_t$ такое, что $\operatorname{Lie}_{X_t} \Omega_t = \Omega'_t$.**
**Шаг 2:** Отображение подстановки $\Lambda^{2,0} M \otimes_{\mathbb R} T_{\mathbb R} M \to \Lambda^{1,0}(M)$ сюрьективно **(проверьте).**

**Шаг 3:** Поскольку $\Omega'_t$ точно, имеем $\Omega'_t = d\alpha_t$. Если $\alpha_t$ – (1,0)-форма, ее можно получить как $\Omega_t \lrcorner X_t$ в силу предыдущего шага, что дает $\Omega'_t = d\alpha_t = d(\Omega_t \lrcorner X_t) = \operatorname{Lie}_{X_t} \Omega_t$. **Для доказательства осталось найти $\alpha_t \in \Lambda^{1,0}(M)$ такую, что $\Omega'_t = d\alpha_t$.**

**Шаг 4:** Дифференцируя $\Omega_t^2 = 0$, получаем $\Omega'_t \wedge \Omega_t = 0$. **Это дает $\Omega'_t \in \Lambda^{1,1}(M) + \Lambda^{2,0}(M)$.**

**Шаг 5:** В силу шага 3 и шага 4, **Теорема 2 следует из такой леммы.**
**ЛЕММА:** Пусть $M$ компактное кэлерово многообразие, а $\eta \in \Lambda^{1,1}(M) + \Lambda^{2,0}(M)$ – точная. **Тогда $\eta = d\alpha$, для какой-то $\alpha \in \Lambda^{1,0}(M)$.**

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть $\eta = d\beta$, где $\beta = \beta^{1,0} + \beta^{0,1}$ Поскольку $\eta \in \Lambda^{1,1}(M) + \Lambda^{2,0}(M)$, имеем $\bar\partial(\beta^{0,1}) = 0$. Значит, $d\beta^{0,1}$ – точная (1,1)-форма.

**Шаг 2:** Применив $dd^c$-лемму, получаем $\beta^{0,1} = \bar\partial\psi$. Теперь $\eta = d(\beta - d\psi)$, а $\beta - d\psi = \beta^{1,0} + \beta^{0,1} - \partial\psi - \beta^{0,1}$ – (1,0)-форма. ■