

Комплексные поверхности,

лекция 6: теорема Торелли для КЗ-поверхностей

Миша Вербицкий

НМУ/матфак ВШЭ, Москва

19 марта 2012

Пространства Фреше (повторение)

Определение: Пусть V - векторное пространство над \mathbb{R} . Функция $\nu : V \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ называется **полунормой** на V , если имеет место следующее

(*) **Неравенство треугольника:** $\nu(v + v') \leq \nu(v) + \nu(v')$.

(**) **Инвариантность относительно гомотетии:** $\nu(\lambda v) = |\lambda|\nu(v)$.

Векторное пространство с полунормой надделено **полуметрикой**, по формуле $d(x, y) = \nu(x - y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $(V, \{\nu_\alpha\})$ – пространство, снабженное системой полунорм. Последовательность x_i **сходится к x в этой системе полунорм**, если $\lim_i \nu_\alpha(x_i - x) = 0$ для всех полунорм ν_α . Говорится, что $(M, \{d_\alpha\})$ **полно**, если **каждая последовательность Коши имеет предел в топологии, заданной полуметриками**.

Определение: Пусть V – топологическое векторное пространство с хаусдорфовой топологией. V называется **пространством Фреше**, когда топология на V может быть задана полной, счетной системой полунорм $\{\nu_\alpha\}$.

Пространство гладких функций на отрезке (повторение)

Определение: Пусть $C^\infty([0, 1])$ – пространство гладких функций на отрезке. Рассмотрим, для каждого n , норму $|f|_{C^n}$, определенную следующим образом:

$$|f|_{C^0} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad |f|_{C^1} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + |f'(x)|, \quad \dots,$$

$$|f|_{C^n} := \sup_{x \in [0,1]} \sum_{i=0}^n |f^{(i)}(x)|.$$

Утверждение:

$C^\infty([0, 1])$ с такой системой полунорм – пространство Фреше.

Доказательство: Поскольку

$$|\varphi|_{C^n} \geq |\varphi^{(k)}|_{C^{n-k}},$$

для любой последовательности Коши $\{f_i\}, \{f_i^{(k)}\}$ – тоже последовательность Коши. Предел последовательности $\{f_i\}$ будет k -кратной первообразной для предела $\{f_i^{(k)}\}$, значит, предел $\{f_i\}$ – гладкий.

Многообразия Фреше (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Многообразие Фреше есть топологическое пространство, снабженное атласом $\{U_i\}$, где каждая из карт U_i реализована как открытое подмножество в каком-то пространстве Фреше, а все функции перехода гладкие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Гладкое отображение многообразий Фреше - такое, которое задается гладкими отображениями в каждой из карт.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа Ли-Фреше есть группа, снабженная структурой многообразия Фреше, таким образом, что все групповые операции являются гладкими.

ЗАМЕЧАНИЕ: Заменяя "Фреше" на "банаховы", получим определение банахова многообразия и банаховой группы Ли.

Пространство Тейхмюллера (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Отныне и до конца лекции, **многообразие M предполагается компактным.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\text{Diff}_0(M)$ – связная компонента группы диффеоморфизмов, а Symp – многообразие Фреше всех симплектических форм на M . **Пространство Тейхмюллера Teich_s симплектических форм на M** есть фактор $\text{Teich}_s := \text{Symp} / \text{Diff}_0(M)$, с индуцированной топологией.

ЗАМЕЧАНИЕ: Аналогичным образом определяется пространство Тейхмюллера комплексных структур, эрмитовых, кэлеровых, гиперкэлеровых и так далее.

Теорема Мозера и отображение периодов (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение периодов $\text{Teich}_s \xrightarrow{\text{Per}} H^2(M, \mathbb{R})$ переводит симплектическую форму ω в ее класс когомологий $[\omega]$.

ТЕОРЕМА: (Мозер) Пусть M – компактное симплектическое многообразие, а Teich_s – симплектическое пространство Тейхмюллера. В какой-то окрестности $U \subset \text{Teich}_s$ каждой точки $x \in \text{Teich}_s$, **отображение периодов** $\text{Teich}_s \rightarrow H^2(M, \mathbb{R})$ – **гомеоморфизм** U на его образ.

ЗАМЕЧАНИЕ: Таким образом, **пространство Тейхмюллера для симплектических структур на M является многообразием.**

Пусть Symp_ω – множество всех симплектических структур на M , класс когомологий которых равен $[\omega]$. Для доказательства теоремы Мозера **достаточно проверить, что $\text{Diff}_0(M)$ действует транзитивно на Symp_ω в какой-то окрестности ω .**

ТЕОРЕМА: (теорема Мозера, вариант 2)

Пусть Symp_ω^0 – связная компонента Symp_ω . **Тогда $\text{Diff}_0(M)$ действует транзитивно на Symp_ω^0**

Теорема Мозера и локальная связность (повторение)

Поскольку Symp_ω – открытая часть линейного пространства, Symp_ω локально линейно связно.

Поэтому **теорема Мозера следует из следующей теоремы.**

ТЕОРЕМА: (теорема Мозера, канонический вариант)

Пусть ω_t – семейство симплектических форм на M , гладко зависящих от параметра t . Предположим, что все ω_t когомологичны. **Тогда найдется диффеоморфизм $\Psi_t \in \text{Diff}_0(M)$, такой, что $\Psi_t^* \omega_0 = \omega_t$.**

Доказательство: Мы построим Ψ_t как решение уравнения $\frac{d\Psi_t}{dt} = V_t$, где $V_t \in TM$ – векторное поле, зависящее от параметра t .

Доказательство теоремы Мозера (повторение)

ТЕОРЕМА: (теорема Мозера, канонический вариант)

Пусть ω_t – семейство симплектических форм на M , гладко зависящих от параметра t . Предположим, что все ω_t когомологичны. **Тогда найдется диффеоморфизм $\Psi_t \in \text{Diff}_0(M)$, такой, что $\Psi_t^* \omega_0 = \omega_t$.**

Доказательство: Мы построим Ψ_t как решение уравнения $\frac{d\Psi_t}{dt} = V_t$, где $V_t \in TM$ – векторное поле, зависящее от параметра t .

Шаг 1: Поскольку ω_t все когомологичны, форма $\frac{d\omega_t}{dt}$ точна. Значит, $\frac{d\omega_t}{dt} = d\eta_t$, где $\eta_t \in \Lambda^1(M)$.

Шаг 2: Пусть X_t – векторное поле, такое, что $\omega_t \lrcorner X_t = \eta_t$. По формуле Картана, $\text{Lie}_{X_t} \omega_t = d(\omega_t \lrcorner X_t) = d\eta_t = \frac{d\omega_t}{dt}$.

Шаг 3: Интегрируя по t обе части $\text{Lie}_{X_t} \omega_t = \frac{d\omega_t}{dt}$, получаем

$$\Psi_{t_1}^* \omega_0 = \int_0^{t_1} \text{Lie}_{X_t} \omega_t dt = \int_0^{t_1} \frac{d\omega_t}{dt} dt = \omega_{t_1}$$

■

К3-поверхности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **К3-поверхность** есть комплексная поверхность с $b_1 = 0$ и $c_1 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Все поверхности с $b_1 = 0$ - кэлеровы (Бухсдаль-Ламари).

УТВЕРЖДЕНИЕ: Каноническое расслоение K_M тривиально.

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Римана-Роха дает $\chi(\mathcal{O}_M) = 2 = \frac{c_2(M)}{12}$, значит, $c_2(M) = 24$. Поскольку $c_2(M)$ есть эйлерова характеристика M , получаем $b_2(M) = 22$.

Это дает ромб Ходжа для К3-поверхности:

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & & 0 & 0 \\ 1 & & 20 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & 1 & \end{array}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Когомологии К3 не имеют кручения.

Гиперкэлэровы многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гиперкомплексное многообразие** есть гладкое многообразие, снабженное комплексными структурами $I, J, K : TM \rightarrow TM$, которые удовлетворяют кватернионным соотношениям: $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\text{Id}$. **Гиперкэлэрово многообразие** есть гиперкомплексное многообразие, снабженное римановой метрикой g , которая кэлэрова по отношению к I, J, K .

ЗАМЕЧАНИЕ: Кэлэровость I равносильна условию $\nabla(I) = 0$, где ∇ – связность Леви-Чивита, а гиперкэлэровость – **условию $\nabla(I) = \nabla(J) = \nabla(K) = 0$ плюс кватернионные соотношения.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $h \in \mathbb{H}$ – унитарный кватернион, а (M, I, J, K, g) – гиперкэлэрово многообразие. Тогда $(M, hIh^{-1}, hJh^{-1}, hKh^{-1}, g)$ – тоже гиперкэлэрово многообразие (**проверьте это**). Многообразия (M, I, J, K, g) и $(M, hIh^{-1}, hJh^{-1}, hKh^{-1}, g)$ называются **эквивалентными**.

Гиперкэлеровы структуры на КЗ-поверхности (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I, g) – КЗ-поверхность, где g – кэлерова метрика. Тогда M допускает гиперкэлерову структуру (M, I, J, K, g) тогда и только тогда, когда g Риччи-плоская.

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I) – КЗ-поверхность, $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ ее кэлеров класс, Ω – голоморфная симплектическая форма. Предположим, что $\text{Re } \Omega^2 = [\omega]^2$. Тогда на (M, I) существует и единственна гиперкэлерова структура, такая, что $[\omega_I] = [\omega]$, $\omega_J = \text{Re } \Omega$, $\omega_K = \text{Im } \Omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для гиперкэлеровой структуры на поверхности, $\int_M \omega_I \wedge \omega_J = \int \omega_I \wedge \omega_K = \int \omega_J \wedge \omega_K = 0$, $\int_M \omega_I^2 = \int_M \omega_J^2 = \int_M \omega_K^2$ (проверьте это). Назовем базис, удовлетворяющий этим условиям, **конформно ортонормальным**.

Отображение периодов для гиперкэлеровых структур (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа изотопий** $\text{Diff}_0(M)$ многообразия M есть связная компонента группы диффеоморфизмов M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство Тейхмюллера** $\text{Teich}_{hk}(M)$ гиперкэлеровых структур есть фактор пространства всех гиперкэлеровых структур на M по $\text{Diff}_0(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за $\text{St}_3^c(H^2(M, \mathbb{R}))$ пространство конформно ортонормированных троек классов $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in H^2(M, \mathbb{R})$. **Отображение периодов** $\text{Teich}_{hk}(M) \xrightarrow{\text{Per}} \text{St}_3^c(H^2(M, \mathbb{R}))$ переводит гиперкэлерову структуру I, J, K, g в тройку $\omega_I, \omega_J, \omega_K \in \text{St}_3^c(H^2(M, \mathbb{R}))$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Открытое отображение** есть отображение, переводящее открытые множества в открытые.

ТЕОРЕМА: Пусть M - КЗ-поверхность. Тогда **отображение** $\text{Teich}_{hk}(M) \xrightarrow{\text{Per}} \text{St}_3^c(H^2(M, \mathbb{R}))$ **открыто в** $\text{St}_3^c(H^2(M, \mathbb{R}))$.

Комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пучок колец есть пучок $U \rightarrow \mathcal{F}(U)$ такой, что на каждом $\mathcal{F}(U)$ задана структура кольца, а отображения ограничения являются гомоморфизмами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Окольцованное пространство есть топологическое пространство с заданным на нем пучком колец.

ПРИМЕР: Открытый шар $B \subset \mathbb{C}^n$ с пучком \mathcal{O}_B голоморфных функций является окольцованным пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Комплексное многообразие (M, \mathcal{O}_M) есть окольцованное пространство, которое локально изоморфно (как окольцованное пространство) открытому шару (B, \mathcal{O}_B) .

Почти комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексная структура на многообразии есть оператор $I \in \text{End } TM$ в эндоморфизмах касательного расслоения, удовлетворяющий $I^2 = -\text{Id}_{TM}$.

Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие. Обозначим за

$$\Lambda^{*,0}(M) := \bigoplus_p \Lambda^{p,0}(M), \quad \Lambda^{0,*}(M) := \bigoplus_q \Lambda^{0,q}(M)$$

подалгебры в алгебре де Рама, порожденные $\Lambda^{1,0}(M) = (T^*M)^{1,0}$ и $\Lambda^{0,1}(M) = (T^*M)^{0,1}$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Разложение Ходжа на дифференциальных формах записывается $\Lambda^*(M) = \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q}(M)$, причем $\Lambda^{p,q}(M) = \Lambda^{p,0}(M) \wedge \Lambda^{0,q}(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ на почти комплексном многообразии называется **голоморфной**, если $df \in \Lambda^{1,0}(M)$.

Интегрируемые почти комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное многообразие (M, I) называется **интегрируемым**, если M , окольцованное пучком голоморфных функций, является комплексным многообразием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, $T^{1,0} \subset TM \otimes \mathbb{C}$ – подрасслоение векторов типа $(1, 0)$, а $[T^{1,0}, T^{1,0}] \xrightarrow{N} TM \otimes \mathbb{C} / T^{1,0}$ – скобка Фробениуса. Отождествив $TM \otimes \mathbb{C} / T^{1,0}$ с $T^{0,1}$, мы представим N как оператор

$$N : \Lambda^2(T^{1,0}M) \rightarrow T^{0,1}M.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Этот оператор называется **тензором Ниейхойса** (Nijenhuis tensor). Его можно представить как сечение $N \in \Lambda^{2,0}M \otimes T^{0,1}M$.

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I) – гладкое почти комплексное многообразие, причем $[T^{0,1}, T^{0,1}] \subset T^{0,1}$. **Тогда почти комплексная структура I интегрируема.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Это то же самое, что зануление тензора Ниейхойса.

ЗАМЕЧАНИЕ: Подрасслоение $V \subset TM$, удовлетворяющее $[V, V] \subset V$, называется **инволютивным**.

Комплексные структуры и симплектические 2-формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\Omega \in \Lambda^2(M, \mathbb{C})$ – комплексная 2-форма. Такая форма называется **невырожденной**, если $\operatorname{Re} \Omega$ либо $\operatorname{Im} \Omega$ – невырожденные 2-формы.

ТЕОРЕМА: Пусть M – вещественное 4-мерное многообразие, а $\Omega \in \Lambda^2(M, \mathbb{C})$ – замкнутая, невырожденная комплексная 2-форма. Предположим, что $\Omega^2 = 0$. Тогда **на M существует комплексная структура I такая, что Ω – голоморфная симплектическая форма на (M, I) .**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\Omega^2 = 0$, форма Ω **разложима**, то есть представляется в виде $\Omega = \xi \wedge \zeta$ для каких-то 1-форм $\xi, \zeta \in \Lambda^1(M, \mathbb{C})$ **(докажите это).**

Шаг 2: Ядро формы Ω есть множество всех векторов $x \in TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, таких, что $\Omega(x, \cdot) = 0$. **В силу шага 1, $\dim_{\mathbb{C}} \ker \Omega \geq 2$.**

Шаг 3: Обозначим $\operatorname{Re} \Omega$ за ω_1 и $\operatorname{Im} \Omega$ за ω_2 . Поскольку $\Omega^2 = 0$, имеем $\omega_1^2 = \omega_2^2$ и $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. Значит, **форма $\Omega \wedge \bar{\Omega} = \omega_1^2 + \omega_2^2 = 2\omega_1^2$ невырожденна.**

Комплексные структуры и симплектические 2-формы (продолжение)

Шаг 3: Обозначим $\operatorname{Re} \Omega$ за ω_1 и $\operatorname{Im} \Omega$ за ω_2 . Поскольку $\Omega^2 = 0$, имеем $\omega_1^2 = \omega_2^2$ и $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. Значит, **форма $\Omega \wedge \bar{\Omega} = \omega_1^2 + \omega_2^2 = 2\omega_1^2$ невырождена.**

Шаг 4: Значит, $\dim_{\mathbb{C}} \ker \Omega > 2$. Поскольку Ω симплектична на $TM / \ker \Omega$, пространство $\ker \Omega$ четномерно. Из шага 2 получаем, что $\dim \ker \Omega = 2$ везде на M , то есть **$\ker \Omega$ есть двумерное подрасслоение в $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.**

Шаг 5: По формуле Картана, $0 = d\Omega(x, y, z) = \operatorname{Lie}_x \Omega(x, y) - \operatorname{Lie}_y \Omega(x, z) + \operatorname{Lie}_z \Omega(x, y) + \Omega([x, y], z) - \Omega(y, [x, z]) + \Omega(x, [y, z])$. (*)

Если $x, y \in \ker \Omega$, все слагаемые (*), кроме одного, автоматически за-нуляются, и мы получаем $\Omega([x, y], z) = 0$ (для любого z), иначе говоря, $[x, y] \in \ker \Omega$, и **$\ker \Omega$ – инволютивное подрасслоение.**

Шаг 6: Локально, имеем $\Omega = \xi \wedge \zeta$. Если плоскость $\langle \xi, \zeta \rangle$, порожденная ξ, ζ , пересекается с $\langle \bar{\xi}, \bar{\zeta} \rangle$, мы получим $\Omega \wedge \bar{\Omega} = 0$. В силу шага 3, это невозможно. Значит, **$\ker \Omega$ не пересекается с $\overline{\ker \Omega}$.**

Шаг 7: Рассмотрим оператор $I : TM \rightarrow TM$, который равен $\sqrt{-1}$ на $\ker \Omega$ и $-\sqrt{-1}$ на $\overline{\ker \Omega}$. Поскольку $\bar{I} = I$, это оператор почти комплексной структуры. **$T^{1,0}M = \ker \Omega$ инволютивно, значит, I интегрируема. ■**

Отображение периодов для КЗ-поверхности

Мы получили такое следствие

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M – КЗ-поверхность, а V – множество всех невырожденных комплексных 2-форм $\Omega \in \Lambda^2(M, \mathbb{C})$, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{P}V := V/\mathbb{C}^*$. Тогда **множество $\mathbb{P}V$ находится в биективном соответствии с множеством $\text{Comp}(M)$ комплексных структур на M .**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\text{Comp}(M)$ есть множество всех интегрируемых почти комплексных структур на многообразии, с топологией, индуцированной топологией Фреше на пространстве тензоров. **Пространство Тейхмюллера $\text{Teich}(M)$ комплексных структур** есть факторпространство $\text{Comp}(M)/\text{Diff}_0(M)$, где $\text{Diff}_0(M)$ есть **группа изотопий** (связная компонента группы диффеоморфизмов).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M есть КЗ-поверхность. **Отображение периодов $\text{Teich}(M) \xrightarrow{\text{Per}} \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{C})$** сопоставляет каждой комплексной структуре I на M прямую $H^{2,0}(M, I) \subset H^2(M, \mathbb{C})$.

Пространство периодов для КЗ-поверхности

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $l \in \text{Per}(\text{Teich}(M))$ - класс когомологий в образе отображения периодов. Тогда $l \wedge l = 0$ (потому что это $(2,0)$ -форма) и $l \wedge \bar{l} > 0$, потому что $l = \xi \wedge \zeta$ для каких-то $\xi, \zeta \in \Lambda^{1,0}(M, I)$ и $l \wedge \bar{l} = \xi \wedge \zeta \wedge \bar{\xi} \wedge \bar{\zeta}$. локально в окрестности каждой точки M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство периодов** КЗ-поверхности есть пространство $\mathbb{P}\text{er} \subset \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{C})$ состоящее из всех прямых $\mathbb{C} \cdot l$ таких, что $l \wedge l = 0$ и $l \wedge \bar{l} > 0$. **Отображение периодов** есть отображение $\text{Teich}(M) \xrightarrow{\text{Per}} \mathbb{P}\text{er}$.

Основной результат этой лекции:

ТЕОРЕМА: **(Локальная теорема Торелли для КЗ) Отображение периодов** $\text{Teich}(M) \xrightarrow{\text{Per}} \mathbb{P}\text{er}$ **этално, т.е. задается гомеоморфизмом в окрестности каждой точки $I \in \text{Teich}(M)$.**

Скрученный дифференциал d^c (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – комплексное многообразие, $I : TM \rightarrow TM$ – оператор комплексной структуры, $I^2 = -\text{Id}_{TM}$. **скрученный дифференциал** d^c определяется формулой $d^c := I^{-1}dI$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M, I) – комплексное многообразие. Тогда $\partial := \frac{d + \sqrt{-1}d^c}{2}$, $\bar{\partial} := \frac{d - \sqrt{-1}d^c}{2}$ – компоненты в разложении Ходжа d : $\partial = d^{1,0}$, $\bar{\partial} = d^{0,1}$.

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие. **Тогда следующие утверждения равносильны:**

1. I интегрируемо.
2. $\partial^2 = 0$.
3. $\bar{\partial}^2 = 0$.
4. $dd^c = -d^cd$
5. $dd^c = 2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}$.

ТЕОРЕМА: (dd^c -лемма)

Пусть η – форма на компактном кэлеровом многообразии, которая удовлетворяет какому-то из условий

1. η – точная (p, q) -форма.
2. η – d^c -точная, d -замкнутая.
3. η – ∂ -точная, $\bar{\partial}$ -замкнутая.

Тогда $\eta \in \text{im } dd^c = \text{im } \partial\bar{\partial}$.

Невырожденная нульмерная квадратика

ЛЕММА: Пусть V – 2-мерное вещественное векторное пространство, снабженное положительно определенным скалярным произведением q , а $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ его комплексификация. Тогда

в $V_{\mathbb{C}}$ есть ровно два одномерных подпространства $L_+, L_- \subset V_{\mathbb{C}}$ таких, что $q|_{V_{\pm}} = 0$

отображение $l \rightarrow \operatorname{Re}(l)$ задает изоморфизм между L_{\pm} и V , причем $L_+ = \overline{L_-}$, и L_+ и L_- задают на V противоположную ориентацию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть x, y – ортонормированный базис в V . Тогда $q(ax + by) = a^2 + b^2$, и это зануляется, только если $a = \pm\sqrt{-1}b$. Получаем $L_+ = \langle x + \sqrt{-1}y \rangle$, $L_- = \langle x - \sqrt{-1}y \rangle$, или наоборот. ■

Пространство периодов и $++$ -грассманиан

Пусть V – вещественное векторное пространство, снабженное скалярным произведением q . Обозначим за $\text{Per}(V)$ множество прямых $l \in \mathbb{P}V_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих $q(l, l) = 0$ и $q(l, \bar{l}) > 0$, и пусть $\text{Gr}_{+,+}(V)$ – пространство ориентированных 2-мерных плоскостей $W \subset V$, таких, что $q|_W$ положительно определено.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для каждого $W \in \text{Gr}_{+,+}(V)$, рассмотрим оператор поворота на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки: $I_B : W \rightarrow W$. Обозначим за $P(B) \in \mathbb{P}V_{\mathbb{C}}$ прямую, порожденную $x + \sqrt{-1} I_B(x)$, для $x \in B$. Тогда P **задает биекцию** $P : \text{Gr}_{+,+}(V) \rightarrow \text{Per}(V)$.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $l = x + \sqrt{-1} I_B(x)$. Поскольку $q(l, l) = q(x, x) - q(x, x) = 0$ и $q(l, \bar{l}) = q(x, x) + q(x, x) > 0$, P **отображает** $\text{Gr}_{+,+}(V)$ **в** $\text{Per}(V)$.

Шаг 2: Для каждой точки $W \subset \text{Gr}_{+,+}(V)$ **прообраз** $L_+ \in \text{Per}(V)$ **единственный в силу предыдущей леммы.** ■

СЛЕДСТВИЕ: Пространство периодов для КЗ-поверхности изоморфно $SO(19, 3)/SO(2) \times SO(19, 1)$.

Пространство периодов и гиперкэлеровы структуры

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – КЗ, а $\text{Teich}_h^{\text{Vol}}(M)$ – пространстве Тейхмюллера всех гиперкэлеровых структур (M, I, J, K, g) таких, что $\text{Vol}_g(M) = 1$. Рассмотрим пространство $\text{St}_3(H^2(M, \mathbb{R}))$ всех ортонормированных троек векторов в $H^2(M, \mathbb{R})$. **Раньше было доказано, что $\text{Teich}_h^{\text{Vol}}(M) \xrightarrow{\text{Per}} \text{St}_3(H^2(M, \mathbb{R}))$ – открытое отображение.**

Рассмотрим следующую диаграмму пространств Тейхмюллера и пространств периодов:

$$\begin{array}{ccc} \text{Teich}_h^{\text{Vol}}(M) & \xrightarrow{\text{Per}} & \text{St}_3(H^2(M, \mathbb{R})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Teich}(M) & \xrightarrow{\text{Per}} & \text{Gr}_{+,+}(V) \end{array}$$

Здесь первая вертикальная стрелка переводит (M, I, J, K, g) в (M, I) , вторая переводит $(\omega_I, \omega_J, \omega_K) \in \text{St}_3(H^2(M, \mathbb{R}))$ в $\langle \omega_J, \omega_K \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ:

Все стрелки в этой диаграмме – открытые отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Вертикальные стрелки представляют собой локально тривиальные расслоения, поэтому открыты, верхнее отображение периодов открыто, как было уже доказано, а нижнее открыто в силу коммутативности этой диаграммы. ■

Локальная теорема Торелли

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть M – КЗ. Рассмотрим отображение периодов $\Psi : \text{Comp}(M) \rightarrow \mathbb{P}\text{er}$. **Тогда все слои Ψ локально линейно связны.**

УКАЗАНИЕ: Надо построить локально ретракцию из пространства невырожденных 2-форм в пространство $\widetilde{\text{Comp}}(M)$ всех невырожденных, замкнутых 2-форм, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$.

ТЕОРЕМА: (Локальная теорема Торелли для КЗ) Отображение периодов $\text{Teich}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\text{er}} \mathbb{P}\text{er}$ этально, т.е. задается гомеоморфизмом в окрестности каждой точки $I \in \text{Teich}(M)$.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\mathcal{P}\text{er}$ открыто, и непрерывно, достаточно показать, что в окрестности каждой точки $I \in \text{Teich}(M)$ оно задает биекцию этой окрестности на ее образ.

Локальная теорема Торелли (продолжение)

Шаг 2: Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Comp}(M) & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{P}er \\
 \Psi_0 \downarrow & & \text{Id} \downarrow \\
 \text{Teich}(M) & \xrightarrow{\mathcal{P}er} & \mathbb{P}er
 \end{array}$$

Осталось проверить, что **каждая связная компонента слоя Ψ равна связной компоненте слоя Ψ_0 , то есть орбите $\text{Diff}_0(M)$.**

Шаг 3: Как и в доказательстве теоремы Мозера, мы свели локальную теорему Торелли к следующему утверждению.

Теорема 1: Пусть $I_t : [0, 1] \rightarrow \text{Comp}(M)$ – семейство комплексных структур на КЗ, причем периоды у них одинаковы. **Тогда существует семейство диффеоморфизмов $V_t \in \text{Diff}_0(M)$, переводящих I_0 в I_t .**

Теорема Мозера для отображения периодов

Комплексные структуры находятся в биективном соответствии $\mathbb{P}\widetilde{\text{Com}}(M)$, где $\widetilde{\text{Com}}(M)$ – множество замкнутых, невырожденных комплексных 2-форм Ω , удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$. Отображение периодов переводит $\Omega \in \widetilde{\text{Com}}(M)$ в его класс когомологий. Значит, Теорема 1 вытекает из следующей.

Теорема 2: Пусть $\Omega_t : [0, 1] \rightarrow \widetilde{\text{Com}}(M)$ – семейство замкнутых, невырожденных комплексных 2-форм, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$, причем класс когомологий $[\Omega_t] \in H^2(M, \mathbb{C})$ не зависит от t . **Тогда существует семейство диффеоморфизмов $V_t \in \text{Diff}_0(M)$, таких, что $V_t^* \Omega_0 = \Omega_t$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\Omega'_t := \frac{d\Omega_t}{dt}$. Если найдется векторное поле X_t такое, что $\text{Lie}_{X_t} \Omega_t = \Omega'_t$, то

$$V_{t_1}^* \Omega_0 = \int_0^{t_1} \text{Lie}_{X_t} \Omega_t dt = \int_0^{t_1} \frac{d\Omega_t}{dt} dt = \Omega_{t_1}$$

для потока диффеоморфизмов V_t , полученного из формулы $\frac{dV_t}{dt} = X_t$.

Осталось найти X_t .

Теорема Мозера для отображения периодов (продолжение)

Нам нужно найти векторное поле X_t такое, что $\text{Lie}_{X_t} \Omega_t = \Omega'_t$.

Шаг 2: Отображение подстановки $\Lambda^{2,0} M \otimes_{\mathbb{R}} T_{\mathbb{R}} M \rightarrow \Lambda^{1,0}(M)$ сюръективно (проверьте).

Шаг 3: Поскольку Ω'_t точно, имеем $\Omega'_t = d\alpha_t$. Если α_t – $(1,0)$ -форма, ее можно получить как $\Omega_t \lrcorner X_t$ в силу предыдущего шага, что дает $\Omega'_t = d\alpha_t = d(\Omega_t \lrcorner X_t) = \text{Lie}_{X_t} \Omega_t$. **Для доказательства осталось найти $\alpha_t \in \Lambda^{1,0}(M)$ такую, что $\Omega'_t = d\alpha_t$.**

Шаг 4: Дифференцируя $\Omega_t^2 = 0$, получаем $\Omega'_t \wedge \Omega_t = 0$. Это дает $\Omega'_t \in \Lambda^{1,1}(M) + \Lambda^{2,0}(M)$.

Шаг 5: В силу шага 3 и шага 4, **Теорема 2 следует из такой леммы.**

ЛЕММА: Пусть M компактное кэлерово многообразие, а $\eta \in \Lambda^{1,1}(M) + \Lambda^{2,0}(M)$ – точная. **Тогда $\eta = d\alpha$, для какой-то $\alpha \in \Lambda^{1,0}(M)$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\eta = d\beta$, где $\beta = \beta^{1,0} + \beta^{0,1}$. Поскольку $\eta \in \Lambda^{1,1}(M) + \Lambda^{2,0}(M)$, имеем $\bar{\partial}(\beta^{0,1}) = 0$. Значит, $d\beta^{0,1}$ – точная $(1,1)$ -форма.

Шаг 2: Применив dd^c -лемму, получаем $\beta^{0,1} = \bar{\partial}\psi$. Теперь $\eta = d(\beta - d\psi)$, а $\beta - d\psi = \beta^{1,0} + \beta^{0,1} - \partial\psi - \beta^{0,1} = (1,0)$ -форма. ■