Комплексные поверхности,

лекция 7: Гладкие квартики и теорема Лефшеца о гиперплоском сечении

Миша Вербицкий

НМУ/матфак ВШЭ, Москва

26 марта 2012

Теорема Мозера и отображение периодов (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\operatorname{Diff}_0(M)$ – связная компонента группы диффеоморфизмов, а Symp – многообразие Фреше всех симплектических форм на M. **Пространство Тейхмюллера** Teich_s **симплектических форм на** M есть фактор $\operatorname{Teich}_s := \operatorname{Symp} / \operatorname{Diff}_0(M)$, с индуцированной топологией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение периодов $\operatorname{Teich}_s \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} H^2(M, \mathbb{R})$ переводит симплектическую форму ω в ее класс когомологий $[\omega]$.

ТЕОРЕМА: (Мозер) Пусть – компактное симплектическое многообразие, а Teich_s – симплектическое пространство Тейхмюллера. В какой-то окрестности $U \subset \operatorname{Teich}_s$ каждой точки $x \in \operatorname{Teich}_s$, **отображение периодов** $\operatorname{Teich}_s \to H^2(M, \mathbb{R})$ **– гомеоморфизм** U **на его образ.**

Пусть $\operatorname{Symp}_\omega$ – множество всех симплектических структур на M, класс когомологий которых равен $[\omega]$. Для доказательства теоремы Мозера **достаточно проверить, что** $\operatorname{Diff}_0(M)$ **действует транзитивно на** $\operatorname{Symp}_\omega$ **в какой-то окрестности** ω**.**

ТЕОРЕМА: (теорема Мозера, вариант 2)
Пусть $\operatorname{Symp}^0_\omega$ – связная компонента $\operatorname{Symp}_\omega$. **Тогда** $\operatorname{Diff}_0(M)$ **действует транзитивно на** $\operatorname{Symp}^0_\omega$

Теорема Мозера и локальная связность (повторение)

Поскольку Symp_ω – открытая часть линейного пространства, Symp_ω локально линейно связно.

Поэтому **теорема Мозера следует из следующей теоремы.**

ТЕОРЕМА: (теорема Мозера, канонический вариант)
Пусть ω_t – семейство симплектических форм на M, гладко зависящих от параметра t. Предположим, что все ω_t когомологичны. **Тогда найдется диффеоморфизм $\Psi_t \in \mathrm{Diff}_0(M)$, такой, что $\Psi_t^* \omega_0 = \omega_t$.**

Доказательство: Мы построим Ψ_t как решение уравнения $\frac{d\Psi_t}{dt} = X_t$, где $X_t \in TM$ – векторное поле, зависящее от параметра t.

Шаг 1: Поскольку ω_t все когомологичны, форма $\frac{d\omega_t}{dt}$ точна. Значит, $\frac{d\omega_t}{dt} = d\eta_t$, где $\eta_t \in \Lambda^1(M)$. Пусть X_t – векторное поле, такое, что $\omega_t \lrcorner X_t = \eta_t$. **По формуле Картана,** $\mathrm{Lie}_{X_t}\omega_t = d(\omega_t \lrcorner X_t) = d\eta_t = \frac{d\omega_t}{dt}$.

Шаг 2: Интегрируя по t обе части $\mathrm{Lie}_{X_t}\omega_t = \frac{d\omega_t}{dt}$, получаем

$$\Psi_{t_1}^*\omega_0 = \int_0^{t_1} \mathrm{Lie}_{X_t}\omega_t dt = \int_0^{t_1} \frac{d\omega_t}{dt} dt = \omega_{t_1}.$$

■

К3-поверхности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **К3-поверхность** есть комплексная поверхность с $b_1 = 0$ и $c_1 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Все поверхности с $b_1 = 0$ - кэлеровы** (Бухсдаль-Ламари).

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Каноническое расслоение K_M тривиально.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Римана-Роха дает $\chi(\mathcal{O}_M) = 2 = \frac{c_2(M)}{12}$, значит, $c_2(M) = 24$. Поскольку $c_2(M)$ есть эйлерова характеристика M, получаем $b_2(M) = 22$.

Это дает ромб Ходжа для К3-поверхности:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 0 & & 0 & \\
1 & & 20 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & \\
 & & 1 & &
\end{array}
$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Когомологии К3 не имеют кручения.**

Гиперкэлеровы многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гиперкомплексное многообразие** есть гладкое многообразие, снабженное комплексными структурами $I, J, K : TM \to TM$, которые удовлетворяют кватернионным соотношениям: $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\operatorname{Id}$. **Гиперкэлерово многообразие** есть гиперкомплексное многообразие, снабженное римановой метрикой g, которая кэлерова по отношению к I, J, K.

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I) – K3-поверхность, $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ ее кэлеров класс, Ω – голоморфная симплектическая форма. Предположим, что $\operatorname{Re}\Omega^2 = [\omega]^2$. Тогда **на (M, I) существует и единственна гиперкэлерова структура, такая, что $[\omega_I] = [\omega]$, $\omega_J = \operatorname{Re}\Omega$, $\omega_K = \operatorname{Im}\Omega$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для гиперкэлеровой структуры на поверхности, $\int_M \omega_I \wedge \omega_J = \int \omega_I \wedge \omega_K = \int \omega_J \wedge \omega_K = 0$, $\int_M \omega_I^2 = \int_M \omega_J^2 = \int_M \omega_K^2$ **(проверьте это).** Назовем базис, удовлетворяющий этим условиям, **конформно ортонормальным**.

Отображение периодов для гиперкэлеровых структур (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа изотопий** $\mathsf{Diff}_0(M)$ многообразия M есть связная компонента группы диффеоморфизмов M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство Тейхмюллера** $\mathsf{Teich}_{hk}(M)$ гиперкэлеровых структур есть фактор пространства всех гиперкэлеровых структур на M по $\mathsf{Diff}_0(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за $\mathsf{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$ пространство конформно ортонормированных троек классов $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in H^2(M,\mathbb{R})$. **Отображение периодов** $\mathsf{Teich}_{hk}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathsf{er}} \mathsf{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$ переводит гиперкэлерову структуру I, J, K, g в тройку $\omega_I, \omega_J, \omega_K \in \mathsf{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Открытое отображение** есть отображение, переводящее открытые множества в открытые.

ТЕОРЕМА: Пусть M - K3-поверхность. Тогда **отображение $\mathsf{Teich}_{hk}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathsf{er}} \mathsf{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$ открыто в $\mathsf{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$**.

Комплексные структуры и симплектические 2-формы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\Omega \in \Lambda^2(M, \mathbb{C})$ – комплексная 2-форма. Такая форма называется **невырожденной**, если $\operatorname{Re}\Omega$ либо $\operatorname{Im}\Omega$ – невырожденные 2-формы.

ТЕОРЕМА: Пусть M – вещественное 4-мерное многообразие, а $\Omega \in \Lambda^2(M, \mathbb{C})$ – замкнутая, невырожденная комплексная 2-форма. Предположим, что $\Omega^2 = 0$. Тогда **на M существует комплексная структура I такая, что Ω – голоморфная симплектическая форма на (M, I).**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M – K3-поверхность, а V – множество всех невырожденных комплексных 2-форм $\Omega \in \Lambda^2(M, \mathbb{C})$, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{P}V := V/\mathbb{C}^*$. Тогда **множество $\mathbb{P}V$ находится в биективном соответствии с множеством $\operatorname{Comp}(M)$ комплексных структур на M.**

Пространство Тейхмюллера и отображение периодов (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\operatorname{Comp}(M)$ есть множество всех интегрируемых почти комплексных структур на многообразии, с топологией, индуцированной топологией Фреше на пространстве тензоров. **Пространство Тейхмюллера** $\operatorname{Teich}(M)$ комплексных структур есть факторпространство $\operatorname{Comp}(M)/\operatorname{Diff}_0(M)$, где $\operatorname{Diff}_0(M)$ есть **группа изотопий** (связная компонента группы диффеоморфизмов).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M есть K3-поверхность. **Отображение периодов** $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{C})$ сопоставляет каждой комплексной структуре I на M прямую $H^{2,0}(M,I) \subset H^2(M,\mathbb{C})$.

Пространство периодов для K3-поверхности (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $l \in \mathcal{P}\mathrm{er}(\mathrm{Teich}(M))$ - класс когомологий в образе отображения периодов. Тогда $l \wedge l = 0$ (потому что это (2,0)-форма) и $l \wedge \bar{l} > 0$, потому что $l = \xi \wedge \zeta$ для каких-то $\xi, \zeta \in \Lambda^{1,0}(M, I)$ и и $l \wedge \bar{l} = \xi \wedge \zeta \wedge \bar{\xi} \wedge \bar{\zeta}$. локально в окрестности каждой точки M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство периодов K3-поверхности есть пространство $\mathbb{P}\mathrm{er} \subset \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{C})$ состоящее из всех прямых $\mathbb{C} \cdot l$ таких, что $l \wedge l = 0$ и $l \wedge \bar{l} > 0$. **Отображение периодов** есть отображение $\mathrm{Teich}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} \mathbb{P}\mathrm{er}$.

Основной результат прошлой лекции:

ТЕОРЕМА: (Локальная теорема Торелли для K3) Отображение периодов $\mathrm{Teich}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} \mathbb{P}\mathrm{er}$ этально, т.е. задается гомеоморфизмом в окрестности каждой точки $I \in \mathrm{Teich}(M)$.

Пространство периодов и $++$-грассманиан (повторение)

Пусть V – вещественное векторное пространство, снабженное скалярным произведением q. Обозначим за $\mathbb{P}\mathrm{er}(V)$ множество прямых $l \in \mathbb{P}V_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих $q(l,l) = 0$ и $q(l,\bar{l}) > 0$, и пусть $\mathrm{Gr}_{+,+}(V)$ – пространство ориентированных 2-мерных плоскостей $W \subset V$, таких, что $q|_W$ положительно определено.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для каждого $W \in \mathrm{Gr}_{+,+}(V)$, рассмотрим оператор поворота на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки: $I_W : W \to W$. Обозначим за $P(W) \in \mathbb{P}V_{\mathbb{C}}$ прямую, порожденную $x + \sqrt{-1}\, I_W(x)$, для $x \in W$. Тогда **P задает биекцию $P : \mathrm{Gr}_{+,+}(V) \to \mathbb{P}\mathrm{er}(V)$.**

СЛЕДСТВИЕ: Пространство периодов для K3-поверхности изоморфно $SO(19,3)/SO(2) \times SO(19,1)$.

Пространство периодов и гиперкэлеровы структуры (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – K3, а $\operatorname{Teich}_h^{\operatorname{Vol}}(M)$ – пространстве Тейхмюллера всех гиперкэлеровых структур (M, I, J, K, g) таких, что $\operatorname{Vol}_g(M) = 1$. Рассмотрим пространство $\operatorname{St}_3(H^2(M, \mathbb{R}))$ всех ортонормированных троек векторов в $H^2(M, \mathbb{R})$. **Раньше было доказано, что $\operatorname{Teich}_h^{\operatorname{Vol}}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}er} \operatorname{St}_3(H^2(M, \mathbb{R}))$ – открытое отображение.**

Рассмотрим следующую диаграмму пространств Тейхмюллера и пространств периодов:

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Teich}_h^{\operatorname{Vol}}(M) & \xrightarrow{\mathcal{P}er} & \operatorname{St}_3(H^2(M, \mathbb{R})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Teich}(M) & \xrightarrow{\mathcal{P}er} & \operatorname{Gr}_{+,+}(V)
\end{array}$$

Здесь первая вертикальная стрелка переводит (M, I, J, K, g) в (M, I), вторая переводит $(\omega_I, \omega_J, \omega_K) \in \operatorname{St}_3(H^2(M, \mathbb{R}))$ в $\langle \omega_J, \omega_K \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ:
Все стрелки в этой диаграмме – открытые отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Вертикальные стрелки представляют собой локально тривиальные расслоения, поэтому открыты, верхнее отображение периодов открыто, как было уже доказано, а нижнее открыто в силу коммутативности этой диаграммы. ■

Локальная теорема Торелли (повторение)

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть M – K3. Рассмотрим отображение периодов $\Psi: \operatorname{Comp}(M) \to \mathbb{P}\mathrm{er}$. **Тогда все слои Ψ локально линейно связны.**

УКАЗАНИЕ: Надо построить локально ретракцию из пространства невырожденных 2-форм в пространство $\widetilde{\operatorname{Comp}}(M)$ всех невырожденных, замкнутых 2-форм, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$.

ТЕОРЕМА: (Локальная теорема Торелли для K3) Отображение периодов $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} \mathbb{P}\mathrm{er}$ этально, т.е. задается гомеоморфизмом в окрестности каждой точки $I \in \operatorname{Teich}(M)$.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\mathcal{P}\mathrm{er}$ открыто, и непрерывно, **достаточно показать, что в окрестности каждой точки $I \in \operatorname{Teich}(M)$ оно задает биекцию этой окрестности на ее образ.**

Локальная теорема Торелли (повторение)

Шаг 2: Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Comp}(M) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\Psi_0"'] & \mathbb{P}\mathrm{er} \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] \\
\mathrm{Teich}(M) \arrow[r, "\mathcal{P}\mathrm{er}"] & \mathbb{P}\mathrm{er}
\end{tikzcd}$$

Осталось проверить, что **каждая связная компонента слоя Ψ равна связной компоненте слоя Ψ_0, то есть орбите $\mathrm{Diff}_0(M)$.**

Шаг 3: Как и в доказательстве теоремы Мозера, мы свели локальную теорему Торелли к следующему утверждению.

Теорема 1: Пусть $I_t: [0,1] \to \mathrm{Comp}(M)$ – семейство комплексных структур на K3, причем периоды у них одинаковы. **Тогда существует семейство диффеоморфизмов $V_t \in \mathrm{Diff}_0(M)$, переводящих I_0 в I_t.**

Теорема Мозера для отображения периодов (повторение)

Комплексные структуры находятся в биективном соответствии $\mathbb{P}\widetilde{\text{Comp}}(M)$, где $\widetilde{\text{Comp}}(M)$ – множество замкнутых, невырожденных комплексных 2-форм Ω, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$. Отображение периодов переводит $\Omega \in \widetilde{\text{Comp}}(M)$ в его класс когомологий. Значит, Теорема 1 вытекает из следующей.

Теорема 2: Пусть $\Omega_t : [0,1] \to \widetilde{\text{Comp}}(M)$ – семейство замкнутых, невырожденных комплексных 2-форм, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$, причем класс когомологий $[\Omega_t] \in H^2(M,\mathbb{C})$ не зависит от t. **Тогда существует семейство диффеоморфизмов $V_t \in \text{Diff}_0(M)$, таких, что $V_t^*\Omega_0 = \Omega_t$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\Omega_t' := \frac{d\Omega_t}{dt}$. Если найдется векторное поле X_t такое, что $\text{Lie}_{X_t}\Omega_t = \Omega_t'$, то

$$V_{t_1}^*\Omega_0 = \int_0^{t_1} \text{Lie}_{X_t}\Omega_t dt = \int_0^{t_1} \frac{d\Omega_t}{dt} dt = \Omega_{t_1}$$

для потока диффеоморфизмов V_t, полученного из формулы $\frac{dV_t}{dt} = X_t$. **Осталось найти X_t.**

Теорема Мозера для отображения периодов (повторение)

Нам нужно найти векторное поле X_t такое, что $\operatorname{Lie}_{X_t} \Omega_t = \Omega'_t$.
Шаг 2: Отображение подстановки $\Lambda^{2,0} M \otimes_{\mathbb{R}} T_{\mathbb{R}} M \to \Lambda^{1,0}(M)$ сюрьективно **(проверьте).**

Шаг 3: Поскольку Ω'_t точна, имеем $\Omega'_t = d\alpha_t$. Если α_t – (1,0)-форма, ее можно получить как $\Omega_t \lrcorner X_t$ в силу предыдущего шага, что дает $\Omega'_t = d\alpha_t = d(\Omega_t \lrcorner X_t) = \operatorname{Lie}_{X_t} \Omega_t$. **Для доказательства осталось найти $\alpha_t \in \Lambda^{1,0}(M)$ такую, что $\Omega'_t = d\alpha_t$.**

Шаг 4: Дифференцируя $\Omega_t^2 = 0$, получаем $\Omega'_t \wedge \Omega_t = 0$. **Это дает $\Omega'_t \in \Lambda^{1,1}(M) + \Lambda^{2,0}(M)$.**

Шаг 5: В силу шага 3 и шага 4, **Теорема 2 следует из такой леммы.**
ЛЕММА: Пусть M компактное кэлерово многообразие, $H^{0,1}(M) = 0$, а $\eta \in \Lambda^{1,1}(M) + \Lambda^{2,0}(M)$ – точная. **Тогда $\eta = d\alpha$, для какой-то $\alpha \in \Lambda^{1,0}(M)$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\eta = d\beta$, где $\beta = \beta^{1,0} + \beta^{0,1}$ Поскольку $\eta \in \Lambda^{1,1}(M) + \Lambda^{2,0}(M)$, имеем $\bar\partial(\beta^{0,1}) = 0$. Первые когомологии комплекса $(\Lambda^{0,*}(M), \bar\partial)$ зануляются, потому что $H^{0,1}(M) = 0$, а значит, $\beta^{0,1} = \bar\partial\psi$.

Шаг 2: Получаем $\eta = d(\beta - d\psi)$, а $\beta - d\psi = \beta^{1,0} + \beta^{0,1} - \partial\psi - \beta^{0,1}$ – (1,0)-форма. ■

Гладкие квартики

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гладкой квартикой** называется гладкая гиперповерхность в $\mathbb{C}P^n$, заданная неприводимым однородным полиномом степени 4.

ЗАМЕЧАНИЕ: По формуле Эйлера, каноническое расслоение на $\mathbb{C}P^n$ есть $\mathcal{O}(-n-1)$. Формула присоединения, примененная к гладкой поверхности $Z \subset \mathbb{C}P^n$ степени m, дает $N^*Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} K_Z = K_{\mathbb{C}P^n}|_Z$, а коль скоро $N^*Z = \mathcal{O}(-m)$ и $K_{\mathbb{C}P^n} = \mathcal{O}(-n-1)$, **имеем** $NZ = \mathcal{O}(m-n-1)$**.**

СЛЕДСТВИЕ: Гладкая квартика в $\mathbb{C}P^3$ есть поверхность с тривиальным каноническим классом.

ЗАМЕЧАНИЕ: В дальнейшем, говоря про "гладкие квартики", **я буду подразумевать квартики размерности 2.**

Гладкие квартики и теорема Лефшеца о гиперплоском сечении

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **k-е вложение Веронезе** есть проективное вложение $\mathbb{C}P^k \to \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(k))$, заданное линейной системой $\mathcal{O}(k)$. Иначе говоря, **вложение Веронезе переводит $(t_0 : t_1 : ... : t_n)$ в $(P_0(t_0, ..., t_n) : P_1(t_0, ..., t_n) : ... : ...)$, где P_i обозначает какой-то базис в однородных многочленах степени k.**

СЛЕДСТВИЕ: **Гладкая квартика есть пересечение образа 4-го отображения Веронезе и общей гиперплоскости.**

ТЕОРЕМА: **(Лефшеца о гиперплоском сечении)**
Пусть $Z \subset \mathbb{C}P^n$ – гладкое, проективное многообразие размерности m, а $H \subset \mathbb{C}P^n$ – гиперплоское сечение, трансверсально пересекающее Z. Тогда **для любого $i < m - 1$, отображение гомотопических групп $\pi_i(Z \cap H) \to \pi_i(Z)$ – изоморфизм.**

Доказательство см. ниже.

СЛЕДСТВИЕ: **Гладкая двумерная квартика является K3-поверхностью**.

В самом деле, $\pi_1(Z) = \pi_1(\mathbb{C}P^3) = 0$ по теореме Лефшеца, примененной к образу Веронезе.

Скрученный дифференциал d^c (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – комплексное многообразие, $I : TM \to TM$ – **оператор комплексной структуры**, $I^2 = -\operatorname{Id}_{TM}$. **скрученный дифференциал** d^c определяется формулой $d^c := I^{-1} dI$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M, I) - комплексное многообразие. Тогда $\partial := \frac{d+\sqrt{-1}\,d^c}{2}$, $\overline{\partial} := \frac{d-\sqrt{-1}\,d^c}{2}$ **– компоненты в разложении Ходжа** d: $\partial = d^{1,0}$, $\overline{\partial} = d^{0,1}$.

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие. **Тогда следующие утверждения равносильны:**

1. I интегрируемо.
2. $\partial^2 = 0$.
3. $\overline{\partial}^2 = 0$.
4. $dd^c = -d^c d$
5. $dd^c = 2\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}$.

Плюрисубгармонические функции Морса

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если на многообразии M заданы координаты $x_1, ..., x_{2n}$, можно определить **Гессиан** функции $f \in C^\infty M$: $\operatorname{Hess}(f) = \sum_i \frac{d^2 f}{dx_i dx_j} \cdot dx_i \otimes dx_j \in \operatorname{Sym}^2 M$. **В точках, где $df = 0$, гессиан не зависит от выбора координат (проверьте это).** Функция f называется **морсовской**, если во всех ее критических точках, $\operatorname{Hess}(f)$ – невырожденная билинейная симметрическая форма. **Индекс** критической точки z есть количество отрицательных собственных значений у $\operatorname{Hess}(f)\Big|_{T_z M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция f на комплексном многообразии M называется **плюрисубгармонической**, если $dd^c f$ есть положительная (1,1)-форма, то есть $dd^c f(x, Ix) \geqslant 0$ для любого $x \in TM$, и **строго плюрисубгармонической**, если $dd^c f(x, Ix) > 0$ для любого ненулевого $\in TM$.

ПРИМЕР: $f = |z|^2$ строго плюрисубгармонична на $\mathbb{C}^n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть f – строго плюрисубгармоническая функция Морса на n-мерном многообразии. **Тогда индекс критических точек f не превосходит n**

Плюрисубгармонические функции Морса (продолжение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть f – строго плюрисубгармоническая функция Морса на n-мерном многообразии. **Тогда индекс критических точек f не превосходит n**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $dd^c f = 2\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial f$ (1,1)-форма, она I-инвариантна: $dd^c f(Ix, Iy)$. Значит, $dd^c f(Ix, y) = dd^c f(I^2 x, Iy) = -dd^c(x, Iy) f = dd^c(Iy, x) f$. Мы получили, что **форма** $\operatorname{Hess}_c(f) := dd^c f(x, Iy)$ **симметрическая.** Эта форма называется **комплексный гессиан**. Для плюрисубгармонических функций, она неотрицательно определена.

Шаг 2: Пусть координаты $x_1, y_1, x_2, y_2, ...$ на M таковы, что $I(dx_i) = dy_i$, а $I(dy_i) = -dx_i$. Тогда

$$dd^c(f) = \sum_i dx_i \wedge dy_i \left(\frac{d^2 f}{dx_i^2} + \frac{d^2 f}{dy_i^2}\right),$$

что дает

$$\operatorname{Hess}_c(f) = \sum_i \left(\frac{d^2 f}{dx_i^2} + \frac{d^2 f}{dy_i^2}\right) [dx_i \otimes dx_i + dy_i \otimes dy_i]$$

Мы получили $\operatorname{Hess}_c(f) = \operatorname{Hess}(f) + I \operatorname{Hess}(f)$.

Плюрисубгармонические функции Морса (окончание)

Мы получили $\operatorname{Hess}_c(f) = \operatorname{Hess}(f) + I \operatorname{Hess}(f)$**.**

Шаг 3: Для любой строго плюрисубгармонической функции Морса, все собственные значения ее комплексного гессиана положительны. Пусть m – критическая точка f, а $dz_1, ..., dz_{2n} \in T_m M$ – базис, в котором $\operatorname{Hess}(f)$ и $I \operatorname{Hess}(f)$ ортогональны. Такой базис существует для любой пары билинейных симметрических форм, если одна из них положительно определена; **проверьте это**, и примените к паре форм $\operatorname{Hess}_c(f)$, $\operatorname{Hess}(f)$.

Шаг 4: Пусть $\operatorname{Hess}(f)(dz_i, dz_i) = \alpha_i$, а $\operatorname{Hess}(f)(dz_i, dz_i) = \beta_i$. Поскольку формы $\operatorname{Hess}(f)$, $I \operatorname{Hess}(f)$ сопряжены, у них одинаковая сигнатура. Тогда $\operatorname{Hess}_c(f)(dz_i, dz_i) = \alpha_i + \beta_i$. Поскольку форма $\operatorname{Hess}_c(f) = \operatorname{Hess}(f) + I \operatorname{Hess}(f)$ положительно определена, $\alpha_i + \beta_i > 0$, то есть **как минимум половина** α_i **неотрицательна.** ■

Теорема Лефшеца о гиперплоском сечении

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть f – функция Морса на гладком многообразии M, а $\operatorname{grad} f$ ее градиентное векторное поле. **Стабильное многообразие** критической точки m есть все точки $z \in M$ такие, что $\lim\limits_{t\to\infty} e^{t \operatorname{grad} f} z = m$.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть Z_m – стабильное многообразие критической точки m индекса p. **Докажите, что Z_m гладкое, p-мерное подмногообразие в M.**

ТЕОРЕМА: (Теорема Лефшеца о гиперплоском сечении)
Пусть $Z \subset \mathbb{C}P^n$ – гладкое, проективное многообразие размерности m, а $H \subset \mathbb{C}P^n$ – гиперплоское сечение, трансверсально пересекающее Z. Тогда **для любого $i < m-1$, отображение гомотопических групп $\pi_i(Z \cap H) \to \pi_i(Z)$ – изоморфизм.**

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим функцию $f := |z|^2$ на $\mathbb{C}P^n \backslash H = \mathbb{C}^n$, пошевелим ее таким образом, чтобы она оставалось плюрисубгармоничной, но стала морсовской на $Z\backslash(H \cap Z)$ **(докажите, что это возможно)**.

Теорема Лефшеца о гиперплоском сечении (продолжение)

Шаг 2: Пусть $S_i \subset Z\backslash(H \cap Z)$ – стабильные множества всех критических точек f на Z. Тогда $Z\cap H$ **является деформационным ретрактом** $Z_0 := Z\backslash\bigcup_i S_i$. Для доказательства сего, рассмотрим отображение $z \to e^{t\operatorname{grad} f}$, и устремим t к бесконечности; для любого $z \in Z_0$, **предел лежит на** $Z \cap H$**, и непрерывно зависит от** $t \in [0,\infty]$ **и** z**.**

Шаг 3: Поскольку f плюрисубгармонична, индекс критических точек f не превосходит n. Значит, $\dim S_i \leqslant n$. В силу предыдущего шага, Z_0 гомотопически эквивалентно $H \cap Z$. Теперь **теорема Лефшеца вытекает из следующей топологической леммы.**

ЛЕММА: Пусть Z – гладкое многообразие, а S_i – набор гладких подмногообразий в Z, $\operatorname{codim}\dim S_i \geqslant n$. Обозначим за Z_0 дополнение $Z_0 := Z\backslash\bigcup_i S_i$ Тогда естественное вложение $Z_0 \to Z$ **индуцирует изоморфизм гомотопических групп** $\pi_i(Z_0) \cong \pi_i(Z)$ для всех $i < n-1$, и сюрьективно для $i = n-1$.

Теорема Лефшеца о гиперплоском сечении (окончание)

ЛЕММА: Пусть Z – гладкое многообразие, а S_i – набор гладких подмногообразий в Z, $\operatorname{codim}\dim S_i \geqslant n$. Обозначим за Z_0 дополнение $Z_0 := Z\backslash\bigcup_i S_i$ Тогда естественное вложение $Z_0 \to Z$ **индуцирует изоморфизм гомотопических групп** $\pi_i(Z_0) \cong \pi_i(Z)$ для всех $i < n-1$, и сюрьективно для $i = n-1$.

Доказательство. Шаг 1: Чтобы убедиться, что $\pi_i(Z_0) \xrightarrow{j} \pi_i(Z)$ сюрьективно, возьмем какой-то элемент в $\pi_i(Z)$, **представим его иммерсией сферы $\Sigma^i \to Z$ и продеформируем эту сферу, чтобы она стала трансверсальна к S_i.** Это можно сделать, когда $i < \operatorname{codim}_M S_i \leqslant n-1$. Поскольку $\Sigma^i \subset Z_0$, ее класс в $\pi_i(Z)$ лежит в образе j.

Шаг 2: Пусть $\Sigma^i \to Z_0$ – отображение сферы, гомотопное нулю в Z. **Гомотопию можно изобразить как отображение из $i+1$-мерного шара B^{i+1} в Z, граница которого переходит на Σ^i.** И сферу и гомотопию можно выбрать гладкой, потом пошевелить, чтобы образ B^{i+1} пересекал S_i трансверсально. Поэтому, если $i+1 < \operatorname{codim} S_i \geqslant n$, образ шара не будет пересекать S_i, что дает гомотопию образа Σ^i в точку внутри Z_0. ■.