

Комплексные поверхности,

лекция 8: Все КЗ диффеоморфны

Миша Вербицкий

НМУ/матфак ВШЭ, Москва

2 апреля 2012

К3-поверхности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **К3-поверхность** есть комплексная поверхность с $b_1 = 0$ и $c_1 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Все поверхности с $b_1 = 0$ - кэлеровы (Бухсдаль-Ламари).

УТВЕРЖДЕНИЕ: Каноническое расслоение K_M тривиально.

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Римана-Роха дает $\chi(\mathcal{O}_M) = 2 = \frac{c_2(M)}{12}$, значит, $c_2(M) = 24$. Поскольку $c_2(M)$ есть эйлерова характеристика M , получаем $b_2(M) = 22$.

Это дает ромб Ходжа для К3-поверхности:

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & & 0 & 0 \\ 1 & & 20 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & 1 & \end{array}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Когомологии К3 не имеют кручения.

Пространство периодов для КЗ-поверхности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\text{Comp}(M)$ есть множество всех интегрируемых почти комплексных структур на многообразии, с топологией, индуцированной топологией Фреше на пространстве тензоров. **Пространство Тейхмюллера** $\text{Teich}(M)$ комплексных структур есть факторпространство $\text{Comp}(M)/\text{Diff}_0(M)$, где $\text{Diff}_0(M)$ есть **группа изотопий** (связная компонента группы диффеоморфизмов).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M есть КЗ-поверхность. **Отображение периодов** $\text{Teich}(M) \xrightarrow{\text{Per}} \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{C})$ сопоставляет каждой комплексной структуре I на M прямую $H^{2,0}(M, I) \subset H^2(M, \mathbb{C})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство периодов** КЗ-поверхности есть пространство $\text{Per} \subset \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{C})$ состоящее из всех прямых $\mathbb{C} \cdot l$ таких, что $l \wedge l = 0$ и $l \wedge \bar{l} > 0$. **Отображение периодов** есть отображение $\text{Teich}(M) \xrightarrow{\text{Per}} \text{Per}$.

Основной результат прошлой лекции:

ТЕОРЕМА: (Локальная теорема Торелли для КЗ) **Отображение периодов** $\text{Teich}(M) \xrightarrow{\text{Per}} \text{Per}$ **этално**, т.е. задается гомеоморфизмом в окрестности каждой точки $I \in \text{Teich}(M)$.

Пространство периодов и $++$ -грассманиан (повторение)

Пусть V – вещественное векторное пространство, снабженное скалярным произведением q . Обозначим за $\text{Per}(V)$ множество прямых $l \in \mathbb{P}V_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих $q(l, l) = 0$ и $q(l, \bar{l}) > 0$, и пусть $\text{Gr}_{+,+}(V)$ – пространство ориентированных 2-мерных плоскостей $W \subset V$, таких, что $q|_W$ положительно определено.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для каждого $W \in \text{Gr}_{+,+}(V)$, рассмотрим оператор поворота на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки: $I_W : W \rightarrow W$. Обозначим за $P(W) \in \mathbb{P}V_{\mathbb{C}}$ прямую, порожденную $x + \sqrt{-1} I_W(x)$, для $x \in W$. Тогда P задает биекцию $P : \text{Gr}_{+,+}(V) \rightarrow \text{Per}(V)$.

СЛЕДСТВИЕ: Пространство периодов для КЗ-поверхности изоморфно $SO(19, 3)/SO(2) \times SO(19, 1)$.

Гладкие кватрики (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Гладкой кватрикой называется гладкая гиперповерхность в $\mathbb{C}P^n$, заданная неприводимым однородным полиномом степени 4.

ЗАМЕЧАНИЕ: По формуле Эйлера, каноническое расслоение на $\mathbb{C}P^n$ есть $\mathcal{O}(-n-1)$. Формула присоединения, примененная к гладкой поверхности $Z \subset \mathbb{C}P^n$ степени m , дает $N^*Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} K_Z = K_{\mathbb{C}P^n}|_Z$, а коль скоро $N^*Z = \mathcal{O}(-m)$ и $K_{\mathbb{C}P^n} = \mathcal{O}(-n-1)$, **имеем $K_Z = \mathcal{O}(m-n-1)$.**

СЛЕДСТВИЕ: Для гладкой кватрики в $\mathbb{C}P^3$, $n = 3$, $m = 4$, значит $K_Z = \mathcal{O}_Z$. Поэтому **гладкая кватрика есть поверхность с тривиальным каноническим классом.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В дальнейшем, говоря про "гладкие кватрики", **я буду подразумевать кватрики размерности 2.**

Гладкие кватрики и теорема Лефшеца о гиперплоском сечении

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: k -е вложение Веронезе есть проективное вложение $\mathbb{C}P^k \rightarrow \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(k)))$, заданное линейной системой $\mathcal{O}(k)$. Иначе говоря, **вложение Веронезе переводит** $(t_0 : t_1 : \dots : t_n)$ в $(P_0(t_0, \dots, t_n) : P_1(t_0, \dots, t_n) : \dots : \dots)$, где P_i обозначает какой-то базис в однородных многочленах степени k .

СЛЕДСТВИЕ: Гладкая кватрика есть пересечение образа 4-го отображения Веронезе и общей гиперплоскости.

ТЕОРЕМА: (Лефшеца о гиперплоском сечении)

Пусть $Z \subset \mathbb{C}P^n$ – гладкое, проективное многообразие размерности m , а $H \subset \mathbb{C}P^n$ – гиперплоское сечение, трансверсально пересекающее Z . Тогда **для любого** $i < m - 1$, **отображение гомотопических групп** $\pi_i(Z \cap H) \rightarrow \pi_i(Z)$ – **изоморфизм**.

СЛЕДСТВИЕ: Гладкая двумерная кватрика является **К3-поверхностью**.

В самом деле, $\pi_1(Z) = \pi_1(\mathbb{C}P^3) = 0$ по теореме Лефшеца, примененной к образу Веронезе.

Пространство $H^{1,1}(M, \mathbb{Z})$ и линейные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа Нерона-Севери $NS(M)$ многообразия M есть образ $\text{Pic}(M)$ в $H^2(M, \mathbb{Z})$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – компактное, кэлерово. Экспоненциальная точная последовательность $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{O}_M^* \rightarrow 0$ дает

$$\rightarrow H^1(\mathcal{O}_M) \rightarrow \text{Pic}(M) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi} H^2(M, \mathcal{O}_M)$$

При этом ψ переводит класс когомологий $v \in H^2(M, \mathbb{Z})$ в его проекцию на $H^{0,2}(M) = H^2(M, \mathcal{O}_M)$. Ядро проекции $H^2(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\Pi} H^{0,2}(M)$ есть $H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M)$, причем каждый вещественный класс когомологий η , лежащий в ядре Π , удовлетворяет

$$\begin{aligned} \eta \in \left(H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M) \right) \cap \overline{\left(H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M) \right)} &= \\ &= \left(H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M) \right) \cap \left(H^{0,2}(M) \oplus H^{1,1}(M) \right) = H^{1,1}(M). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за $H^{1,1}(M, \mathbb{Z})$ множество целочисленных классов когомологий, которые лежат в $H^{1,1}(M)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: В силу предыдущего замечания, если группа $H^2(M, \mathbb{Z})$ без кручения, то $NS(M) = H^{1,1}(M, \mathbb{Z})$.

Формула Римана-Роха-Хирцебруха (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть L, L' – линейные расслоения на поверхности X . Число $\int_X c_1(L) \wedge c_1(L')$ обозначается (L, L') , и называется **индекс пересечения**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эйлерова характеристика** когерентного пучка F есть число $\chi(F) := \sum_i (-1)^i \dim H^i(F)$.

Напомним **формулу Римана-Роха** для поверхности:

ТЕОРЕМА: Для любого линейного расслоения L на поверхности, $\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{(L-K_X, L)}{2}$.

Для КЗ-поверхности, $\chi(\mathcal{O}_X) = h^{0,0}(X) - h^{0,1}(X) + h^{0,2}(X) = 2$, а $c_1(K_X) = 0$. Получаем:

ТЕОРЕМА: Для любого линейного расслоения L на КЗ, $\chi(L) = 2 + \frac{(L, L)}{2}$.

Линейные расслоения на КЗ

Пусть (M, I) – КЗ-поверхность. Поскольку форма пересечения совместима с разложением Ходжа, $(H^{2,0}(M) \oplus H^{0,2}(M))^{\perp} = H^{1,1}(M)$. Пространство $H^{2,0}(M) \oplus H^{0,2}(M)$ есть комплексификация $\mathcal{P}er(I) := \langle \operatorname{Re} \Omega, \operatorname{Im} \Omega \rangle$, где Ω обозначает класс голоморфной симплектической формы.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M, I) есть КЗ-поверхность, а $W := \mathcal{P}er(I) \in G_{+,+}(H^2(M, \mathbb{R}))$. Тогда $H_I^{1,1}(M, \mathbb{R}) = W^{\perp}$ (ортогональное дополнение).

СЛЕДСТВИЕ: Для любой КЗ, $\operatorname{Pic}(M, I) = NS(M, I) = H_I^{1,1}(M, \mathbb{Z})$ – множество целочисленных векторов, ортогональных $W = \mathcal{P}er(I) \in G_{+,+}(H^2(M, \mathbb{R}))$.

СЛЕДСТВИЕ: Для общей КЗ-поверхности, группа $\operatorname{Pic}(M, I)$ тривиальна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Очень обильное расслоение** есть линейное расслоение вида $\varphi^*(\mathcal{O}(1))$, где $\varphi : M \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ – проективное вложение. **Обильное расслоение** есть линейное расслоение, положительная степень которого обильна.

ТЕОРЕМА: (Кодаира) Расслоение L обильно тогда и только тогда, когда $c_1(L)$ – кэлеров класс.

КЗ-поверхности с одномерной группой Пикара

ТЕОРЕМА: (Накаи-Мойшезон) Пусть L – голоморфное расслоение на поверхности, такое, что $(L, L) > 0$, и для любой кривой C , $\deg L|_C > 0$. Тогда L обильно.

Теорема 1: Пусть (M, I) есть КЗ-поверхность, причем группа $\text{Pic}(M, I) = \text{NS}(M, I) = H_I^{1,1}(M, \mathbb{Z})$ одномерна, $\text{NS}(M, I) = \mathbb{Z} \cdot \eta$. Обозначим за L образующую $\text{Pic}(M, I)$, $c_1(L) = \eta$. Предположим, что $(L, L) > 0$. Тогда L либо L^* обильно.

Доказательство. Шаг 1: Риман-Рох: $h^0(L) - h^1(L) + h^2(L) = \chi(L) = 2 + \frac{(L, L)}{2}$. Двойственность Серра дает $H^0(L^*)^* = H^2(L \otimes K_M) = H^2(L)$, то есть $h^0(L^*) = h^2(L)$. Поэтому $h^0(L) + h^0(L^*) \geq 2$, то есть либо L , либо L^* имеет голоморфные сечения. Заменяя L на L^* , если потребуется, **можем считать, что $h^0(L) > 0$.**

Шаг 2: Поскольку у L есть сечения, $c_1(L)$ представляется кривой C . Поскольку $\text{Pic}(M)$ одномерен, все классы в $H_2(M, \mathbb{Z})$, представимые кривыми, пропорциональны η , с положительным коэффициентом. Значит, для любой кривой $D \sim nC$, имеем

$$\deg L|_D = \int_M c_1(L) \wedge [D] = n \int_M c_1(L) \wedge [C] = n(L, L) > 0.$$

Теперь **обильность L следует из Накаи-Мойшезона.** ■

Обильные расслоения на кватриках

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M, I) – КЗ-поверхность, $H_I^{1,1}(M, \mathbb{Z})$ – ее решетка Нерона-Севери. **Поверхность (M, I) изоморфна кватрике тогда и только тогда, когда $\text{Pic}(M, I) = H_I^{1,1}(M, \mathbb{Z})$ содержит очень обильное расслоение L с $(L, L) = 4$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть (M, I) вкладывается в $\mathbb{C}P^3$ как гладкая гиперповерхность степени 4, а $L = \mathcal{O}(1)|_M$. Тогда $(L, L) = \int_M c_1(L) \wedge c_1(L) = \int_{\mathbb{C}P^3} [M] \wedge [H] \wedge [H]$ где $[H]$ есть фундаментальный класс гиперплоского сечения, а $[M] = 4[H]$ – фундаментальный класс M . **Поэтому $(L, L) = \int_{\mathbb{C}P^3} 4[H] \wedge [H] \wedge [H] = 4$.**

Шаг 2: Пусть M есть КЗ, а L – очень обильное расслоение с $(L, L) = 4$. Риман-Рош: $h^0(L) = h^0(L) - h^1(L) + h^2(L) = \chi(L) = 2 + \frac{(L, L)}{2} = 4$. Рассмотрим соответствующее вложение $M \rightarrow \mathbb{P}H^0(M, L)^*$ (оно переводит $m \in M$ и функционал $\lambda \in (L|_m)^*$ в $\lambda : H^0(M, L) \rightarrow \mathbb{C}$). **Степень этой гиперповерхности можно вычислить по формуле $\deg M = \int_M c_1(\mathcal{O}(1)) \wedge c_1(\mathcal{O}(1)) = (L, L) = 4$.** ■

Базисные точки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Базисная точка** линейного расслоения есть такая точка, где все его сечения зануляются. Расслоение **не имеет базисных точек**, если оно глобально порождено.

ТЕОРЕМА: (Бертини) Пусть L – линейное расслоение, а D – дивизор нулей общего сечения L . **Тогда D неособ вне базисного множества L .** ■

ТЕОРЕМА: Пусть M – КЗ-поверхность, $\text{Pic}(M) = \mathbb{Z}$, а L – образующая группы Пикара, такая, что $(L, L) = 4$. **Тогда L либо $-L$ обильно и глобально порождено.**

Доказательство. Шаг 1: Обильность L либо L^* доказана выше. Заменяя L на L^* , если потребуется, **будем считать, что L обильно.** Теперь из теоремы Римана-Роха следует, что $\dim H^0(L) = 4$.

Шаг 2: Пусть D – нетривиальная кривая, которая целиком содержится в базисном множестве L . Из точной последовательности $0 \rightarrow L(-D) \rightarrow L \rightarrow L|_D \rightarrow 0$ получаем точность $0 \rightarrow H^0(L(-D)) \rightarrow H^0(L) \rightarrow 0$ (*) (коль скоро **отображение ограничения на D равно нулю**). Значит, расслоение $L(-D)$ **эффektivно** (имеет сечения), что может случиться только если $\mathcal{O}_M(D) = L$, так как L есть образующая Пикара. Но тогда $\dim H^0(L(-D)) = 1$, а в силу (*) оно равно 4. **Мы доказали, что базисное множество L не содержит кривых.**

Базисные точки (продолжение)

Шаг 3: Пусть C – дивизор нулей общего сечения L . **Докажем, что C неособо.** Если C особо, по теореме Бертини оно особо в базисной точке z , в которой C имеет кратность как минимум 2. Все другие сечения L тоже особы в z , с той же кратностью, то есть пересекают C с кратностью $2 * 2 = 4$. Поскольку сечения L пересекаются с общей кратностью 4, **каждое сечение $l \in H^0(L)$ ненулевое на C вне z .**

Шаг 4: Напишем точную последовательность $0 \rightarrow L(-C) = \mathcal{O}_M \rightarrow L \rightarrow L|_C \rightarrow 0$. Получим длинную точную последовательность

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_M) \rightarrow H^0(L) \rightarrow H^0(L|_C) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_M) = 0,$$

значит, образ ограничения $H^0(L) \rightarrow H^0(L|_C)$ имеет размерность 3. Но сечение $H^0(L|_C)$ определяется с точностью до константы своими нулями, то есть в силу предыдущего шага, образ ограничения $H^0(L) \rightarrow H^0(L|_C)$ должен быть одномерен. **Мы доказали, что дивизор нулей общего сечения L гладкий.**

Базисные точки (окончание)

Шаг 5: Пусть C – дивизор нулей гладкого сечения L . По формуле присоединения, $NC^* \otimes K_C = K_M|_C = \mathcal{O}_C$, что дает $L|_C = NC = K_C$. Из этого следует, в частности, что $\deg K_C = 4$, то есть **C – кривая рода 3.**

Шаг 6: Напишем точную последовательность

$$0 \rightarrow L(-C) = \mathcal{O}_M \rightarrow L \rightarrow L|_C = K_C \rightarrow 0.$$

Получим длинную точную последовательность

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_M) \rightarrow H^0(L) \rightarrow H^0(K_C) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_M) = 0.$$

Для любой кривой рода 3, пучок K_C либо очень обилен (если кривая не гиперэллиптическая) либо глобально порожден (если гиперэллиптическая). В обоих случаях, **для каждой точки $z \in C$, найдется сечение L , которое в ней ненулевое.** ■

Пространство модулей кватрик (набросок)

Следствие 2: Пусть M – КЗ-поверхность, $\text{Pic}(M) = \mathbb{Z}$, а L – обильная образующая группы Пикара, такая, что $(L, L) = 4$. Рассмотрим соответствующее отображение $\psi : M \rightarrow \mathbb{P}H^0(M, L)^* = \mathbb{C}P^3$. **Тогда образ ψ – кватрика.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку у L нет базисных точек, ψ голоморфно. Поэтому $\deg \text{im } \psi = \int_{\psi(M)} [H] \wedge [H]$, где $[H]$ есть класс гиперплоского сечения. Поскольку $\psi^* \mathcal{O}(1) = L$,

$$\deg \text{im } \psi = \int_{\psi(M)} [H] \wedge [H] = \int_M c_1(L) \wedge c_1(L) = (L, L) = 4.$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ: Кватрика в $\mathbb{C}P^3$ задается полиномом 4-й степени от 4 переменных. $\dim \text{Sym}^4 \mathbb{C}^4 = \frac{(4+4-1)!}{4!3!} = 35$ На полиномах действует группа $GL(4, \mathbb{C})$ размерности 16, соответственно, **кватрика определяется 35 – 16 = 19 параметрами.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство периодов КЗ 20-мерно. **“Кватрики задают дивизор в пространстве модулей”.**

Скрученный дифференциал d^c (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – комплексное многообразие, $I : TM \rightarrow TM$ – оператор комплексной структуры, $I^2 = -\text{Id}_{TM}$. **скрученный дифференциал** d^c определяется формулой $d^c := I^{-1}dI$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M, I) – комплексное многообразие. Тогда $\partial := \frac{d + \sqrt{-1}d^c}{2}$, $\bar{\partial} := \frac{d - \sqrt{-1}d^c}{2}$ – компоненты в разложении Ходжа d : $\partial = d^{1,0}$, $\bar{\partial} = d^{0,1}$.

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие. **Тогда следующие утверждения равносильны:**

1. I интегрируемо.
2. $\partial^2 = 0$.
3. $\bar{\partial}^2 = 0$.
4. $dd^c = -d^cd$
5. $dd^c = 2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}$.

ТЕОРЕМА: (dd^c -лемма)

Пусть η – форма на компактном кэлеровом многообразии, которая удовлетворяет какому-то из условий

1. η – точная (p, q) -форма.
2. η – d^c -точная, d -замкнутая.
3. η – ∂ -точная, $\bar{\partial}$ -замкнутая.

Тогда $\eta \in \text{im } dd^c = \text{im } \partial\bar{\partial}$.

Теорема Кодаиры о стабильности

ТЕОРЕМА: (Теорема Кодаиры о стабильности)

Пусть M – компактное многообразие, I_t, g_t – семейство кэлеровых структур, параметризованное $t \in \mathbb{R}$, а $[\omega'_t] \in H^{1,1}(M, I_t)$ – семейство классов когомологий. Предположим, что $[\omega'_0]$ – кэлеров класс. **Тогда $[\omega'_t]$ кэлеров для всех $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\omega'_0 \in \Lambda^{1,1}(M, I_t)$ – кэлерова форма, представляющая $[\omega'_0]$. Обозначим за $h([\omega'_t]) \in \Lambda^{1,1}(M, I_t)$ гармонический представитель $[\omega'_t]$. Поскольку разность $\omega'_0 - h([\omega'_0])$ точная и типа $(1,1)$, *dd^c-лемма* дает $\omega'_0 = h([\omega'_0]) + dd^c\psi$.

Шаг 2: Рассмотрим следующую $(1,1)$ -форму на (M, I_t) : $h([\omega'_t]) + dd^c\psi$. Ее собственные значения, для небольших t , близки к собственным значениям $\omega'_0 = h([\omega'_0]) + dd^c\psi$, то есть положительны. **Значит, это кэлерова форма. ■**

Пространство модулей почти поляризованных КЗ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\eta \in H^2(M, \mathbb{Z})$ – ненулевой класс когомологий на КЗ, $(\eta, \eta) > 0$. Обозначим за Per_η множество $W \in \text{Gr}_{+,+}(H^2(M, \mathbb{R}))$, ортогональных η . Это пространство называется **пространством периодов поляризованных КЗ**.

СЛЕДСТВИЕ: Множество Per_η периодов всех КЗ, для которых η имеет тип $(1,1)$, есть

$$\{l \in \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{C}) \mid (l, l) = 0, (l, \bar{l}) > 0, (l, \eta) = 0\}.$$

Это дивизор в Per (проверьте это).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за Teich_η пространство Тейхмюллера всех комплексных структур на КЗ, для которых класс $\eta \in H^2(M, \mathbb{Z})$ имеет тип $(1,1)$. Это пространство называется **пространством Тейхмюллера почти поляризованных КЗ**. Пространство $\text{Teich}_\eta^{\text{pol}} \subset \text{Teich}_\eta$, состоящее из всех КЗ, для которых $\pm\eta$ – кэлеров класс, называется **пространством Тейхмюллера поляризованных КЗ**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из локальной теоремы Торелли немедленно следует, что **отображение периодов $\text{Per} : \text{Teich}_\eta \rightarrow \text{Per}_\eta$ этально** (локально диффеоморфизм).

Пространство модулей поляризованных КЗ

УТВЕРЖДЕНИЕ: $\text{Teich}_\eta^{\text{pol}}$ открыто и плотно в Teich_η .

Доказательство. Шаг 1: В силу теоремы Кодaira о стабильности, $\text{Teich}_\eta^{\text{pol}}$ открыто в Teich_η .

Шаг 2: В силу Теоремы 1, для каждого $I \in \text{Teich}_\eta$, для которого

$$\text{Pic}(M, I) = \mathcal{P}\text{er}(I)^\perp \cap H^2(M, \mathbb{Z})$$

одномерен, $\pm\eta$ – кэлеров класс.

Шаг 3: Из теоремы Торелли следует, что у каждой $l = \mathcal{P}\text{er}(I)$ есть окрестность в $\mathbb{P}\text{er}^\eta$, которая лежит в образе отображения периодов. Легко видеть, что **для общей l' в $\mathbb{P}\text{er}^\eta$, группа $l'^\perp \cap H^2(M, \mathbb{Z})$ порождена η .** В силу шага 2, $\mathcal{P}\text{er}^{-1}(l') \in \text{Teich}_\eta^{\text{pol}}$. Значит, $\text{Teich}_\eta^{\text{pol}}$ плотно в Teich_η .

■

Пространство Тейхмюллера кватрик

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\eta \in H^2(M, \mathbb{Z})$ есть целочисленный класс на КЗ, $(\eta, \eta) = 4$. Обозначим за Teich_η^q пространство Тейхмюллера всех $I \in \text{Teich}_\eta$ таких, что линейное расслоение L на (M, I) с $c_1(L) = \eta$ обильно и глобально порождено. Пространство Teich_η^q называется **пространством Тейхмюллера кватрик**.

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу Следствия 2, для каждой $I \in \text{Teich}_\eta^q$, расслоение L задает отображение (M, I) в $\mathbb{C}P^3$, образ которого – кватрика; и все гладкие кватрики получаются таким образом.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы получили отображение $\text{Teich}_\eta^q \rightarrow \text{Sym}^4 \mathbb{C}^4 / GL(\mathbb{C}, 4)$, сюръективное на множество гладких кватрик. Поскольку **размерность пространства кватрик равна размерности Teich_η^q** , в общей точке это отображение – иммерсия.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Teich_η^q **плотно в Teich_η** .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Точно такое же, как доказательство плотности Teich_η^{pol} в Teich_η . ■

О плотности квартик

ТЕОРЕМА: (будет доказана позже)

Пусть $\mathfrak{X} \subset H^2(M, \mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v, v) = 4$.

Тогда $\bigcup_{\eta \in \mathfrak{X}} \text{Per}_\eta$ плотно в Per .

СЛЕДСТВИЕ: $\bigcup_{\eta \in \mathfrak{X}} \text{Teich}_\eta^q$ плотно в Teich .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В силу предыдущей теоремы, множество

$$\text{Per}^{-1} \left(\bigcup_{\eta \in \mathfrak{X}} \text{Per}_\eta \right) = \bigcup_{\eta \in \mathfrak{X}} \text{Teich}_\eta$$

плотно в $\text{Teich} = \text{Per}^{-1}(\text{Per})$. С другой стороны, Teich_η^q плотно в Teich_η .
Значит, $\bigcup_{\eta \in \mathfrak{X}} \text{Teich}_\eta^q$ плотно в Teich . ■

СЛЕДСТВИЕ: Поскольку гладкие квартики плотны в пространстве $\text{Sym}^4 \mathbb{C}^4 / \text{GL}(\mathbb{C}, 4)$ всех квартик, **на каждой компоненте Teich_η^q есть плотное множество комплексных структур, соответствующих гладким квартикам.**

О плотности квартик (продолжение)

Мы доказали такую теорему

ТЕОРЕМА: На пространстве Тейхмюллера КЗ есть плотное множество точек, соответствующих гладким квартикам.

Поскольку гладкие квартики образуют связное, гладкое семейство, они все диффеоморфны.

СЛЕДСТВИЕ: Любая КЗ диффеоморфна гладкой квартике.

* * *

Осталось доказать:

ТЕОРЕМА: Пусть $\mathfrak{X} \subset H^2(M, \mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v, v) = 4$. Тогда $\bigcup_{\eta \in \mathfrak{X}} \text{Per}_{\eta}$ плотно в Per .

Другая формулировка

Теорема 2: Пусть $\mathfrak{X} \subset H^2(M, \mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v, v) = 4$, а $W_{\mathfrak{X}} \subset \text{Gr}_{+,+}(H^2(M, \mathbb{R}))$ – множество всех 2-плоскостей, ортогональных какому-то $v \in \mathfrak{X}$. Тогда $W_{\mathfrak{X}}$ плотно в $\text{Gr}_{+,+}(H^2(M, \mathbb{R}))$.

Плотные множества в $Gr_{+,+}(H^2(M, \mathbb{R}))$

Пусть $A \subset \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{R})$ – подмножество. Обозначим за $V(A)$ множество 2-плоскостей, ортогональных какому-то $v \in A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Нуль-квадрика**, или же **световой конус** $\text{Null}(M) \subset \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{R})$ есть множество всех $l \in \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{R})$, $(l, l) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $B \subset \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{R})$ – множество предельных точек $A \subset \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{R})$, то $V(A)$ плотно в $V(B)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $V(\text{Null}(M)) = Gr_{+,+}(H^2(M, \mathbb{R}))$. Действительно, для каждой 2-плоскости в $H^2(M, \mathbb{R})$, в ее ортогональном дополнении есть нуль-вектор.

Объединяя эти два замечания, получаем, что Теорема 2 следует из Теоремы 3.

Теорема 2: Пусть $\mathfrak{X} \subset H^2(M, \mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v, v) = 4$, а $W_{\mathfrak{X}} \subset Gr_{+,+}(H^2(M, \mathbb{R}))$ – множество всех 2-плоскостей, ортогональных какому-то $v \in \mathfrak{X}$. **Тогда $W_{\mathfrak{X}}$ плотно в $Gr_{+,+}(H^2(M, \mathbb{R}))$.**

Теорема 3:

Множество предельных точек $\mathbb{P}\mathfrak{X} \subset \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{R})$ содержит $\text{Null}(M)$.

Плотные множества в световом конусе

Теорема 3': Любая точка $x \in \text{Null}(M) \subset \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{R})$ является пределом последовательности $\{x_i\} \in \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{Z})$, причем каждый x_i представлен $x_i \in H^2(M, \mathbb{Z})$, $(x_i, x_i) = 4$.

Доказательство. Шаг 1: Рациональные точки плотны в $\text{Null}(M)$. Действительно, как минимум одна рациональная точка в $\text{Null}(M)$ имеется; обозначим ее за r . Возьмем любую рациональную прямую $S \subset \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{R})$, проходящую через r . **Поскольку одна из точек пересечения $S \cap \text{Null}(M)$ рациональна, другая тоже рациональна.**

Шаг 2: Вектор $v \in H^2(M, \mathbb{Z})$ называется **примитивным**, если он порождает $(\mathbb{R} \cdot v) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$. Поскольку решетка $H^2(M, \mathbb{Z})$ унимодулярна, **для любого примитивного вектора $v \in H^2(M, \mathbb{Z})$ существует $v' \in H^2(M, \mathbb{Z})$ такой, что $(v, v') = 1$.**

Шаг 3: Обозначим за \mathfrak{B} множество примитивных целых нуль-векторов. В силу шага 1, $\mathbb{P}\mathfrak{B}$ плотно в $\text{Null}(M)$. Пусть $v \in \mathfrak{B}$. **Осталось найти последовательность $x_i \in H^2(M, \mathbb{Z})$ такую, что проективизации $\{\mathbb{P}x_i\}$ сходятся к $\mathbb{P}v$, а $(x_i, x_i) = 4$.**

Плотные множества в световом конусе (продолжение)

Шаг 3: Обозначим за \mathfrak{S} множество примитивных целых нуль-векторов. В силу шага 1, $\mathbb{P}\mathfrak{S}$ плотно в $\text{Null}(M)$. Пусть $v \in \mathfrak{S}$. **Осталось найти последовательность $x_i \in H^2(M, \mathbb{Z})$ такую, что проективизации $\{\mathbb{P}x_i\}$ сходятся к $\mathbb{P}v$, а $(x_i, x_i) = 4$.**

Шаг 4: Найдем $x \in H^2(M, \mathbb{Z})$ такой, что $(v, x) = 1$, и пусть $y \in H^2(M, \mathbb{Z})$ – любой целочисленный вектор с ненулевым квадратом, ортогональный v и x . Если $u = \lambda v + x + \mu y$, то $(u, u) = 2\lambda + x^2 + \mu^2 y^2$. Напишем $\lambda(\mu) = -1/2(x^2 + \mu^2 y^2 - 4)$. Тогда $u(\mu) := \lambda(\mu)v + x + \mu y$ – целочисленный вектор (форма пересечения четна), причем $(u(\mu), u(\mu)) = 4$. **Осталось доказать, что $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathbb{P}u(\mu) = \mathbb{P}v$.**

Шаг 5: Выберем на $H^2(M, \mathbb{R})$ положительно-определенную метрику g , таким образом, что $g(x, x) = g(y, y) = x(v, v) = 1$, обозначим за $|\cdot|$ соответствующую норму, $|z| := g(z, z)^{1/2}$. Тогда $|u(\mu) - \lambda(\mu)v| \leq 1 + |\mu|$, а $|\lambda(\mu)v| \geq |1/2\mu^2 y^2| - x^2 - 4$. Получается, что со стремлением μ к бесконечности, в треугольнике $0, u(\mu), \lambda(\mu)v$ сторона $(0, \lambda(\mu)v)$ растет квадратично по μ , сторона $(u(\mu), \lambda(\mu)v)$ линейно, соответственно, **угол между противоположащими к $(u(\mu), \lambda(\mu)v)$ сторонами стремится к нулю.** Мы доказали, что $\mathbb{P}v$ получено как предел целочисленных $\mathbb{P}u(\mu)$, удовлетворяющих $(u(\mu), u(\mu)) = 4$. ■