Комплексные поверхности,

лекция 8: Все K3 диффеоморфны

Миша Вербицкий

НМУ/матфак ВШЭ, Москва

2 апреля 2012

K3-поверхности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **K3-поверхность** есть комплексная поверхность с $b_1 = 0$ и $c_1 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Все поверхности с $b_1 = 0$ - кэлеровы** (Бухсдаль-Ламари).

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Каноническое расслоение K_M тривиально.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Римана-Роха дает $\chi(\mathcal{O}_M) = 2 = \frac{c_2(M)}{12}$, значит, $c_2(M) = 24$. Поскольку $c_2(M)$ есть эйлерова характеристика M, получаем $b_2(M) = 22$.

Это дает ромб Ходжа для K3-поверхности:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Когомологии K3 не имеют кручения.**

Пространство периодов для K3-поверхности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\operatorname{Comp}(M)$ есть множество всех интегрируемых почти комплексных структур на многообразии, с топологией, индуцированной топологией Фреше на пространстве тензоров. **Пространство Тейхмюллера** $\operatorname{Teich}(M)$ комплексных структур есть факторпространство $\operatorname{Comp}(M)/\operatorname{Diff}_0(M)$, где $\operatorname{Diff}_0(M)$ есть **группа изотопий** (связная компонента группы диффеоморфизмов).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M есть K3-поверхность. **Отображение периодов** $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{C})$ сопоставляет каждой комплексной структуре I на M прямую $H^{2,0}(M,I) \subset H^2(M,\mathbb{C})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство периодов** K3-поверхности есть пространство $\mathbb{P}\mathrm{er} \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{C})$ состоящее из всех прямых $\mathbb{C}\cdot l$ таких, что $l\wedge l = 0$ и $l\wedge\bar{l} > 0$. **Отображение периодов** есть отображение $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} \mathbb{P}\mathrm{er}$.

Основной результат прошлой лекции:

ТЕОРЕМА: (Локальная теорема Торелли для K3) Отображение периодов $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} \mathbb{P}\mathrm{er}$ этально, т.е. задается гомеоморфизмом в окрестности каждой точки $I \in \operatorname{Teich}(M)$.

Пространство периодов и $++$-грассманиан (повторение)

Пусть V – вещественное векторное пространство, снабженное скалярным произведением q. Обозначим за $\mathbb{P}\mathrm{er}(V)$ множество прямых $l \in \mathbb{P}V_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих $q(l,l) = 0$ и $q(l,\bar{l}) > 0$, и пусть $\mathrm{Gr}_{+,+}(V)$ – пространство ориентированных 2-мерных плоскостей $W \subset V$, таких, что $q|_W$ положительно определено.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для каждого $W \in \mathrm{Gr}_{+,+}(V)$, рассмотрим оператор поворота на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки: $I_W : \ W \to W$. Обозначим за $P(W) \in \mathbb{P}V_{\mathbb{C}}$ прямую, порожденную $x + \sqrt{-1}\, I_W(x)$, для $x \in W$. Тогда **P задает биекцию $P : \mathrm{Gr}_{+,+}(V) \to \mathbb{P}\mathrm{er}(V)$.**

СЛЕДСТВИЕ: Пространство периодов для K3-поверхности изоморфно $SO(19,3)/SO(2) \times SO(19,1)$.

Гладкие квартики (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гладкой квартикой** называется гладкая гиперповерхность в $\mathbb{C}P^n$, заданная неприводимым однородным полиномом степени 4.

ЗАМЕЧАНИЕ: По формуле Эйлера, каноническое расслоение на $\mathbb{C}P^n$ есть $\mathcal{O}(-n-1)$. Формула присоединения, примененная к гладкой поверхности $Z \subset \mathbb{C}P^n$ степени m, дает $N^*Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} K_Z = K_{\mathbb{C}P^n}|_Z$, а коль скоро $N^*Z = \mathcal{O}(-m)$ и $K_{\mathbb{C}P^n} = \mathcal{O}(-n-1)$, **имеем $K_Z = \mathcal{O}(m-n-1)$.**

СЛЕДСТВИЕ: Для гладкой квартики в $\mathbb{C}P^3$, $n = 3$, $m = 4$, значит $K_Z = \mathcal{O}_Z$. Поэтому **гладкая квартика есть поверхность с тривиальным каноническим классом.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В дальнейшем, говоря про "гладкие квартики", **я буду подразумевать квартики размерности 2.**

Гладкие квартики и теорема Лефшеца о гиперплоском сечении

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **k-е вложение Веронезе** есть проективное вложение $\mathbb{C}P^k \to \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(k))$, заданное линейной системой $\mathcal{O}(k)$. Иначе говоря, **вложение Веронезе переводит** $(t_0 : t_1 : ... : t_n)$ **в** $(P_0(t_0, ..., t_n) : P_1(t_0, ..., t_n) : ... : ...)$**, где** P_i **обозначает какой-то базис в однородных многочленах степени** k**.**

СЛЕДСТВИЕ: **Гладкая квартика есть пересечение образа 4-го отображения Веронезе и общей гиперплоскости.**

ТЕОРЕМА: **(Лефшеца о гиперплоском сечении)**
Пусть $Z \subset \mathbb{C}P^n$ – гладкое, проективное многообразие размерности m, а $H \subset \mathbb{C}P^n$ – гиперплоское сечение, трансверсально пересекающее Z. Тогда **для любого** $i < m - 1$**, отображение гомотопических групп** $\pi_i(Z \cap H) \to \pi_i(Z)$ **– изоморфизм.**

СЛЕДСТВИЕ: **Гладкая двумерная квартика является K3-поверхностью**.

В самом деле, $\pi_1(Z) = \pi_1(\mathbb{C}P^3) = 0$ по теореме Лефшеца, примененной к образу Веронезе.

Пространство $H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$ и линейные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа Нерона-Севери $NS(M)$ многообразия M есть образ $\operatorname{Pic}(M)$ в $H^2(M,\mathbb{Z})$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – компактное, кэлерово. Экспоненциальная точная последовательность $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_M^* \to 0$ дает

$$\to H^1(\mathcal{O}_M) \to \operatorname{Pic}(M) \to H^2(M,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi} H^2(M,\mathcal{O}_M)$$

При этом ψ переводит класс когомологий $v \in H^2(M,\mathbb{Z})$ в его проекцию на $H^{0,2}(M) = H^2(M,\mathcal{O}_M)$. Ядро проекции $H^2(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{\Pi} H^{0,2}(M)$ есть $H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M)$, причем каждый вещественный класс когомологий η, лежащий в ядре Π, удовлетворяет

$$\eta \in \left(H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M)\right) \cap \left(\overline{H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M)}\right) =$$
$$= \left(H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M)\right) \cap \left(H^{0,2}(M) \oplus H^{1,1}(M)\right) = H^{1,1}(M).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за $H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$ **множество целочисленных классов когомологий, которые лежат в $H^{1,1}(M)$.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: В силу предыдущего замечания, **если группа $H^2(M,\mathbb{Z})$ без кручения, то $NS(M) = H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$.**

Формула Римана-Роха-Хирцебруха (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть L, L' – линейные расслоения на повекрхности X. Число $\int_X c_1(L) \wedge c_1(L')$ обозначается (L, L'), и называется **индекс пересечения**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эйлерова характеристика** когерентного пучка F есть число $\chi(F) := \sum_i (-1)^i \dim H^i(F)$.

Напомним **формулу Римана-Роха** для поверхности:

ТЕОРЕМА: Для любого линейного расслоения L на поверхности, $\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{(L-K_X,L)}{2}$.

Для K3-поверхности, $\chi(\mathcal{O}_X) = h^{0,0}(X) - h^{0,1}(X) + h^{0,2}(X) = 2$, а $c_1(K_X) = 0$. Получаем:

ТЕОРЕМА: Для любого линейного расслоения L на K3, $\chi(L) = 2 + \frac{(L,L)}{2}$.

Линейные расслоения на K3

Пусть (M,I) – K3-поверхность. Поскольку форма пересечения совместима с разложением Ходжа, $(H^{2,0}(M)\oplus H^{0,2}(M))^\perp = H^{1,1}(M)$. Пространство $H^{2,0}(M)\oplus H^{0,2}(M)$ есть комплексификация $\mathcal{P}\mathrm{er}(I) := \langle \operatorname{Re}\Omega, \operatorname{Im}\Omega\rangle$, где Ω обозначает класс голоморфной симплектической формы.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M,I) есть K3-поверхность, а $W := \mathcal{P}\mathrm{er}(I) \in G_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$. **Тогда** $H^{1,1}_I(M,\mathbb{R}) = W^\perp$ (ортогональное дополнение).

СЛЕДСТВИЕ: Для любой K3, $\mathrm{Pic}(M,I) = NS(M,I) = H^{1,1}_I(M,\mathbb{Z})$ – **множество целочисленных векторов, ортогональных** $W = \mathcal{P}\mathrm{er}(I) \in G_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$.

СЛЕДСТВИЕ: Для общей K3-поверхности, группа $\mathrm{Pic}(M,I)$ тривиальна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Очень обильное расслоение** есть линейное расслоение вида $\varphi^*(\mathcal{O}(1))$, где $\varphi:\ M \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ – проективное вложение. **Обильное расслоение** есть линейное расслоение, положительная степень которого обильна.

ТЕОРЕМА: **(Кодаира) Расслоение L обильно тогда и только тогда, когда $c_1(L)$ – кэлеров класс.**

К3-поверхности с одномерной группой Пикара

ТЕОРЕМА: (Накаи-Мойшезон) Пусть L – голоморфное расслоение на поверхности, такое, что $(L,L) > 0$, и для любой кривой C, $\deg L|_C > 0$. **Тогда L обильно.**

Теорема 1: Пусть (M,I) есть К3-поверхность, причем группа $Pic(M,I) = NS(M,I) = H_I^{1,1}(M,\mathbb{Z})$ одномерна, $NS(M,I) = \mathbb{Z}\cdot\eta$. Обозначим за L образующую $Pic(M,I)$, $c_1(L) = \eta$. Предположим, что $(L,L) > 0$. **Тогда L либо L^* обильно.**

Доказательство. Шаг 1: Риман-Рох: $h^0(L) - h^1(L) + h^2(L) = \chi(L) = 2 + \frac{(L,L)}{2}$. Двойственность Серра дает $H^0(L^*)^* = H^2(L\otimes K_M) = H^2(L)$, то есть $h^0(L^*) = h^2(L)$. Поэтому $h^0(L) + h^0(L^*) \geqslant 2$, то есть либо L, либо L^* имеет голоморфные сечения. Заменив L на L^*, если потребуется, **можем считать, что $h^0(L) > 0$.**

Шаг 2: Поскольку у L есть сечения, $c_1(L)$ представляется кривой C. Поскольку Pic(M) одномерен, все классы в $H_2(M,\mathbb{Z})$, представимые кривыми, пропорциональны η, с положительным коэффициентом. Значит, для любой кривой $D\sim nC$, имеем

$$\deg L|_D = \int_M c_1(L)\wedge[D] = n\int_M c_1(L)\wedge[C] = n(L,L) > 0.$$

Теперь **обильность L следует из Накаи-Мойшезона.** ∎

Обильные расслоения на квартиках

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M,I) – K3-поверхность, $H^{1,1}_I(M,\mathbb{Z})$ – ее решетка Нерона-Севери. **Поверхность (M,I) изоморфна квартике тогда и только тогда, когда $\operatorname{Pic}(M,I)=H^{1,1}_I(M,\mathbb{Z})$ содержит очень обильное расслоение L с $(L,L)=4$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть (M,I) вкладывается в $\mathbb{C}P^3$ как гладкая гиперповерхность степени 4, а $L=\mathcal{O}(1)|_M$. Тогда $(L,L)=\int_M c_1(L)\wedge c_1(L)=\int_{\mathbb{C}P^3}[M]\wedge[H]\wedge[H]$ где $[H]$ есть фундаментальный класс гиперплоского сечения, а $[M]=4[H]$ – фундаментальный класс M. **Поэтому $(L,L)=\int_{\mathbb{C}P^3}4[H]\wedge[H]\wedge[H]=4$.**

Шаг 2: Пусть M есть K3, а L – очень обильное расслоение с $(L,L)=4$. Риман-Рох: $h^0(L)=h^0(L)-h^1(L)+h^2(L)=\chi(L)=2+\frac{(L,L)}{2}=4$. Рассмотрим соответствующее вложение $M\to\mathbb{P}H^0(M,L)^*$ (оно переводит $m\in M$ и функционал $\lambda\in(L|_m)^*$ в $\lambda: H^0(M,L)\to\mathbb{C}$). **Степень этой гиперповерхности можно вычислить по формуле $\deg M=\int_M c_1(\mathcal{O}(1))\wedge c_1(\mathcal{O}(1))=(L,L)=4$.** ■

Базисные точки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Базисная точка** линейного расслоения есть такая точка, где все его сечения зануляются. Расслоение **не имеет базисных точек**, если оно глобально порождено.

ТЕОРЕМА: (Бертини) Пусть L – линейное расслоение, а D – дивизор нулей общего сечения L. **Тогда D неособ вне базисного множества L.** ■

ТЕОРЕМА: Пусть M – K3-поверхность, $\operatorname{Pic}(M) = \mathbb{Z}$, а L – образующая группы Пикара, такая, что $(L, L) = 4$. **Тогда L либо $-L$ обильно и глобально порождено.**

Доказательство. Шаг 1: Обильность L либо L^* доказана выше. Заменив L на L^*, если потребуется, **будем считать, что L обильно.** Теперь из теоремы Римана-Роха следует, что $\dim H^0(L) = 4$.

Шаг 2: Пусть D – нетривиальная кривая, которая целиком содержится в базисном множестве L. Из точной последовательности $0 \to L(-D) \to L \to L|_D \to 0$ получаем точность $0 \to H^0(L(-D)) \to H^0(L) \to 0$ (*) (коль скоро **отображение ограничения на D равно нулю**). Значит, расслоение $L(-D)$ **эффективно** (имеет сечения), что может случиться только если $\mathcal{O}_M(D) = L$, так как L есть образующая Пикара. Но тогда $\dim H^0(L(-D)) = 1$, а в силу (*) оно равно 4. **Мы доказали, что базисное множество L не содержит кривых.**

Базисные точки (продолжение)

Шаг 3: Пусть C – дивизор нулей общего сечения L. **Докажем, что C неособо.** Если C особо, по теореме Бертини оно особо в базисной точке z, в которой C имеет кратность как минимум 2. Все другие сечения L тоже особы в z, с той же кратностью, то есть пересекают C с кратностью $2 * 2 = 4$. Поскольку сечения L пересекаются с общей кратностью 4, **каждое сечение $l \in H^0(L)$ ненулевое на C вне z.**

Шаг 4: Напишем точную последовательность $0 \to L(-C) = \mathcal{O}_M \to L \to L|_C \to 0$. Получим длинную точную последовательность

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_M) \to H^0(L) \to H^0(L|_C) \to H^1(\mathcal{O}_M) = 0,$$

значит, образ ограничения $H^0(L) \to H^0(L|_C)$ имеет размерность 3. Но сечение $H^0(L|_C)$ определяется с точностью до константы своими нулями, то есть в силу предыдущего шага, образ ограничения $H^0(L) \to H^0(L|_C)$ должен быть одномерен. **Мы доказали, что дивизор нулей общего сечения L гладкий**.

Базисные точки (окончание)

Шаг 5: Пусть C – дивизор нулей гладкого сечения L. По формуле присоединения, $NC^* \otimes K_C = K_M|_C = \mathcal{O}_C$, что дает $L|_C = NC = K_C$. Из этого следует, в частности, что $\deg K_C = 4$, то есть **C – кривая рода 3.**

Шаг 6: Напишем точную последовательность

$$0 \to L(-C) = \mathcal{O}_M \longrightarrow L \longrightarrow L|_C = K_C \to 0.$$

Получим длинную точную последовательность

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_M) \to H^0(L) \to H^0(K_C) \to H^1(\mathcal{O}_M) = 0.$$

Для любой кривой рода 3, пучок K_C либо очень обилен (если кривая не гиперэллиптическая) либо глобально порожден (если гиперэллиптическая). В обоих случаях, **для каждой точки $z \in C$, найдется сечение L, которое в ней ненулевое.** ■

Пространство модулей квартик (набросок)

Следствие 2: Пусть M – K3-поверхность, $\operatorname{Pic}(M) = \mathbb{Z}$, а L – обильная образующая группы Пикара, такая, что $(L, L) = 4$. Рассмотрим соответствующее отображение $\psi : \ M \to \mathbb{P}H^0(M, L)^* = \mathbb{C}P^3$. **Тогда образ ψ – квартика**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку у L нет базисных точек, ψ голоморфно. Поэтому $\deg \operatorname{im} \psi = \int_{\psi(M)} [H] \wedge [H]$, где $[H]$ есть класс гиперплоского сечения. Поскольку $\psi^* \mathcal{O}(1) = L$,

$$\deg \operatorname{im} \psi = \int_{\psi(M)} [H] \wedge [H] = \int_M c_1(L) \wedge c_1(L) = (L, L) = 4.$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ: Квартика в $\mathbb{C}P^3$ задается полиномом 4-й степени от 4 переменных. $\dim \operatorname{Sym}^4 \mathbb{C}^4 = \frac{(4+4-1)!}{4!3!} = 35$ На полиномах действует группа $GL(4, \mathbb{C})$ размерности 16, соответственно, **квартика определяется $35 - 16 = 19$ параметрами**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство периодов K3 20-мерно. **“Квартики задают дивизор в пространстве модулей”**.

Скрученный дифференциал d^c (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,I) – комплексное многообразие, $I: TM \to TM$ – **оператор комплексной структуры**, $I^2 = -\mathrm{Id}_{TM}$. **скрученный дифференциал** d^c определяется формулой $d^c := I^{-1} d I$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M,I) - комплексное многообразие. Тогда $\partial := \frac{d+\sqrt{-1}\,d^c}{2}$, $\overline{\partial} := \frac{d-\sqrt{-1}\,d^c}{2}$ **– компоненты в разложении Ходжа** d: $\partial = d^{1,0}$, $\overline{\partial} = d^{0,1}$.

ТЕОРЕМА: Пусть (M,I) – почти комплексное многообразие. **Тогда следующие утверждения равносильны:**

1. I интегрируемо. 2. $\partial^2 = 0$. 3. $\overline{\partial}^2 = 0$. 4. $dd^c = -d^c d$ 5. $dd^c = 2\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}$.

ТЕОРЕМА: (dd^c-лемма)
Пусть η - форма на компактном кэлеровом многообразии, которая удовлетворяет какому-то из условий
1. η – точная (p,q)-форма.
2. η – d^c-точная, d-замкнутая.
3. η – ∂-точная, $\overline{\partial}$-замкнутая.

Тогда $\eta \in \operatorname{im} dd^c = \operatorname{im} \partial\overline{\partial}$.

Теорема Кодаиры о стабильности

ТЕОРЕМА: (Теорема Кодаиры о стабильности)
Пусть M – компактное многообразие, I_t, g_t – семейство кэлеровых структур, параметризованное $t \in \mathbb{R}$, а $[\omega'_t] \in H^{1,1}(M, I_t)$ – семейство классов когомологий. Предположим, что $[\omega'_0]$ – кэлеров класс. **Тогда $[\omega'_t]$ кэлеров для всех $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\omega'_0 \in \Lambda^{1,1}(M, I_t)$ – кэлерова форма, представляющая $[\omega'_0]$. Обозначим за $h([\omega'_t]) \in \Lambda^{1,1}(M, I_t)$ гармонический представитель $[\omega'_t]$. Поскольку разность $\omega'_0 - h([\omega'_0])$ точная и типа (1,1), **dd^c-лемма дает $\omega'_0 = h([\omega'_0]) + dd^c\psi$.**

Шаг 2: Рассмотрим следующую (1,1)-форму на (M, I_t): $h([\omega'_t]) + dd^c\psi$. Ее собственные значения, для небольших t, близки к собственным значениям $\omega'_0 = h(\omega'_0) + dd^c\psi$, то есть положительны. **Значит, это кэлерова форма.** ■

Пространство модулей почти поляризованных K3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\eta \in H^2(M,\mathbb{Z})$ – ненулевой класс когомологий на K3, $(\eta,\eta) > 0$. Обозначим за $\mathbb{P}\mathrm{er}_\eta$ множество $W \in \mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$, ортогональных η. Это пространство называется **пространство периодов поляризованных K3**.

СЛЕДСТВИЕ: Множество $\mathbb{P}\mathrm{er}_\eta$ периодов всех K3, для которых η имеет тип (1,1), есть

$$\{l \in \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{C}) \ \mid \ (l,l) = 0, (l,\bar{l}) > 0, \quad (l,\eta) = 0\}.$$

Это дивизор в $\mathbb{P}\mathrm{er}$ (проверьте это).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за Teich_η пространство Тейхмюллера всех комплексных структур на K3, для которых класс $\eta \in H^2(M,\mathbb{Z})$ имеет тип (1,1). Это пространство называется **пространством Тейхмюллера почти поляризованных K3**. Пространство $\mathrm{Teich}_\eta^{pol} \subset \mathrm{Teich}_\eta$, состоящее из всех K3, для которых $\pm\eta$ – кэлеров класс, называется **пространством Тейхмюллера поляризованных K3**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из локальной теоремы Торелли немедленно следует, что **отображение периодов $\mathcal{P}\mathrm{er}: \ \mathrm{Teich}_\eta \to \mathbb{P}\mathrm{er}_\eta$ этально** (локально диффеоморфизм).

Пространство модулей поляризованных K3

УТВЕРЖДЕНИЕ: $\mathrm{Teich}_\eta^{pol}$ **открыто и плотно в** Teich_η**.**

Доказательство. Шаг 1: В силу теоремы Кодаиры о стабильности, $\mathrm{Teich}_\eta^{pol}$ **открыто в** Teich_η**.**

Шаг 2: В силу Теоремы 1, для каждого $I \in \mathrm{Teich}_\eta$, для которого

$$\mathrm{Pic}(M,I) = \mathcal{P}\mathrm{er}(I)^\perp \cap H^2(M,\mathbb{Z})$$

одномерен, $\pm\eta$ – кэлеров класс.

Шаг 3: Из теоремы Торелли следует, что у каждой $l = \mathcal{P}\mathrm{er}(I)$ есть окрестность в $\mathbb{P}\mathrm{er}^\eta$, которая лежит в образе отображения периодов. Легко видеть, что **для общей l' в $\mathbb{P}\mathrm{er}^\eta$, группа $l'^\perp \cap H^2(M,\mathbb{Z})$ порождена η.** В силу шага 2, $\mathcal{P}\mathrm{er}^{-1}(l') \in \mathrm{Teich}_\eta^{pol}$. Значит, $\mathrm{Teich}_\eta^{pol}$ плотно в Teich_η.

■

Пространство Тейхмюллера квартик

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\eta \in H^2(M, \mathbb{Z})$ есть целочисленный класс на K3, $(\eta, \eta) = 4$. Обозначим за $\operatorname{Teich}_\eta^q$ пространство Тейхмюллера всех $I \in \operatorname{Teich}_\eta$ таких, что линейное расслоение L на (M, I) с $c_1(L) = \eta$ обильно и глобально порождено. Пространство $\operatorname{Teich}_\eta^q$ называется **пространством Тейхмюллера квартик**.

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу Следствия 2, для каждой $I \in \operatorname{Teich}_\eta^q$, расслоение L задает отображение (M, I) в $\mathbb{C}P^3$, образ которого – квартика; и все гладкие квартики получаются таким образом.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы получили отображение $\operatorname{Teich}_\eta^q \to \operatorname{Sym}^4 \mathbb{C}^4 / GL(\mathbb{C}, 4)$, сюрьективное на множество гладких квартик. Поскольку **размерность пространства квартик равна размерности $\operatorname{Teich}_\eta^q$,** в общей точке это отображение – иммерсия.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **$\operatorname{Teich}_\eta^q$ плотно в $\operatorname{Teich}_\eta$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Точно такое же, как доказательство плотности $\operatorname{Teich}_\eta^{pol}$ в $\operatorname{Teich}_\eta$. ■

О плотности квартик

ТЕОРЕМА: (будет доказана позже)
Пусть $\mathfrak{R} \subset H^2(M,\mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v,v) = 4$. **Тогда $\bigcup_{\eta\in\mathfrak{R}} \mathbb{P}\mathrm{er}_\eta$ плотно в $\mathbb{P}\mathrm{er}$.**

СЛЕДСТВИЕ: $\bigcup_{\eta\in\mathfrak{R}} \mathrm{Teich}_\eta^q$ плотно в Teich.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В силу предыдущей теоремы, множество

$$\mathcal{P}\mathrm{er}^{-1}\left(\bigcup_{\eta\in\mathfrak{R}} \mathbb{P}\mathrm{er}_\eta\right) = \bigcup_{\eta\in\mathfrak{R}} \mathrm{Teich}_\eta$$

плотно в $\mathrm{Teich} = \mathcal{P}\mathrm{er}^{-1}(\mathbb{P}\mathrm{er})$. С другой стороны, Teich_η^q плотно в Teich_η. Значит, $\bigcup_{\eta\in\mathfrak{R}} \mathrm{Teich}_\eta^q$ плотно в Teich. ■

СЛЕДСТВИЕ: Поскольку гладкие квартики плотны в пространстве $\mathrm{Sym}^4\mathbb{C}^4/GL(\mathbb{C},4)$ всех квартик, **на каждой компоненте Teich_η^q есть плотное множество комплексных структур, соответствующих гладким квартикам.**

О плотности квартик (продолжение)

Мы доказали такую теорему

ТЕОРЕМА: На пространстве Тейхмюллера K3 есть плотное множество точек, соответствующих гладким квартикам.

Поскольку гладкие квартики образуют связное, гладкое семейство, они все диффеоморфны.

СЛЕДСТВИЕ: Любая K3 диффеоморфна гладкой квартике.

* * *

Осталось доказать:

ТЕОРЕМА: Пусть $\mathfrak{R} \subset H^2(M, \mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v, v) = 4$. **Тогда $\bigcup_{\eta \in \mathfrak{R}} \mathbb{P}\mathrm{er}_\eta$ плотно в $\mathbb{P}\mathrm{er}$.**

Другая формулировка

Теорема 2: Пусть $\mathfrak{R} \subset H^2(M, \mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v, v) = 4$, а $W_{\mathfrak{R}} \subset \mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M, \mathbb{R}))$ – множество всех 2-плоскостей, ортогональных какому-то $v \in \mathfrak{R}$. **Тогда $W_{\mathfrak{R}}$ плотно в $\mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M, \mathbb{R}))$.**

Плотные множества в $\mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$

Пусть $A \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$ – подмножество. Обозначим за $V(A)$ множество 2-плоскостей, ортогональных какому-то $v \in A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Нуль-квадрика**, или же **световой конус** $\mathrm{Null}(M) \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$ есть множество всех $l \in \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$, $(l,l) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $B \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$ – множество предельных точек $A \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$, то $V(A)$ плотно в $V(B)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $V(\mathrm{Null}(M)) = \mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$. Действительно, для каждой 2-плоскости в $H^2(M,\mathbb{R})$, в ее ортогональном дополнении есть нуль-вектор.

Объединяя эти два замечания, получаем, что Теорема 2 следует из Теоремы 3.

Теорема 2: Пусть $\mathfrak{R} \subset H^2(M,\mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v,v) = 4$, а $W_{\mathfrak{R}} \subset \mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$ – множество всех 2-плоскостей, ортогональных какому-то $v \in \mathfrak{R}$. **Тогда $W_{\mathfrak{R}}$ плотно в $\mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$.**

Теорема 3:
Множество предельных точек $\mathbb{P}\mathfrak{R} \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$ содержит $\mathrm{Null}(M)$.

Плотные множества в световом конусе

Теорема 3': **Любая точка $x \in \operatorname{Null}(M) \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$ является пределом последовательности $\{\underline{x_i}\} \in \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{Z})$,** причем каждый $\underline{x_i}$ представлен $x_i \in H^2(M,\mathbb{Z})$, $(x_i,x_i)=4$.

Доказательство. Шаг 1: Рациональные точки плотны в $\operatorname{Null}(M)$. Действительно, как минимум одна рациональная точка в $\operatorname{Null}(M)$ имеется; обозначим ее за r. Возьмем любую рациональную прямую $S \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$, проходящую через r. **Поскольку одна из точек пересечения $S \cap \operatorname{Null}(M)$ рациональна, другая тоже рациональна.**

Шаг 2: Вектор $v \in H^2(M,\mathbb{Z})$ называется **примитивным**, если он порождает $(\mathbb{R}\cdot v) \cap H^2(M,\mathbb{Z})$. Поскольку решетка $H^2(M,\mathbb{Z})$ унимодулярна, **для любого примитивного вектора $v \in H^2(M,\mathbb{Z})$ существует $v' \in H^2(M,\mathbb{Z})$ такой, что $(v,v')=1$.**

Шаг 3: Обозначим за $\mathfrak{S}$ множество примитивных целых нуль-векторов. В силу шага 1, $\mathbb{P}\mathfrak{S}$ плотно в $\operatorname{Null}(M)$. Пусть $v \in \mathfrak{S}$. **Осталось найти последовательность $x_i \in H^2(M,\mathbb{Z})$ такую, что проективизации $\{\mathbb{P}x_i\}$ сходятся к $\mathbb{P}v$, а $(x_i,x_i)=4$.**

Плотные множества в световом конусе (продолжение)

Шаг 3: Обозначим за $\mathfrak{S}$ множество примитивных целых нуль-векторов. В силу шага 1, $\mathbb{P}\mathfrak{S}$ плотно в $\mathrm{Null}(M)$. Пусть $v \in \mathfrak{S}$. **Осталось найти последовательность $x_i \in H^2(M,\mathbb{Z})$ такую, что проективизации $\{\mathbb{P}x_i\}$ сходятся к $\mathbb{P}v$, а $(x_i, x_i) = 4$.**

Шаг 4: Найдем $x \in H^2(M,\mathbb{Z})$ такой, что $(v,x) = 1$, и пусть $y \in H^2(M,\mathbb{Z})$ – любой целочисленный вектор с ненулевым квадратом, ортогональный v и x. Если $u = \lambda v + x + \mu y$, то $(u,u) = 2\lambda + x^2 + \mu^2 y^2$. Напишем $\lambda(\mu) = -1/2(x^2 + \mu^2 y^2 - 4)$. Тогда $u(\mu) := \lambda(\mu)v + x + \mu y$ – целочисленный вектор (форма пересечения четна), причем $(u(\mu), u(\mu)) = 4$. **Осталось доказать, что $\lim\limits_{\mu\to\infty} \mathbb{P}u(\mu) = \mathbb{P}v$.**

Шаг 5: Выберем на $H^2(M,\mathbb{R})$ положительно-определенную метрику g, таким образом, что $g(x,x) = g(y,y) = x(v,v) = 1$, обозначим за $|\cdot|$ соответствующую норму, $|z| := g(z,z)^{1/2}$. Тогда $|u(\mu) - \lambda(\mu)v| \leqslant 1 + |\mu|$, а $|\lambda(\mu)v| \geqslant |1/2\mu^2 y^2| - x^2 - 4$. Получается, что со стремлением μ к бесконечности, в треугольнике $0, u(\mu), \lambda(\mu)v$ сторона $(0, \lambda(\mu)v)$ растет квадратично по μ, сторона $(u(\mu), \lambda(\mu)v)$ линейно, соответственно, **угол между противолежащими к $(u(\mu), \lambda(\mu)v)$ сторонами стремится к нулю.** Мы доказали, что $\mathbb{P}v$ получено как предел целочисленных $\mathbb{P}u(\mu)$, удовлетворяющих $(u(\mu), u(\mu)) = 4$. ■