# Комплексные поверхности: экзамен

Для сдачи экзамена на оценку $5 - k$ надо сдать по одной задаче из $4 - k$ разделов.

## 14.1. К3 поверхности и теорема Римана-Роха

**Задача 14.1.** Пусть $L$ – обильное расслоение на К3 поверхности. Докажите, что у $L$ нет базисных точек (точек, в которых все сечения зануляются).

**Задача 14.2.** Пусть $L$ – обильное расслоение на К3 поверхности. Докажите, что $L \otimes L$ глобально порождено.

**Задача 14.3.** Пусть $M$ - К3-поверхность, снабженная гиперкэлеровой структурой, а $S \cong S^2$ – семейство всех комплексных структур, индуцированных кватернионами. Обозначим за $S_{alg} \subset S$ множество алгебраических комплексных структур. Докажите, что $S_{alg}$ плотно и счетно в $S$.

## 14.2. Метрики Годушона

**Определение 14.1. Степень** линейного расслоения $L$ на $n$-мерном комплексном многообразии $M$ с метрикой Годушона $\omega$ есть число $\int_M \Theta_L \wedge \omega^{n-1}$ где $\Theta_L$ – кривизна связности Черна на $L$.

**Задача 14.4.** Пусть $M$ поверхность Хопфа, с заданной на ней метрикой Годушона, а $K_M$ – каноническое расслоение. Докажите, что $\deg K_M < 0$.

**Задача 14.5.** Метрика $\omega$ на эрмитовом $n$-многообразии называется балансированной (balanced), если $d(\omega^{n-1}) = 0$. Приведите пример компактного комплексного многообразия, не допускающего такой метрики, для $n > 2$.

## 14.3. Теория Ходжа

**Задача 14.6.** Пусть $M$ – компактная поверхность, а $\eta$ - положительная $(1,1)$-форма на $M$, которая является $(1,1)$-частью замкнутой. Докажите, что $\eta$ замкнута.

**Задача 14.7.** Пусть $M$ - компактная комплексная поверхность с $b_2 = 0$. Докажите, что любое линейное расслоение на $M$ допускает плоскую связность, совместимую с голоморфной структурой.

**Задача 14.8.** Пусть $M$ - комплексное многообразие, $Pic_0(M)$ - группа голоморфных линейных расслоений с тривиальным классом Черна, а $Fl(M) \subset Pic_0(M)$ - группа линейных расслоений, которые допускают плоскую, унитарную связность. Постройте естественный изоморфизм между
$Pic_0(M)/Fl(M)$ и $H^1(\mathcal{O}_M)/H^1_a(\mathcal{O}_M)$, где $H^1_a(\mathcal{O}_M)$ - классы когомологий, представимые замкнутыми, антиголоморфными формами.

## 14.4. Геометрия комплексных поверхностей

**Задача 14.9.** Пусть $M$ – некэлерова поверхность, гладко расслоенная над эллиптической кривой со слоем эллиптическая кривая (такая поверхность называется **поверхность Кодаиры**). Найдите числа Бетти $M$.

**Задача 14.10.** Пусть $M$ - поверхность с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, а $C \subset M$ - гладкая кривая. Докажите, что она эллиптическая.