

Аменабельные группы и равносоставленные множества

лекция 1

Миша Вербицкий

10 декабря 2013

Школа-конференция лаборатории Чебышева,
Репино, 8-13 декабря 2013 года

Конечно-аддитивные меры на множествах

Для любого множества S , обозначим за 2^S **множество его подмножеств**. Обозначим за $A \amalg B$ **объединение непересекающихся подмножеств S** .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geq 0}$ называется **конечно-аддитивной мерой**, если верно свойство **конечной аддитивности**: $\mu(A \amalg B) = \mu(A) + \mu(B)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что конечная аддитивность равносильна условию $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что конечная аддитивность равносильна условию $\mu\left(\amalg_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ для любого конечного набора непересекающихся подмножеств.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мера Лебега на отрезке **не является "конечно-аддитивной мерой"**, ибо **не определена на неизмеримых множествах**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Конечно-аддитивная мера не задает меры Лебега, ибо она **не обязательно счетно-аддитивна**.

УПРАЖНЕНИЕ: Постройте нетривиальную конечно-аддитивную меру на $\mathbb{Z}$, которая зануляется на всех конечных множествах.

Равносоставленные множества

Пусть X – множество с действием группы G .

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы пытаемся **найти G -инвариантные конечно-аддитивные меры на X , или доказать, что их нет.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Два подмножества $A, B \subset X$ называются **равносоставленными** (или **равноразложимыми** по отношению к действию G , если $A = \coprod_{i=1}^k A_i$, $B = \coprod_{i=1}^k B_i$, и существуют $g_1, \dots, g_k$, переводящие A_i в B_i : $g_i(A_i) = B_i$.

ПРИМЕР: (теорема Бойяи-Гервина, Bolyai-Gerwien theorem)

Пусть G есть группа движений (сдвигов и поворотов) $\mathbb{R}^2$. **Тогда любые два многоугольника одинаковой площади в $\mathbb{R}^2$ равносоставлены.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Это нетривиальный факт (граница многоугольников мешает). Если разрешается добавлять объединение любого количества отрезков, это делается довольно просто; именно это решение было получено Бойяи (1833), Гервиным (1835) и до них Уоллесом (Wallace, 1807).

Равносоставленные множества (продолжение)

ПРИМЕР: (третья проблема Гильберта; решена Максом Деном, студентом Гильберта, примерно за год до того, как Гильберт ее поставил) Пусть G есть группа движений (сдвигов и поворотов) $\mathbb{R}^3$. Тогда тетраэдр (плюс объединение конечного числа плоских сегментов) **не равносоставлен кубу того же объема** плюс объединение конечного числа плоских сегментов.

ЗАДАЧА: (Tarski's Challenge; 1925)

Докажите, что квадрат в $\mathbb{R}^2$ равносоставлен кругу того же объема.

Решение: **Miklós Laczkovich, 1991.**

Решение: 10^{50} частей, неизмеримых по Лебегу, доказательство использует аксиому выбора, G – группа параллельных переносов.



Miklós Laczkovich, (b. Budapest, 1948, February 21)

Hungarian Wikipedia's 10th Anniversary Conference, 15 January 2010

Теорема Банаха-Шредера-Бернштейна

ТЕОРЕМА: Пусть X – множество с действием группы G , $A, B \subset X$ подмножества, причем A равносоставлено с подмножеством B , а B равносоставлено с подмножеством A . **Тогда A и B равносоставлены.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Назовем отображение $U \xrightarrow{\varphi} V$ подмножеств X **кусочным G -сдвигом**, если $U = \coprod U_i$, и существуют $g_i \in G$ такие, что $\varphi|_{U_i}$ есть сдвиг на g_i .

Шаг 1: Пусть $f : A \hookrightarrow B$ – вложение из A в B , а $g : B \hookrightarrow A$ вложение из B в A , заданное кусочными G -сдвигами. Обозначим за A_0 дополнение $A \setminus g(B)$. Определим индуктивно A_i по формуле $A_{i+1} = f \circ g(A_i)$. Определим A_∞ как пересечение образов отображений $(f \circ g)^i$ для всех i (за $(f \circ g)^i$ обозначается композиция $f \circ g$ с собой i раз). Легко видеть, что **A разбивается в объединение непересекающихся подмножеств, $A = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_\infty$.**

Теорема Банаха-Шредера-Бернштейна (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть X – множество с действием группы G , $A, B \subset X$ подмножества, причем A равноставлено с подмножеством B , а B равноставлено с подмножеством A . **Тогда A и B равноставлены.**

Шаг 2: Применим аналогичную процедуру к B , получив разбиение B в объединение непересекающихся подмножеств, $B = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_\infty$. Тогда f задает биекцию из A_∞ в B_∞ , и из $A_0 \cup A_2 \cup A_4 \cup \dots$ в $B_1 \cup B_3 \cup B_5 \cup \dots$, а g задает биективное отображение из $B_0 \cup B_2 \cup B_4 \cup \dots$ в $A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup \dots$.

Шаг 3: Мы разбили A и B на непересекающиеся подмножества, которые попарно биективны, и биекции задаются кусочными G -сдвигами. ■

Парадоксальные множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X – множество с действием группы G . Подмножество $A \subset X$ называется **парадоксальным**, если $A = A_1 \sqcup A_2$, причем A_i равносоставлены с A .

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу предыдущей теоремы, достаточно найти в A два непересекающиеся подмножества $A_1, A_2 \subset A$ и кусочные G -сдвиги $\varphi_i : A_i \rightarrow A$, которые инъективны.

ПРИМЕР: (парадокс Банаха-Тарского)

Пусть G – группа движений $\mathbb{R}^3$. Тогда единичный шар в $\mathbb{R}^3$ – парадоксальное множество.

ПРИМЕР: (парадокс Серпинского-Мазуркевича)

Пусть G – группа движений $\mathbb{R}^2$. Тогда у $\mathbb{R}^2$ есть парадоксальные подмножества.

Парадоксальные множества (продолжение)

ТЕОРЕМА: фон Нойман (1929):

Если G содержит свободную подгруппу и свободно действует на X , то X парадоксально.

Тогда же фон Нойман определил **аменабельные группы** (не допускающие парадоксальных разбиений), и предложил гипотезу

Гипотеза фон Ноймана: Группа аменабельна тогда и только тогда, когда она не содержит свободной подгруппы.

Контрпример найден А. Ольшанским (1980).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Монстр Тарского есть группа G , порожденная двумя элементами x и y , и такая, что любая собственная подгруппа G изоморфна $\mathbb{Z}/p$.

ТЕОРЕМА: Монстр Тарского не аменабелен.

Парадоксальные множества (продолжение)

ЛЕММА: Пусть X – пространство с действием G , $X_0 := X \setminus F$, где F – конечное подмножество из d элементов. Пусть X_0 парадоксально. Тогда X тоже парадоксально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В силу парадоксальности X_0 , оно равносоставлено с $2d + 2$ копиями X_0 . Это дает вложение $X_0 \sqcup X_0 \sqcup F \sqcup F$ в X_0 кусочными G -сдвигами. Поскольку $X_0 \sqcup F$ равносоставлено с X , мы получаем вложение $X \sqcup X$ в X_0 кусочными G -сдвигами. Значит $X \sqcup X$ вкладывается в X кусочными сдвигами, что гарантирует парадоксальность X в силу теоремы Банаха-Шредера-Бернштейна. ■

Аменабельные группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $g \in G$, а $L_g : G \rightarrow G$ – отображение **левого сдвига**, переводящее x в gx . Функция $2^G \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}$ называется **левоинвариантной**, если $\mu(L_g(A)) = \mu(A)$ для любого $A \subset G$.

von Neumann, J. (1929),

"Zur allgemeinen Theorie des Masses", *Fundamenta Mathematica* 13: 73-116

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **аменабельной**, если существует ненулевая конечно-аддитивная левоинвариантная мера $2^G \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}_{\geq 0}$.



John von Neumann, 1903 - 1957

Свойства аменабельных групп

ЗАМЕЧАНИЕ: Конечные группы, очевидно, аменабельны.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим $X = G$ с действием G на себе сдвигами. Пусть G аменабельна. **Тогда X не парадоксально.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $\mu(A) = \mu(B)$, если A и B равносоставлены. Если X парадоксально, это дает $\mu(X) = 2\mu(X) = 0$, что противоречит аменабельности. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Любая подгруппа аменабельной группы аменабельна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $G' \subset G$ – подгруппа аменабельной группы, а $G' \backslash G$ – множество левых классов смежности. Выберем в каждом классе по представителю, и пусть M – множество всех таких представителей. Для какого-то подмножества $R \subset G'$, **обозначим за RM множество всех произведений вида rm , где $r \in R$, $m \in M$.** Определим $\mu_{G'}(R) := \mu_G(RM)$.

Шаг 1: Эта функция аддитивна, потому что $(R \sqcup R')M = RM \sqcup R'M$.

Шаг 2: Эта функция ненулевая, потому что $\mu_{G'}(G') = \mu_G(G'M) = \mu_G(G) > 0$, ибо $G'M = G$. ■

Банаховы пространства

Определение:

Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $\nu : V \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ функция со значениями в неотрицательных числах. ν называется **нормой** на V , если имеет место следующее

Невырожденность: $\nu(x) > 0$, если $x \neq 0$,

Неравенство треугольника: $\nu(x + x') \leq \nu(x) + \nu(x')$.

Инвариантность относительно гомотетии: $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$,

для любых $x, x' \in V$, и любого $\lambda \in \mathbb{R}$. В такой ситуации V называется **нормированным пространством**.

Определение: Пусть (V, ν) – нормированное пространство. Напомним, что (V, ν) называется **банаховым**, если оно полно, как метрическое пространство.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **любое конечномерное нормированное пространство – банахово**.

ℓ^∞ и среднее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть S – множество, а $\ell^\infty(S)$ – пространство ограниченных $\mathbb{R}$ -значных функций на S . Определим ℓ^∞ -норму на $\ell^\infty(S)$ формулой $|f|_{\ell^\infty} := \sup_S |f|$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\ell^\infty(S)$ – банахово пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Среднее на S есть непрерывный функционал $\int : \ell^\infty(S) \rightarrow \mathbb{R}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1. $\int(\chi_S) = 1$, где $\chi_S \in \ell^\infty(S)$ есть функция, отображающая S в 1.
2. $\int(f) \geq 0$ для любой неотрицательной функции $f \in \ell^\infty(S)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для подмножества $A \subset S$, обозначим за $\chi_A \in \ell^\infty(S)$ характеристическую функцию, которая равна 1 на A и 0 вне A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Конечно-аддитивная мера $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geq 0}$ называется вероятностной, если $\mu(S) = 1$.

ТЕОРЕМА: Пусть $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geq 0}$ – конечно-аддитивная вероятностная мера. Тогда существует среднее $\ell^\infty(S) \xrightarrow{\int} \mathbb{R}$ такое, что $\int \chi_A = \mu(A)$ для каждого $A \subset S$, и оно единственно.

Построение среднего

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Ступенчатая функция** на S есть функция, принимающая конечное число значений, $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для ступенчатой функции такого вида, напомним **среднее** формулой $\int(f) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$.

Доказательство существования среднего. Шаг 1: Докажите, что **пространство ступенчатых функций плотно** в $\ell^\infty(S)$.

Шаг 2: Докажите, что $f \mapsto \int(f)$ **непрерывный функционал на пространстве ступенчатых функций**, с топологией, заданной ℓ^∞ -нормой.

Шаг 3: Пусть $W \subset V$ – плотное подпространство нормированного пространства, а $\kappa : W' \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывный функционал. Докажите, что его **можно продолжить до непрерывного функционала** на V , и это продолжение однозначно.

Шаг 4: Определим $\ell^\infty(S) \xrightarrow{\int} \mathbb{R}$, продолжив $\int$ с пространства ступенчатых функций по непрерывности, как в шаге 3. Докажите, что этот функционал удовлетворяет условиям определения среднего. Проверьте единственность. ■

Произведение аменабельных групп

ЗАМЕЧАНИЕ: Любая ненулевая конечно-аддитивная мера μ на G становится вероятностной после домножения на $\mu(G)^{-1}$. **В дальнейшем все конечно-аддитивные меры на группах предполагаются вероятностными.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу предыдущей теоремы, задание левоинвариантной вероятностной меры на G равносильно заданию левоинвариантного среднего на $\ell^\infty(G)$.

ТЕОРЕМА: Произведение аменабельных групп аменабельно.

Доказательство. Шаг 1: Среднее удовлетворяет очевидному соотношению $\int(f) \leq \sup f$ (проверьте это).

Шаг 2: Рассмотрим проекцию $\pi : G \times G' \longrightarrow G$, и пусть $f \in \ell^\infty(G \times G')$ – ограниченная функция. Обозначим за $\pi_* f$ функцию на G , которая задана формулой $\pi_* f(\xi) := \int_{\{\xi\} \times G'} f(\xi \times g')$. **Эта функция ограничена**, потому что $\pi_* f(\xi) \leq \sup f$ (шаг 1).

Шаг 3: Пусть $\int(f) := \int_G \pi_* f$. **Это левоинвариантное среднее на $\ell^\infty(G \times G')$.** ■

Теорема Хана-Банаха

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: выпуклым конусом в векторном пространстве V называется подмножество $A \subset V$, удовлетворяющее следующим свойствам.

1. $\forall x, y \in A$, их сумма тоже лежит в A .
2. $\forall x \in A, \lambda \in \mathbb{R}^{>0}$, λx также лежит в A .

ТЕОРЕМА: (“Хана-Банаха”) Пусть V - топологическое векторное пространство, $A \subset V$ - открытый выпуклый конус, не содержащий 0, а $W \subset V$ - замкнутое подпространство, не пересекающее A . **Тогда на V существует непрерывный, линейный функционал θ , такой, что $\theta|_A > 0$, а $\theta|_W = 0$.**

ЗАДАЧА: Напомним, что **аффинная функция** на векторном пространстве – это сумма линейного функционала и постоянного отображения. Пусть даны два выпуклых, открытых, непересекающихся подмножества A, B в топологическом векторном пространстве V . **Докажите, что найдется непрерывная аффинная функция на V , строго положительная на одном из них, и строго отрицательная на другом.**

Аменабельность $\mathbb{Z}$ и теорема Хана-Банаха

ЛЕММА: Пусть $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченная функция, $g \in \mathbb{Z}$, а $L_g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ – левый сдвиг. Тогда $\inf_{\mathbb{Z}} (f - L_g^* f) \leq 0$, где $L_g^*(f)(t) = f(L_g(t))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно проверить для $L_g(t) = t + 1$. Тогда $f - L_g^* f(t) = f(t) - f(t + 1)$. Если $f(t) - f(t + 1)$ неотрицательно, значит, f монотонно убывает. Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(t + 1) = 0$, потому что f ограничена. ■

ТЕОРЕМА: Группа $\mathbb{Z}$ аменабельна.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $V = \ell^\infty(\mathbb{Z})$, C – конус функций $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих $f > \varepsilon > 0$ для какого-то ε , а I – пространство функций вида $f - L_g^* f$. В силу предыдущей леммы, $I \cap C = 0$.

Шаг 2: Применив теорему Хана-Банаха, мы получим функционал $\varphi : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$, который строго положителен на C , то есть $\frac{1}{\varphi(\chi_{\mathbb{Z}})}\varphi$ является средним.

Шаг 3: Условие $\varphi|_I = 0$ значит, что $\varphi(f) = \varphi(L_g^* f)$, то есть φ инвариантно относительно левых сдвигов. ■

Множества Фёльнера

Обозначим число элементов конечного множества за $|A|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A, B \subset S$ – множества. **симметрическая разность** A и B – это $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, а $F_n \subset G$ – последовательность подмножеств. $\{F_n\}$ называется **последовательностью Фёльнера** (Følner sequence), если для каждого $g \in G$, $\lim_n \frac{|F_n \Delta L_g(F_n)|}{|F_n|} = 0$.

ПРИМЕР: $F_n := [-n, n] \subset \mathbb{Z}$ является последовательностью Фёльнера в $\mathbb{Z}$.

ПРИМЕР: $F_n := [-n, n]^n \subset \mathbb{Z}^n$ является последовательностью Фёльнера в $\mathbb{Z}^n$ (проверьте).

ЗАМЕЧАНИЕ: Можно доказать, что **любая аменабельная группа содержит последовательность Фёльнера**.

ТЕОРЕМА: Пусть G – группа, снабженная последовательностью Фёльнера. **Тогда G аменабельна**.

Аменабельность групп и последовательности Фёлнера

ЛЕММА: Пусть G – группа, снабженная последовательностью Фёлнера, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченная функция, $g \in G$, а $L_g : G \rightarrow G$ – левый сдвиг. **Тогда** $\inf_G (f - L_g^* f) \leq 0$, где $L_g^*(f)(t) = f(L_g(t))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для конечного подмножества $X \subset G$ и функции f_1 на G , обозначим за $\text{Av}_X f_1$ среднее f_1 на X . Тогда

$$\begin{aligned} \text{Av}_{F_n}(f - L_g^* f) &= \frac{\sum_{x \in F_n} f(x) - \sum_{x \in L_g(F_n)} f(x)}{|F_n|} \leq \\ &\leq \frac{\sum_{x \in F_n \Delta L_g(F_n)} |f(x)|}{|F_n|} \leq \sup_G |f| \frac{|F_n \Delta L_g(F_n)|}{|F_n|} \end{aligned}$$

следовательно, $\lim_n \text{Av}_{F_n}(f - L_g^* f) = 0$. ■

Аменабельность групп и последовательности Фёлнера (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть G – группа, снабженная последовательностью Фёлнера. **Тогда G аменабельна.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $V = \ell^\infty(G)$, C – конус функций $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих $f > \varepsilon > 0$ для какого-то ε , а I – пространство, порожденное функциями вида $f - L_g^* f$. **В силу предыдущей леммы, $I \cap C = 0$.**

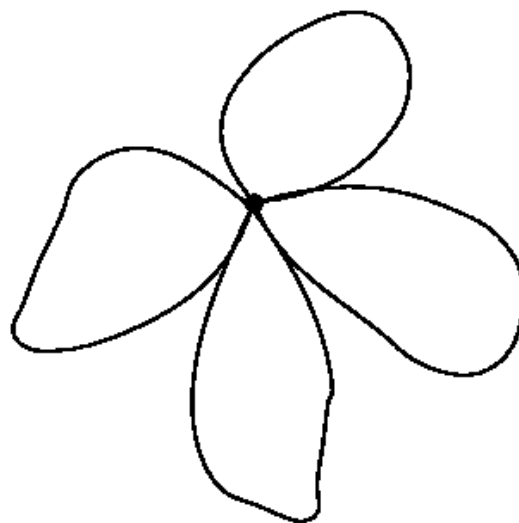
Шаг 2: Применив теорему Хана-Банаха, мы получим функционал $\varphi : \ell^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$, который строго положителен на C , то есть $\frac{1}{\varphi(\chi_G)}\varphi$ **является средним.**

Шаг 3: Условие $\varphi|_I = 0$ значит, что $\varphi(f) = \varphi(L_g^* f)$, то есть φ **инвариантно относительно левых сдвигов. ■**

ЗАМЕЧАНИЕ: Доказательство **дословно такое же**, как приведено выше для случая $\mathbb{Z} = G$.

Букет окружностей

Определение: Пусть Γ – связный граф, у которого есть всего одна вершина и $|I|$ ребер. Его топологическое пространство называется **букетом $|I|$ окружностей**. Оно имеет вид ромашки сделанной из нескольких окружностей.



Букет четырех окружностей

ТЕОРЕМА: (Зейферт-ван Кампен) **Свободная группа** $\mathbb{F}_n$ есть фундаментальная группа букета из n окружностей.

Свободная группа не аменабельна

ТЕОРЕМА: Свободная группа $\mathbb{F}_2$ не аменабельна.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $X = G = \mathbb{F}_2$ свободная группа, действующая на себе сдвигами. Для доказательства неаменабельности достаточно убедиться в том, что X парадоксально.

Шаг 2: Обозначим за x, y образующие $\mathbb{F}_2$. Тогда элементы $\mathbb{F}_2$ суть **слова, составленные из символов вида x, y, x^{-1}, y^{-1} , с запретом на последовательное употребление x, x^{-1} и y, y^{-1} .**

Шаг 3: Обозначим за $\mathbb{F}_2(x) \subset \mathbb{F}_2$ слова $W \subset \mathbb{F}_2$, которые начинаются с x . Тогда $\mathbb{F}_2(x)$ **содержит $x\mathbb{F}_2(x) \sqcup xy\mathbb{F}_2(x)$.** Поэтому $\mathbb{F}_2(x)$ парадоксально (оно содержит два непересекающихся подмножества $x\mathbb{F}_2(x)$ и $xy\mathbb{F}_2(x)$, с которыми равносоставлено).

Шаг 4: Аналогично доказывается, что $\mathbb{F}_2(x^{-1})$, $\mathbb{F}_2(y^{-1})$, $\mathbb{F}_2(y)$ парадоксальны. Поэтому $\mathbb{F}_2 \setminus \{e\}$ парадоксально. ■

Проблема фон Ноймана

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу доказанного выше, **любая группа, содержащая $\mathbb{F}_2$, не аменабельна.**

Проблема фон Ноймана: Пусть G – группа, которая не аменабельна. Всегда ли G содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{F}_2$?

Решение (найден контрпример):

Ol'shanskii, A. (1980), "On the question of the existence of an invariant mean on a group", Uspekhi Mat. Nauk 35 (4): 199-200.

ТЕОРЕМА: (альтернатива Титса для аменабельных групп)

Любая конечно-порожденная подгруппа в $GL(n)$ аменабельна, либо содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{F}_2$.