Аменабельные группы и парадокс Банаха-Тарского

лекция 1

Миша Вербицкий

11 декабря 2013

**Школа-конференция лаборатории Чебышева,
Репино, 8-13 декабря 2013 года**

Аменабельные группы (повторение)

Для любого множества S, обозначим за 2^S **множество его подмножеств.** Обозначим за $A\coprod B$ **объединение непересекающихся подмножеств S.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **конечно-аддитивной мерой**, если верно свойство **конечной аддитивности**: $\mu(A\coprod B) = \mu(A) + \mu(B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $g \in G$, а $L_g: \ G \longrightarrow G$ – отображение **левого сдвига**, переводящее x в gx. Функция $2^G \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}$ называется **левоинвариантной**, если $\mu(L_g(A)) = \mu(A)$ для любого $A \subset G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **аменабельной**, если существует ненулевая конечно-аддитивная левоинвариантная мера $2^G \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geqslant 0}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Любая подгруппа аменабельной группы аменабельна; расширение аменабельной группы с помощью аменабельной аменабельно; Z, Z^n, конечные группы, их расширения аменабельны.

ℓ^∞ и среднее (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть S – множество, а $\ell^\infty(S)$ – пространство ограниченных $\mathbb{R}$-значных функций на S. Определим **ℓ^∞-норму** на $\ell^\infty(S)$ формулой $|f|_{\ell^\infty} := \sup_S |f|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Среднее** на S есть непрерывный функционал $\int : \ \ell^\infty(S) \longrightarrow \mathbb{R}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1. $\int(\chi_S) = 1$, где $\chi_S \in \ell^\infty(S)$ есть функция, отображающая S в 1.

2. $\int(f) \geqslant 0$ для любой неотрицательной функции $f \in \ell^\infty(S)$.

Аменабельность и взятие и среднего

ТЕОРЕМА: Группа G **аменабельна тогда и только тогда, когда на $\ell^\infty(G)$ задано G-инвариантное среднее.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Из этого сразу следует аменабельность подгруппы: чтобы взять среднее функции f на $G_1 \subset G$, возьмем по представителю r в каждом смежном классе G/G_1, и напишем $\tilde{f}(x) := f(xr^{-1})$, где r в том же смежном классе.

ЗАМЕЧАНИЕ: Также из этого следует аменабельность расширения: если $0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \xrightarrow{\pi} G_3 \longrightarrow 0$ – точная последовательность групп, G_1, G_3 аменабельны, возьмем функцию f_2 на G_2 и получим функцию f_3 на G_3 по формуле $f_3(x) := \int_{\pi^{-1}(x)} f_2$ и усредним.

Равносоставленные множества (повторение)

Пусть X – множество с транзитивным действием группы G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Два подмножества $A, B \subset X$ называются **равносоставленными** (или **равноразложимыми**) по отношению к действию G, если $A = \coprod_{i=1}^k A_i$, $B = \coprod_{i=1}^k B_i$, и существуют $g_1, ..., g_k$, переводящие A_i в B_i: $g_i(A_i) = B_i$.

ТЕОРЕМА: (Банаха-Шредера-Бернштейна)
Пусть X – множество с действием группы G, $A, B \subset X$ подмножества, причем A равносоставлено с подмножеством B, а B равносоставлено с подмножеством A. **Тогда A и B равносоставлены.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X – множество с действием группы G. Подмножество $A \subset X$ называется **парадоксальным**, если $A = A_1 \coprod A_2 \coprod A_3 \coprod ... \coprod A_n$, причем A_i равносоставлены с A.

ЛЕММА: Пусть X – пространство с действием G, $X_0 := X \backslash F$, где F – конечное подмножество из d элементов. **Пусть X_0 парадоксально. Тогда X тоже парадоксально.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Если группа G аменабельна, то множество $X = G$ с действием G на себе сдвигами не парадоксально.

Свободная группа (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Свободная группа** от n образующих $x_1, ..., x_n$ есть группа, составленная из слов от $x_1, ..., x_n$ Элементы $\mathbb{F}_2$ суть слова, составленные из символов вида x_i, x_i^{-1}, с запретом на последовательное употребление x_i, x_i^{-1}; умножение – последовательное написание слов с сокращением выражений вида $x_i x_i^{-1}$ и $x_i^{-1} x_i$.

Определение: Пусть Γ – связный граф, у которого есть всего одна вершина и $|I|$ ребер. Его топологическое пространство называется **букетом $|I|$ окружностей**. Оно имеет вид ромашки сделанной из нескольких окружностей.

ТЕОРЕМА: (Зейферт-ван Кампен) **Свободная группа** $\mathbb{F}_n$ есть фундаментальная группа букета из n окружностей.

ТЕОРЕМА: **Свободная группа $\mathbb{F}_2$ не аменабельна.**

Парадоксальные множества и аменабельность

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть G действует на X, $x \in X$, A – парадоксальное подмножество, а $G(A,x) := \{g \in G \ \ |gx \in A\}$. **Тогда $G(A,x) \subset G$ парадоксально (относительно действия G на себе сдвигами справа).**

Доказательство. Шаг 1: Если $A = A_1 \coprod A_2$, то $G(A,x) = G(A_1,x) \coprod G(A_2,x)$. В силу равносоставленности, $A_i = \coprod A_i^j$, и существуют g_j, переводящие A_1^j в A_2^j. Тогда $G(A_i,x) = \coprod_j G(A_i^j,x)$.

Шаг 2: $G(A_1^j,x) = \{g \in G \ \ |gx \in A_1^j\}$, $g_j A_1^j = A_2^j \Rightarrow G(A_2^j,x) = \{g \in G \ \ |gg_jx \in A_1^j\}$. **Получаем, что $G(A_2^j,x) = G(A_1^j,x)g_j$.** ■

СЛЕДСТВИЕ: **Если G аменабельна и действует на X, то X не парадоксально.**

Свободные подгруппы в $SO(2,1)$

ТЕОРЕМА: Пусть $G := SO(2,1)$ – группа движений плоскости Лобачевского. Тогда существует счетный набор Z_i собственных алгебраических подмножеств коразмерности $\geqslant 1$ в $SO(2,1) \times SO(2,1)$ такой, что **для любых $x, y \in SO(2,1) \times SO(2,1) \backslash \bigcup Z_i$, порожденная ими группа свободна.**

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим все нетривиальные соотношения от двух элементов вида $W(x,y) = 1$. Каждое из таких соотношений определяет алгебраическое подмногообразие Z_W в $SO(2,1) \times SO(2,1)$; если все Z_W коразмерности $\geqslant 1$, то все доказано. **В противном случае, $Z_W = SO(2,1) \times SO(2,1)$, потому что многообразие $SO(2,1) \times SO(2,1)$ неприводимо.**

Шаг 2: Если $Z_W = SO(2,1) \times SO(2,1)$, между любыми элементами $SO(2,1)$ есть соотношение W; **тогда свободная подгруппа не вкладывается в $SO(2,1)$.**

Свободные подгруппы в $SO(2,1)$ (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть $G := SO(2,1)$ – группа движений плоскости Лобачевского. Тогда существует счетный набор Z_i собственных алгебраических подмножеств коразмерности $\geqslant 1$ в $SO(2,1) \times SO(2,1)$ такой, что **для любых $x, y \in SO(2,1) \times SO(2,1) \backslash \bigcup Z_i$, порожденная ими группа свободна.**

Шаг 2: Если $Z_W = SO(2,1) \times SO(2,1)$, между любыми элементами $SO(2,1)$ есть соотношение W; **тогда свободная подгруппа не вкладывается в $SO(2,1)$.**

Шаг 3: Рассмотрим риманову поверхность $S := \mathbb{C}P^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$; по теореме Римана, она является фактором плоскости Лобачевского по подгруппе движений $\pi_1(S) := \Gamma \subset SO(2,1)$. **С другой стороны, S гомотопически эквивалентна восьмерке, поэтому $\pi_1(S) = \mathbb{F}_2$.** Противоречие! ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Каждое алгебраическое подмногообразие положительной коразмерности имеет меру 0. Поэтому **для общих $x, y \in SO(2,1)$, x, y порождают свободную группу.**

Свободные подгруппы в $SO(3)$

ТЕОРЕМА: Пусть $SO(3)$ – группа поворотов $\mathbb{R}^3$. Тогда существует счетный набор Z_i собственных алгебраических подмножеств коразмерности 1 в $SO(3)$ такой, что **для любых $x, y \in SO(3)\times SO(3) \setminus \bigcup Z_i$, порожденная ими группа свободна.**

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим все нетривиальные соотношения от двух элементов вида $W(x,y)=1$. Каждое из таких соотношений определяет алгебраическое подмногообразие Z_W в $SO(3)\times SO(3)$; если все Z_W коразмерности $\geqslant 1$, то все доказано. **В противном случае, $Z_W = SO(3)\times SO(3)$, потому что многообразие $SO(3)\times SO(3)$ неприводимо.**

Шаг 2: Если соотношение W выполнено в $SO(3)\times SO(3)$, оно же выполнено над $\mathbb{C}$, в соответствующей комплексной группе Ли $SO(3,\mathbb{C})$. **Но эта группа содержит $SO(2,1)$, в которой есть свободные подгруппы.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Каждое алгебраическое подмногообразие положительной коразмерности имеет меру 0. Поэтому **для общих $x, y \in SO(3)$, x, y порождают свободную группу.**

Парадокс Банаха-Тарского

ТЕОРЕМА: Рассмотрим действие $SO(3)$ на S^2 поворотами. **Тогда S^2 парадоксально.**

Доказательство. Шаг 1: Выберем свободную подгруппу $G := \mathbb{F}_2 \subset SO(3)$. Для любого нетривиального поворота $g \in SO(3)$, есть ровно две неподвижные точки $\{\pm s_g\}$, которые сохраняются g. Обозначим за S_g счетное множество $\{s_g \mid g \in G\}$. Рассмотрим множество $R \subset S^2$, которое содержит по одной точке из каждой орбиты G, не содержащей s_g. **Тогда $GR = S^2 \backslash P$, где $P := G(\bigcup S_g)$ и действие G на GR свободно.**

Шаг 2: Пусть $G = A \coprod B$ – парадоксальное разложение G, построенное вчера. Тогда $AR \coprod BR = S^2 \backslash P$, но AR и BR равносоставлены. **Мы получили, что GR парадоксально.**

Парадокс Банаха-Тарского (продолжение)

$G \subset SO(3)$ свободная группа, P – орбиты всех точек, где G действует несвободно, $GR = S^2 \backslash P$.

Шаг 2: Пусть $G = A \coprod B$ – парадоксальное разложение G. Тогда $AR \coprod BR = S^2 \backslash P$, но AR и BR равносоставлены. **Мы получили, что GR парадоксально.**

Шаг 3: Поскольку $P := S^2 \backslash GR$ счетно, для каждого $p \in P$ множество C_p всех $g \in SO(3)$ таких, что $gGR \not\supset P$, счетно. Взяв $g \in SO(3) \backslash \cap_{p \in P} C_p$, получим $gGR \supset P$.

Шаг 4: Мы получили, что S^2 равносоставлено с подмножеством объединения 2 копий GR. Поскольку GR парадоксально, из этого следует, что S_2 равносоставлено с подмножеством GR **В силу Банаха-Бернштейна-Шредера, GR равносоставлено с S^2.** Это дает парадоксальное разложение S^2. ∎

Супераменабельные группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **супераменабельной**, если для любого действия G на X, у X нет парадоксальных подмножеств.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть G содержит свободную полугруппу F от двух элементов (то есть в G есть два элемента x, y такие, что все нетривиальные слова от x, y не равны 1 в группе). **Тогда G не супераменабельна.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть Fz – орбита F при действии G на себе. Тогда $Fz = xFz \coprod yFz$, то есть парадоксально. ■

ЛЕММА: (лемма о пинг-понге в полугруппе)
Пусть G действует на X, причем x и $y \in G$ переводят A в подмножество A, причем $xA \cap yA = \emptyset$. **Тогда полугруппа, порожденная x и y, свободна.**
■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Если в X соблюдаются условия леммы о пинг-понге, то A парадоксально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $xA \coprod yA \subset A$. ■

ТЕОРЕМА: (парадокс Серпинского-Мазуркевича)
Группа $G := SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ движений плоскости не суперменабельна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть z – трансцендентное комплексное число, $|z| = 1$. Тогда любой полином с целыми коэффициентами от z не равен нулю. Рассмотрим в качестве x поворот на угол $Arg(z)$, в качестве y сдвиг на 1, а в качестве $A \subset \mathbb{R}^2$ множества всех значений $P(z)$, где P – полином с целыми, неотрицательными коэффициентами.

В силу трансцендентности z, число $P(z)$ определяет P однозначно. Поэтому x и y действуют на A как на множестве $\mathfrak{P}$ таких полиномов, добавляя 1 и умножая на z. Поскольку $z\mathfrak{P} \cap \mathfrak{P} + 1 = \emptyset$, условия леммы о пинг-понге соблюдаются. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Тем не менее, G аменабельна: G есть расширение двух абелевых групп.