Аменабельные группы

лекция 1

Миша Вербицкий

1 августа 2011

Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия"
1 - 7 августа, 2011, ЯГПУ, Ярославль, Россия

Конечно-аддитивные меры на множествах

Для любого множества S, обозначим за 2^S **множество его подмножеств.** Обозначим за $A\coprod B$ **объединение непересекающихся подмножеств S.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **конечно-аддитивной мерой**, если верно свойство **конечной аддитивности**: $\mu(A\coprod B) = \mu(A)+\mu(B)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что конечная аддитивность равносильна условию $\mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что конечная аддитивность равносильна условию $\mu\left(\coprod_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ для любого конечного набора непересекающихся подмножеств.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мера Лебега на отрезке **не является "конечно-аддитивной мерой",** ибо **не определена на неизмеримых множествах.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Конечно-аддитивная мера не задает меры Лебега, ибо она **не обязательно счетно-аддитивна.**

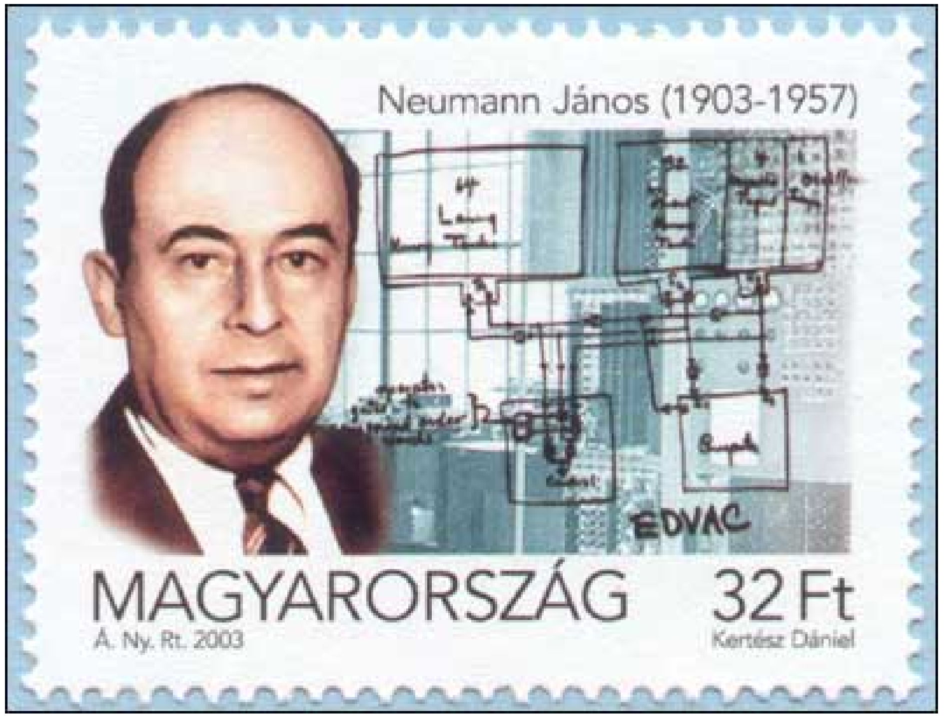
УПРАЖНЕНИЕ: Постройте нетривиальную конечно-аддитивную меру на $\mathbb{Z}$, которая зануляется на всех конечных множествах.

Аменабельные группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $g \in G$, а $L_g: G \longrightarrow G$ – отображение **левого сдвига**, переводящее x в gx. Функция $2^G \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}$ называется **левоинвариантной**, если $\mu(L_g(A)) = \mu(A)$ для любого $A \subset G$.

von Neumann, J. (1929),
"Zur allgemeinen Theorie des Masses", Fundamenta Mathematica 13: 73-116

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **аменабельной**, если существует ненулевая конечно-аддитивная левоинвариантная мера $2^G \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geqslant 0}$.



John von Neumann, 1903 - 1957

Свойства аменабельных групп

ЗАМЕЧАНИЕ: Конечные группы очевидно аменабельны.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Любая подгруппа аменабельной группы аменабельна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $G' \subset G$ – подгруппа аменабельной группы, а $G' \backslash G$ – множество левых классов смежности. Выберем в каждом классе по представителю, и пусть M – множество всех таких представителей. Для какого-то подмножества $R \subset G'$, **обозначим за RM множество всех произведений вида rm, где $r \in R$, $m \in M$.** Определим $\mu_{G'}(R) := \mu_G(RM)$.

Шаг 1: Эта функция аддитивна, потому что $(R \coprod R')M = RM \coprod R'M$.

Шаг 2: Эта функция ненулевая, потому что $\mu_{G'}(G') = \mu_G(G'M) = \mu_G(G) > 0$, ибо $G'M = G$. ■

Банаховы пространства

Определение:
Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $\nu: V \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция со значениями в неотрицательных числах. ν называется **нормой** на V, если имеет место следующее

Невырожденность: $\nu(x) > 0$, если $x \neq 0$,

Неравенство треугольника: $\nu(x + x') \leqslant \nu(x) + \nu(x')$.

Инвариантность относительно гомотетии: $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$,

для любых x, $x' \in V$, и любого $\lambda \in \mathbb{R}$. В такой ситуации V называется **нормированным пространством**.

Определение: Пусть (V, ν) – нормированное пространство. Напомним, что (V, ν) называется **банаховым**, если оно полно, как метрическое пространство.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **любое конечномерное нормированное пространство – банахово.**

ℓ^∞ и среднее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть S – множество, а $\ell^\infty(S)$ – пространство ограниченных $\mathbb{R}$-значных функций на S. Определим **ℓ^∞-норму** на $\ell^\infty(S)$ формулой $|f|_{\ell^\infty} := \sup_S |f|$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\ell^\infty(S)$ – банахово пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Среднее** на S есть непрерывный функционал $\int : \ \ell^\infty(S) \longrightarrow \mathbb{R}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1. $\int(\chi_S) = 1$, где $\chi_S \in \ell^\infty(S)$ есть функция, отображающая S в 1.

2. $\int(f) \geqslant 0$ для любой неотрицательной функции $f \in \ell^\infty(S)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для подмножества $A \subset S$, обозначим за $\chi_A \in \ell^\infty(S)$ **характеристическую функцию**, которая равна 1 на A и 0 вне A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Конечно-аддитивная мера $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **вероятностной**, если $\mu(S) = 1$.

ТЕОРЕМА: Пусть $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ – конечно-аддитивная вероятностная мера. Тогда **существует среднее** $\ell^\infty(S) \xrightarrow{\int} \mathbb{R}$ такое, что $\int \chi_A = \mu(A)$ для каждого $A \subset S$, и оно единственно.

Построение среднего

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Ступенчатая функция** на S есть функция, принимающая конечное число значений, $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для ступенчатой функции такого вида, напишем **среднее** формулой $\int(f) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$.

Доказательство существования среднего. Шаг 1: Докажите, что **пространство ступенчатых функций плотно** в $\ell^\infty(S)$.

Шаг 2: Докажите, что $f \longrightarrow \int(f)$ **непрерывный функционал на пространстве ступенчатых функций,** с топологией, заданной ℓ^∞-нормой.

Шаг 3: Пусть $W \subset V$ – плотное подпространство нормированного пространства, а $\kappa : \ V' \longrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывный функционал. Докажите, что его **можно продолжить до непрерывного функционала** на V, и это продолжение однозначно.

Шаг 4: Определим $\ell^\infty(S) \xrightarrow{\int} \mathbb{R}$, продолжив $\int$ с пространства ступенчатых функций по непрерывности, как в шаге 3. Докажите, что этот функционал удовлетворяет условиям определения среднего. Проверьте единственность. ∎

Произведение аменабельных групп

ЗАМЕЧАНИЕ: Любая ненулевая конечно-аддитивная мера μ на G становится вероятностной после домножения на $\mu(G)^{-1}$. **В дальнейшем все конечно-аддитивные меры на группах предполагаются вероятностными.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу предыдущей теоремы, **задание левоинвариантной вероятностной меры на G равносильно заданию левоинвариантого среднего на $\ell^\infty(G)$.**

ТЕОРЕМА: **Произведение аменабельных групп аменабельно.**

Доказательство. Шаг 1: Среднее удовлетворяет очевидному соотношению $\int(f) \leqslant \sup f$ (проверьте это).

Шаг 2: Рассмотрим проекцию $\pi: G \times G' \longrightarrow G$, и пусть $f \in \ell^\infty(G \times G')$ – ограниченная функция. Обозначим за $\pi_* f$ функцию на G, которая задана формулой $\pi_* f(\xi) := \int_{\{\xi\}\times G'} f(\xi \times g')$. **Эта функция ограниченна,** потому что $\pi_* f(\xi) \leqslant \sup f$ (шаг 1).

Шаг 3: Пусть $\int(f) := \int_G \pi_* f$. **Это левоинвариантное среднее на $\ell^\infty(G\times G')$.** ■

Теорема Хана-Банаха

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **выпуклым конусом** в векторном пространстве V называется подмножество $A \subset V$, удовлетворяющее следующим свойствам.

1. $\forall x, y \in A$, их сумма тоже лежит в A.

2. $\forall x \in A, \lambda \in \mathbb{R}^{>0}$, λx также лежит в A.

ТЕОРЕМА: **("Хана-Банаха")** Пусть V - топологическое векторное пространство, $A \subset V$ - открытый выпуклый конус, не содержащий 0, а $W \subset V$ - замкнутое подпространство, не пересекающее A. **Тогда на V существует непрерывный, линейный функционал θ, такой, что $\theta|_A > 0$, а $\theta|_W = 0$.**

ЗАДАЧА: Напомним, что **аффинная функция** на векторном пространстве – это сумма линейного функционала и постоянного отображения. Пусть даны два выпуклых, открытых, непересекающихся подмножества A, B в топологическом векторном пространстве V. **Докажите, что найдется непрерывная аффинная функция на V, строго положительная на одном из них, и строго отрицательная на другом.**

Аменабельность $\mathbb{Z}$ и теорема Хана-Банаха

ЛЕММА: Пусть $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ – ограниченная функция, $g \in \mathbb{Z}$, а $L_g: \mathbb{Z} \longrightarrow Z$ – левый сдвиг. **Тогда** $\inf_{\mathbb{Z}}(f - L_g^* f) \leqslant 0$, где $L_g^*(f)(t) = f(L_g(t))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно проверить для $L_g(t) = t + 1$. Тогда $f - L_g^* f(t) = f(t) - f(t+1)$. Если $f(t) - f(t+1)$ неотрицательно, значит, f монотонно убывает. Тогда $\lim_{t \longrightarrow \infty} f(t) - f(t+1) = 0$, потому что f ограниченна. ■

ТЕОРЕМА: Группа $\mathbb{Z}$ аменабельна.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $V = \ell^\infty(\mathbb{Z})$, C – конус функций $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих $f > \varepsilon > 0$ для какого-то ε, а I – пространство функций вида $f - L_g^* f$. **В силу предыдущей леммы, $I \cap C = 0$.**

Шаг 2: Применив теорему Хана-Банаха, мы получим функционал $\varphi: \ell^\infty(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}$, который строго положителен на C, то есть $\frac{1}{\varphi(\chi_{\mathbb{Z}})}\varphi$ **является средним.**

Шаг 3: Условие $\varphi|_I = 0$ значит, что $\varphi(f) = \varphi(L_g^* f)$, то есть φ **инвариантно относительно левых сдвигов.** ■

Множества Фёлнера

Обозначим число элементов конечного множества за $|A|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A, B \subset S$ – множества. **симметрическая разность** A и B – это $A \triangle B := (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, а $F_n \subset G$ – последовательность подмножеств. $\{F_n\}$ называется **последовательностью Фёльнера** (Følner sequence), если для каждого $g \in G$, $\lim_n \frac{|F_n \triangle L_g(F_n)|}{|F_n|} = 0$.

ПРИМЕР: $F_n := [-n, n] \subset \mathbb{Z}$ является последовательностью Фёльнера в $\mathbb{Z}$.

ПРИМЕР: $F_n := [-n, n]^n \subset \mathbb{Z}^n$ является последовательностью Фёльнера в $\mathbb{Z}^n$ (проверьте).

ЗАМЕЧАНИЕ: Можно доказать, что **любая аменабельная группа содержит последовательность Фёльнера.**

ТЕОРЕМА: Пусть G – группа, снабженная последовательностью Фёльнера. **Тогда G аменабельна.**

Аменабельность групп и последовательности Фёлнера

ЛЕММА: Пусть G – группа, снабженная последовательностью Фёльнера, $f: G \longrightarrow \mathbb{R}$ – ограниченная функция, $g \in G$, а $L_g: G \longrightarrow G$ – левый сдвиг. **Тогда** $\inf_G (f - L_g^* f) \leqslant 0$**,** где $L_g^*(f)(t) = f(L_g(t))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для конечного подмножества $X \subset G$ и функции f_1 на G, обозначим за $\operatorname{Av}_X f_1$ среднее f_1 на X. Тогда

$$\operatorname{Av}_{F_n}(f - L_g^* f) = \frac{\sum_{x \in F_n} f(x) - \sum_{x \in L_g(F_n)} f(x)}{|F_n|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sum_{x \in F_n \triangle L_g(F_n)} |f(x)|}{|F_n|} \leqslant \sup_G |f| \frac{|F_n \triangle L_g(F_n)|}{|F_n|}$$

следовательно, $\lim_n \operatorname{Av}_{F_n}(f - L_g^* f) = 0$. ■

Аменабельность групп и последовательности Фёлнера (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть G – группа, снабженная последовательностью Фёльнера. **Тогда G аменабельна.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $V = \ell^\infty(G)$, C – конус функций $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих $f > \varepsilon > 0$ для какого-то ε, а I – пространство функций вида $f - L_g^* f$. **В силу предыдущей леммы, $I \cap C = 0$.**

Шаг 2: Применив теорему Хана-Банаха, мы получим функционал $\varphi : \ell^\infty(G) \longrightarrow \mathbb{R}$, который строго положителен на C, то есть $\frac{1}{\varphi(\chi_G)}\varphi$ **является средним.**

Шаг 3: Условие $\varphi|_I = 0$ значит, что $\varphi(f) = \varphi(L_g^* f)$, то есть φ **инвариантно относительно левых сдвигов.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Доказательство **дословно такое же,** как приведено выше для случая $\mathbb{Z} = G$.

Свободное произведение групп

Пусть $\{G_\alpha\} = \{G_1, G_2, ...\}$ – набор групп. Рассмотрим множество, состоящее из последовательностей (слов) вида $g_1 g_2 g_3 ... g_n$, составленных из букв $g_i \in G_\alpha$.

Множество $G_1 * G_2 * G_3 * ...$ получено из этого множества факторизацией по соотношениям вида

$$g_1 g_2 \cdots g_i g_{i+1} g_{i+2} \cdots g_n \sim g_1 g_2 \cdots g_i g_{i+2} \cdots g_n$$

если $g_{i+1} = 1$
(можно выкинуть из слова букву g_{i+1}, если g_{i+1} равно 1), и

$$g_1 g_2 \cdots g_{i-1} g_i g_{i+1} g_{i+2} \cdots g_n \sim g_1 g_2 \cdots g_{i-1} (g_i g_{i+1}) g_{i+2} \cdots g_n$$

если $g_i, g_{i+1} \in G_\alpha$ **(можно сгруппировать последовательно идущие буквы g_i, g_{i+1} в $(g_i g_{i+1})$, если они обе принадлежат одной и той же группе G_α).**

Свободное произведение групп (продолжение)

Элементы $G_1 * G_2 * G_3 * ...$ можно умножать:

$$g_1 g_2 ... g_n \cdot g'_1 g'_2 ... g'_{n'} := g_1 g_2 ... g_n g'_1 g'_2 ... g'_{n'}.$$

Такое умножение, очевидно, ассоциативно.

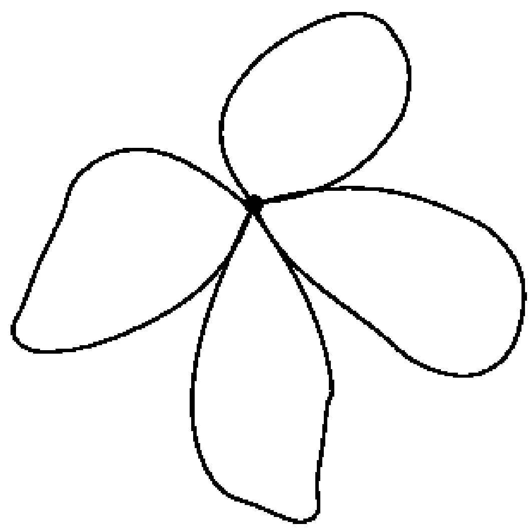
Легко видеть, что $g_1 g_2 ... g_n g_n^{-1} ... g_2^{-1} g_1^{-1} = 1$.
Значит, $G_1 * G_2 * G_3 * ...$ это группа.

Определение: Группа $\coprod_\alpha G_\alpha = G_1 * G_2 * G_3 * ...$ называется **свободным произведением**, или же **амальгамой**, или же **копроизведением** групп $\{G_\alpha\} = \{G_1, G_2, ...\}$

Определение: Копроизведение $\mathbb{F}_n := \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * ... * \mathbb{Z}$ (n раз) называется **свободной группой от n образующих**.

Букет окружностей

Определение: Пусть Γ – связный граф, у которого есть всего одна вершина и $|I|$ ребер. Его топологическое пространство называется **букетом $|I|$ окружностей**. Оно имеет вид ромашки сделанной из нескольких окружностей.



Букет четырех окружностей

ТЕОРЕМА: (Зейферт-ван Кампен) **Свободная группа** $\mathbb{F}_n$ есть фундаментальная группа букета из n окружностей.

Свободная группа не аменабельна

ТЕОРЕМА: Свободная группа $\mathbb{F}_2$ не аменабельна.

Доказательство. Шаг 1: Обозначим за x, y образующие $\mathbb{F}_2$. Тогда элементы $\mathbb{F}_2$ суть **слова, составленные из символов вида x, y, x^{-1}, y^{-1}, с запретом на последовательное употребление x, x^{-1} и y, y^{-1}.**

Шаг 2: Обозначим за $\mathbb{F}_2(x) \subset \mathbb{F}_2$ слова $W \subset \mathbb{F}_2$, которые начинаются с x. Тогда $\mathbb{F}_2(x)$ **содержит** $x\mathbb{F}_2(x) \coprod xy\mathbb{F}_2(x)$.

Шаг 3: Пусть μ – лево-инвариантная конечно-аддитивная мера. **В силу лево-инвариантности,** $\mu(\mathbb{F}_2(x)) = \mu(x\mathbb{F}_2(x)) = \mu(xy\mathbb{F}_2(x))$.

Шаг 4: Из шага 2, получаем

$$\mu(\mathbb{F}_2(x)) \geqslant \mu(x\mathbb{F}_2(x)) + \mu(xy\mathbb{F}_2(x)) = 2\mu(\mathbb{F}_2(x)) = 0.$$

Шаг 5: Аналогичный аргумент дает $\mu(\mathbb{F}_2(y)) = \mu(\mathbb{F}_2(x^{-1})) = \mu(\mathbb{F}_2(y^{-1})) = 0$. Поскольку

$$\mathbb{F}_2 = \{e\} \coprod \mathbb{F}_2(y) \coprod \mathbb{F}_2(x) \coprod \mathbb{F}_2(y^{-1}) \coprod \mathbb{F}_2(x^{-1}),$$

получаем $\mu(\mathbb{F}_2) = 0$. ■

Проблема фонНоймана

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу доказанного выше, **любая группа, содержащая $\mathbb{F}_2$, не аменабельна.**

Проблема фон Ноймана: Пусть G – группа, которая не аменабельна. Всегда ли G содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{F}_2$?

Решение (найден контрпример):
Ol'shanskii, A. (1980), "On the question of the existence of an invariant mean on a group", Uspekhi Mat. Nauk 35 (4): 199-200.

ТЕОРЕМА: (альтернатива Титса для аменабельных групп)
Любая конечно-порожденная подгруппа в $GL(n)$ аменабельна, либо содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{F}_2$.

Дополнение: Лемма Цорна

Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество. Элемент $x \in S$ называется **максимальным**, если не существует $y \in S$ с $x \prec y$. Для подмножества $S_1 \subset S$ и $x \in S$, мы пишем $S_1 \preccurlyeq$, если для каждого $\xi \in S_1$ имеем $\xi \preccurlyeq x$.

Лемма Цорна Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество, причем для любого линейно упорядоченного подмножества $S_1 \subset S$ найдется элемент $\xi \in S$ такой, что $S_1 \preccurlyeq \xi$. **Тогда в S найдется максимальный элемент.**

Следствия леммы Цорна

1. Теорема о существовании максимальных идеалов.

2. Теорема о существовании базиса в бесконечномерном векторном пространстве **("базиса Коши-Гамеля")**

Дополнение: Теорема Хана-Банаха в задачах

ЗАДАЧА: Докажите, что теорема Хана-Банаха эквивалентна следующему утверждению. Пусть V - топологическое векторное пространство, а $A \subset V$ - открытый выпуклый конус, не содержащий 0. **Тогда существует гиперплоскость $H \subset V$, такая, что $A \cap H = \emptyset$. (Это значит, что все A лежит по одну сторону H.)** Более того, если в замкнутом подпространстве $W \subset V$ есть гиперплоскость H_W, которая не пересекает $A \cap W$, то H можно выбрать таким образом, чтобы $H \cap W = H_W$.

ЗАДАЧА: Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ выпуклый, открытый конус, не содержащий 0. Докажите, что **в $\mathbb{R}^2$ есть гиперплоскость, которая не пересекает A.**

ЗАДАЧА: Пусть $V_0 \subset V$ - подпространство такое, что $V_0 \subset V$ замкнуто, V/V_0 одномерно, а $A \subset V$ - открытый выпуклый конус, не содержащий 0. Предположим, что в V_0 теорема Хана-Банаха уже доказана, и в V_0 есть гиперплоскость $H_0 = \ker \theta_0$, которая не пересекает $V_0 \cap A$ Проекция $\pi : V \longrightarrow V/H$ переводит A в выпуклый конус в $\mathbb{R}^2$. **Выведите из предыдущей задачи, что в V есть прямая $\pi^{-1}(h)$, которая не пересекает A.** Докажите аналогичное утверждение для V.

ЗАДАЧА: **Докажите теорему Хана-Банаха** (воспользуйтесь леммой Цорна, то есть индукцией по вложенным подпространствам и их замыканиям, и предыдущей задачей).