Аменабельные группы

лекция 2

Миша Вербицкий

3 августа 2011

Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия"
1 - 7 августа, 2011, ЯГПУ, Ярославль, Россия

Метрические пространства

Определение: Пусть M - множество. **Метрикой** на M называется функция $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, удовлетворяющая следующим условиям

Невырожденность: $d(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Симметричность: $d(x,y) = d(y,x)$

Неравенство треугольника: $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

для любых точек $x, y, z \in M$.

Метрика - математическая абстракция, отвечающая интуитивному представлению о «расстоянии»

Последовательности Коши

Определение: Пусть $x \in M$ точка в метрическом пространстве. Открытый **ε-шар** $B_\varepsilon(x)$ в с центром в x - множество всех точек, отстоящих от x меньше, чем на ε:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in M \quad | \quad d(x, y) < \varepsilon\}$$

Определение: Пусть M - метрическое пространство. Последовательность $\{\alpha_i\}$ точек из M называется **последовательностью Коши**, если для каждого $\varepsilon > 0$, все элементы последовательности $\{\alpha_i\}$, кроме конечного числа, содержатся в некотором ε-шаре.

Не путать со сходимостью!

Все сходящиеся последовательности - последовательности Коши, но не все последовательности Коши сходятся.

Определение: Пусть M - метрическое пространство. Последовательность $\{\alpha_i\}$ точек из M **сходится к $x \in M$**, если в любом ε-шаре $B_\varepsilon(x)$ содержатся все члены $\{\alpha_i\}$, кроме конечного числа. В этом случае также говорят, что x - это **предел** последовательности $\{\alpha_i\}$. Метрическое пространство M называется **полным**, если у любой последовательности Коши есть предел.

Расстояние Хаусдорфа

Определение: Подмножество $Z \subset M$ называется **ограниченным**, если оно содержится в шаре $B_C(x)$.

Определение: **ε-окрестность** $Z \subset M$ - объединение всех $B_\varepsilon(x)$, для $x \in Z$. Обозначим ее за $Z(\varepsilon)$.

Определение: Пусть Z_1, Z_2 - замкнутые, ограниченные подмножества M. Определим **расстояние Хаусдорфа** $d_H(Z_1, Z_2)$ как инфимум всех ε таких, что $Z_1 \subset Z_2(\varepsilon)$, $Z_2 \subset Z_1(\varepsilon)$

Утверждение: **d_H задает метрику на множестве замкнутых, ограниченных подмножеств.**

Компактность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрическое пространство M называется **компактным**, если любое из следующих равносильных условий выполнено.

1. Из каждого открытого покрытия M можно выбрать конечное подпокрытие.

2. Любая система вложенных замкнутых подмножеств M имеет общую точку.

3. Любая последовательность точек в M имеет предельную точку.

4. Любая ограниченная непрерывная функция $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ достигает максимума в какой-то точке M.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **эти условия равносильны для метрических пространств,** а (1) и (2) – для топологических пространств. Придумайте контрпримеры к равносильности 2, 3, 4 для топологических пространств.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть M – компакт. Докажите, что **множество компактных подмножеств M компактно в метрике d_H.**

Расстояние Громова-Хаусдорфа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение, сохраняющее расстояния, называется **изометрическим**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Диаметр** метрического пространства M есть

$$\sup_{x,y\in M} d(x,y).$$

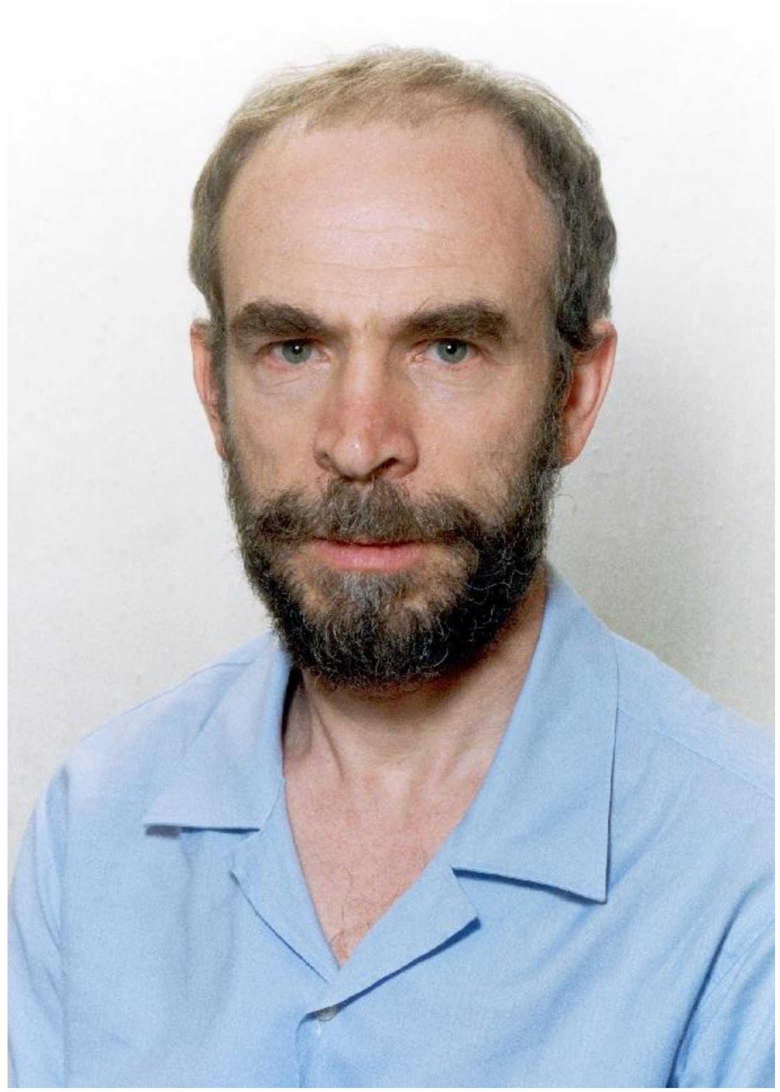
УПРАЖНЕНИЕ: Пусть X, Y – метрические пространства диаметра d. Докажите, что существует метрическое пространство M диаметра $\leqslant 3d$, **снабженное изометрическими вложениями $X\hookrightarrow M$, $Y\hookrightarrow M$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Расстояние Громова-Хаусдорфа** $d_{GH}(X,Y)$ определяется как $\inf_M(d_H(X,Y))$, где инфимум берется по всем M и всем изометрическим вложениям $X\hookrightarrow M$, $Y\hookrightarrow M$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что d_{GH} **задает метрику** на "множестве" всех компактных метрических пространств.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть X,Y – полные, локально компактные метрические пространства, такие, что $d_{GH}(X,Y)=0$. **Докажите, что X и Y изометричны.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Громовский предел семейства метрических пространств $\{M_i\}$ есть метрическое пространство, полученное как предел $\{M_i\}$ в метрике Громова-Хаусдорфа.



Михаил Громов
(р. 23 декабря 1943)

Асимптотический конус

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство. **Асимптотический конус** M есть громовский предел пространств $(M,a_i d)$, где $a_i \in \mathbb{R}$, а $\lim a_i = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Он **определен неоднозначно,** у некоторых пространств есть несчетное количество конусов.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $d_{GH}(X,Y) < \infty$. Тогда любой асимптотический конус X **изометричен какому-то асимптотическому конусу Y.**

Доказательство. Шаг 1:
Если $d_{GH}((X,d_X),(Y,d_Y)) = C$, то $d((X,ad_X),(Y,ad_Y)) = aC$.

Шаг 2: Если $(X,a_i d_X)$ – последовательность Коши в d_{GH}, а $\lim a_i = 0$, то $(Y,a_i d_Y)$ – тоже последовательность Коши, причем

$$\lim_i d_{GH}((X,a_i d_X),(Y,a_i d_Y)) = \lim a_i C = 0,$$

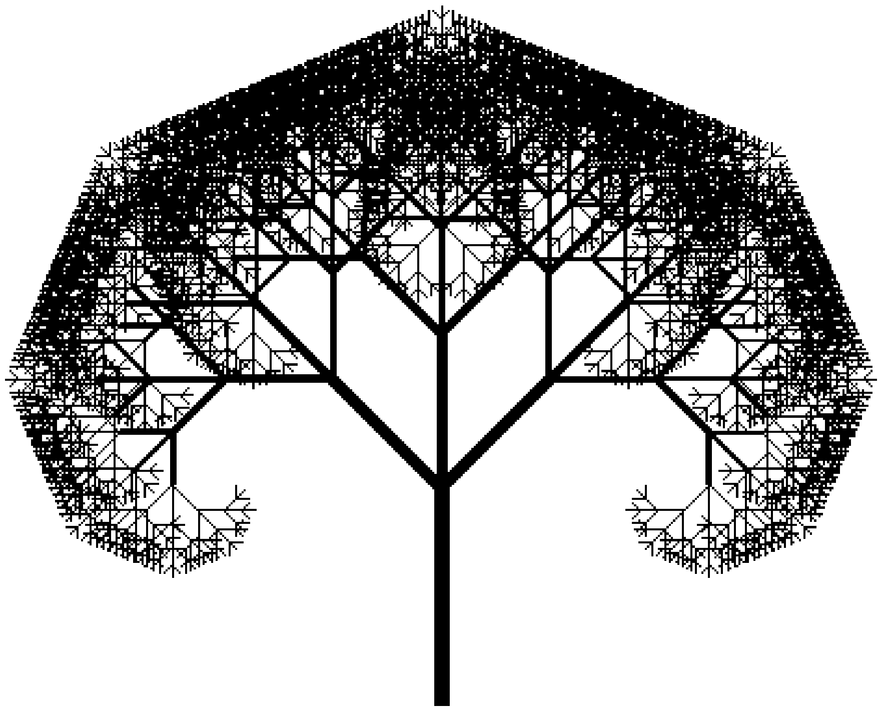
то есть **эти последовательности эквивалентны.** ■

Асимптотический конус (примеры)

Асимптотический конус M есть то, каким образом M выглядит с «очень большого» расстояния

ПРИМЕР: $d_{GH}(\frac{1}{N}\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}^n) < \frac{1}{n}$, значит, $\mathbb{R}^n = \lim_N \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n$. Мы получили, что **асимптотический конус $\mathbb{Z}^n$ есть $\mathbb{R}^n$.**

ПРИМЕР: Асимптотический конус гиперболического пространства есть дерево, от **каждой точки** которого отходит несчетное множество веток.



Липшицевы отображения

Определение: Пусть (M_1, d_1) и (M_2, d_2) - метрические пространства, а $C > 0$ - вещественное число. Отображение $f: M_1 \longrightarrow M_2$ называется **C-липшицевым** если для любых $x, y \in M_1$,

$$d_2(f(x), f(y)) \leqslant C d_1(x, y).$$

Липшицевы отображения непрерывны.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что расстояние $d_z(x) := d(z, x)$ до фиксированной точки $z \in M$ – **1-липшицева функция из M в $\mathbb{R}$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Два метрических пространства называются **Липшиц-эквивалентными**, если существует липшицева биекция $f: M_1 \longrightarrow M_2$, такая, что f^{-1} тоже липшицево.

ЗАМЕЧАНИЕ: Липшицевы отображения непрерывны. **Липшиц-эквивалентные пространства гомеоморфны.**

Квази-изометрии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Квази-изометрия** метрических пространств есть отображение $f: (M,d) \longrightarrow (M', d')$, удовлетворяющее двум условиям:

1. $\frac{1}{A} d(x,y) - B \leqslant d'(f(x), f(y)) \leqslant A\, d(x,y) + B$
для каких-то констант $A, B \in \mathbb{R}^{>0}$.

2. $d_{GH}(M', f(M)) < \infty$.

УПРАЖНЕНИЕ: В условии этого определения, постройте квази-изометрию между M' и M. Докажите, что **квази-изометрия задает отношение эквивалентности** на метрических пространствах.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть X, Y – квази-изометричные пространства. Докажите, что **их асимптотические конусы липшиц-эквивалентны.**

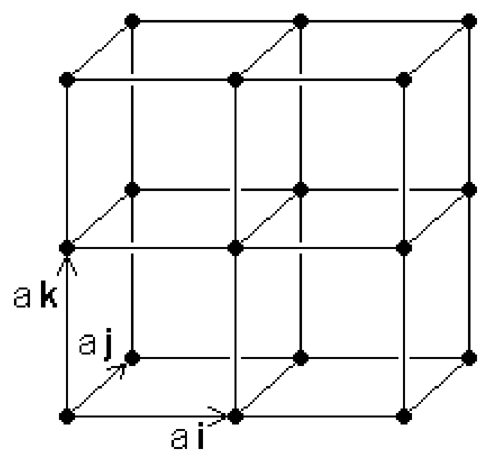
Граф Кэли

Все группы в сегодняшней лекции предполагаются конечно порожденными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Набор образующих** группы G есть множество элементов S, мультипликативно порождающих G. **В дальнейшем, мы будем всегда предполагать, что $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$.**

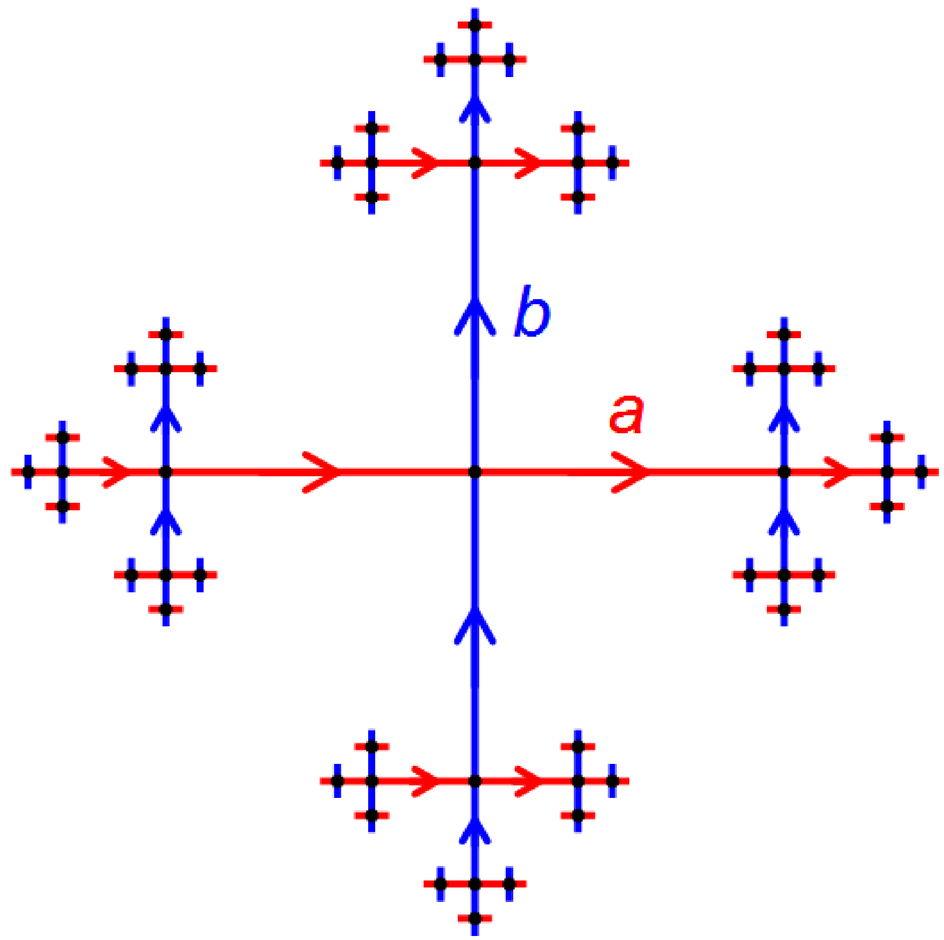
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $\{s_i\}$ – набор образующих. **Граф Кэли** пары $(G, \{s_i\})$ есть граф, вершины которого – элементы G, а ребра соединяют точки вида g и gs_i.

ПРИМЕР: Граф Кэли для $\mathbb{Z}^n$ с обычным набором образующих есть кубическая решетка.



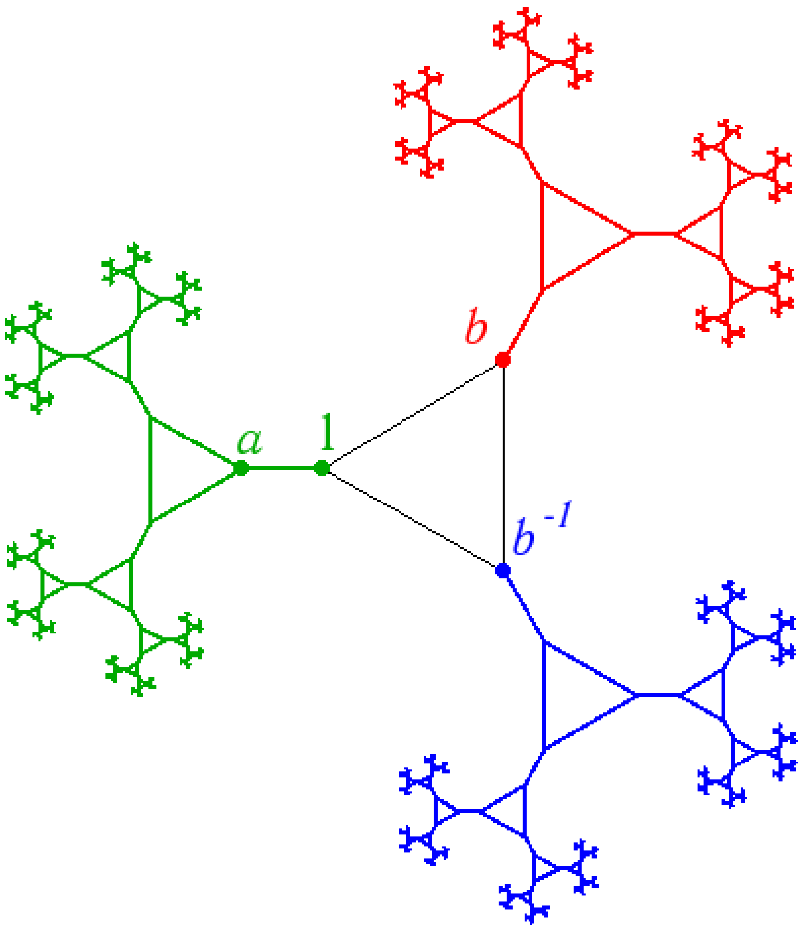
Граф Кэли для свободной группы

ПРИМЕР: Граф Кэли для свободной группы – регулярное дерево



Граф Кэли свободной группы $\mathbb{F}_2$ с образующими a, b, a^{-1}, b^{-1}.

Граф Кэли для $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$



Граф Кэли для $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Граф Кэли – квазиметрический инвариант

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: С каждым графом связано **топологическое пространство графа**: набор отрезков, соединяющих набор отмеченных точек – вершин. **Оно снабжено метрикой,** таким образом, что каждое ребро изометрично отрезку длины 1, и **расстояние между точками a, b – длина кратчайшего пути из a в b.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Группа G действует на своем графе Кэли левыми сдвигами, и **это действие изометрично** (проверьте!).

ТЕОРЕМА: Пусть G – группа, S, S' – два набора образующих, а Γ_S, $\Gamma_{S'}$ – соответствующие графы Кэли. Тогда Γ_S квази-изометрично $\Gamma_{S'}$.

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим G как множество вершин на ее графе Кэли. Обозначим соответствующее метрическое пространство за G_S, $G_{S'}$. **Тогда $d_{GH}(G_S, \Gamma_S) = 1/2$.**

Шаг 2: В силу предыдущего шага, достаточно доказать, что G_S квази-изометрично $G_{S'}$. Мы докажем, что **тавтологическая биекция $G_S \longrightarrow G_{S'}$ – квази-изометрия.**

Граф Кэли – квазиметрический инвариант (продолжение)

Шаг 3: Обозначим за $|x|_S$ расстояние $d_S(e,x)$. Поскольку расстояние на графе Кэли G-инвариантно, достаточно проверить, что **существуют константы A, A' такие, что $A|x|_S \leqslant |x|_{S'} \leqslant A'|x|_S$ для любого $x \in G$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: **$|x|_S$ есть минимальная длина слова W, составленного из букв $s_i \in S$ такого, что произведение всех букв W составляет x.**

Шаг 4: Пусть $N := \min_{s' \in S'} |s_i'|_S$. Это значит, что каждый $s' \in S'$ представляется в виде произведения $\leqslant N$ букв $s_i \in S$. Тогда каждое разложение x в произведение k букв $s_i' \in S'$ дает разложение x в произведение Nk букв из S. **Значит, $|x|_{S'} \leqslant N|x|_S$.** Второе неравенство получается аналогично.
■

СЛЕДСТВИЕ: Асимптотический конус графа Кэли, как топологическое пространство, **не зависит от выбора образующих группы.**

Квази-изометричные группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Две группы G, G' называются **квази-изометричными**, если их графы Кэли квази-изометричны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Свойство X группы называется **геометрическим**, если для любой пары квази-изометричных групп G, G' (X выполнено для G) $\Leftrightarrow$ (X выполнено для G').

Геометрическая теория групп изучает геометрические свойства групп.

Геометрические свойства (примеры).

1. Конечность.

2. Аменабельность.

3. Виртуальная нильпотентность (группа называется **виртуально нильпотентной**, если она содержит подгруппу конечного индекса, которая нильпотентна).

4. Виртуальная абелевость

5. Виртуальная свобода.

Группы полиномиального и экспоненциального роста

Пусть G, S – группа с заданной системой образующих, а Γ_S – ее граф Кэли. **Обозначим за $b_s(N)$** число вершин графа в шаре радиуса N с центром в e.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **группой полиномиального роста степени $\leqslant d$**, если $b_s(N) \leqslant CN^d + C'$ для каких-то констант C, C'.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **группой экспоненциального роста**, если $b_s(N) \geqslant \alpha^N$ для какой-то константы $\alpha > 0$.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что **эти свойства являются геометрическими.**

ПРИМЕР: $\mathbb{Z}^n$ – группа полиномиального роста.

ПРИМЕР: $\mathbb{F}_n$, $n \geqslant 2$ – группа экспоненциального роста (проверьте это).

ТЕОРЕМА: **(Громов) Любая группа полиномиального роста является виртуально нильпотентной.**

Аменабельные группы (повторение)

Для любого множества S, обозначим за 2^S **множество его подмножеств.** Обозначим за $A\coprod B$ **объединение непересекающихся подмножеств S.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **конечно-аддитивной мерой**, если верно свойство **конечной аддитивности**: $\mu(A\coprod B) = \mu(A)+\mu(B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $g\in G$, а $L_g:\ G\longrightarrow G$ – отображение **левого сдвига**, переводящее x в gx. Функция $2^G \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}$ называется **левоинвариантной**, если $\mu(L_g(A))=\mu(A)$ для любого $A\subset G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Конечно-аддитивная мера $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **вероятностной**, если $\mu(S)=1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **аменабельной**, если существует конечно-аддитивная левоинвариантная вероятностная мера μ : $2^G\longrightarrow\mathbb{R}^{\geqslant 0}$.

ТЕОРЕМА: Любая группа полиномиального роста аменабельна.

Множества Фёлнера (напоминание)

Обозначим число элементов конечного множества за $|A|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A, B \subset S$ – множества. **симметрическая разность** A и B – это $A \triangle B := (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, а $F_n \subset G$ – последовательность подмножеств. $\{F_n\}$ называется **последовательностью Фёльнера** (Følner sequence), если для каждого $g \in G$, $\lim_n \frac{|F_n \triangle L_g(F_n)|}{|F_n|} = 0$.

ТЕОРЕМА: Пусть G – группа, снабженная последовательностью Фёльнера. **Тогда G аменабельна.**

Аменабельность групп полиномиального роста

Пусть G – группа полиномиального роста, снабженная набором образующих и соответствующей метрикой. **Обозначим шар радиуса r с центром в g за $B_g(r)$.**

Мы докажем, что на группе полиномиального роста **для подходящей последовательности $N_i \longrightarrow \infty$ шары $\{B_e(N_i))\}$ образуют последовательность Фёльнера.**

Доказательство аменабельности групп полиномиального роста.
Шаг 1: Левый перенос шара дает $L_g(B_e(N)) = B_g(N) \subset B_e(|g| + N)$, где $|g| := d(g,e)$ (здесь используется неравенство треугольника).

Шаг 2:

$$B_e(N) \backslash L_g(B_e(N)) \subset B_e(|g| + N) \backslash B_e(N).$$

Следовательно,

$$|B_e(N) \triangle g B_e(N)| \leqslant 2 \Big(|B_e(|g| + N)| - |B_e(N)| \Big).$$

Аменабельность групп полиномиального роста (продолжение)

Шаг 3: Обозначим за $b(N) := |B_e(N)|$. Если для каждого k имеет место

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{b(N+k) - b(N)}{b(N)} = 0$$

то

$$\frac{|B_e(N) \triangle g B_e(N)|}{|B_e(N)|} \leqslant 2 \frac{b(N + |g|) - b(N)}{b(N)}$$

стремится к нулю, то есть $B_e(N)$ – множества Фёльнера. Это имеет место, например, если $b(N)$ – полином.

Шаг 4: Для заданных $\varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}$, рассмотрим множество $N(\varepsilon, k)$ таких $N \in \mathbb{N}$, что $\frac{b(N+k)-b(N)}{b(N)} < \varepsilon$. Легко видеть, что $N(\varepsilon, k)$ монотонно зависят от k и ε:

$$N(\varepsilon, k) \supset N(\varepsilon, k+1), N(\varepsilon + \delta, k) \supset N(\varepsilon, k)$$

для любого $\delta \geqslant 0$.

Если $n \notin N(\varepsilon, k)$, то $\frac{b(N+k)}{b(N)} > 1 + \varepsilon$. Коль скоро $b(N)$ растет полиномиально, **множество $N(\varepsilon, k)$ бесконечно для любого ε, k.**

Аменабельность групп полиномиального роста (окончание)

Шаг 5: Возьмем последовательность $\{N_i\}$ такую, что

$$N_i \in N\left(\frac{1}{i}, i\right) \subset N\left(\frac{1}{i+1}, i+1\right) \subset \ldots$$

Тогда $F_n := B_e(N_i)$ – последовательность Фёльнера, так как $\forall g$ с $|g| < m$, и любого $N_i \in N(\frac{1}{m}, m)$, имеет место неравенство

$$\frac{|B_e(N_i) \triangle g B_e(N_i)|}{|B_e(N_i)|} \leqslant 2\frac{b(N_i + |g|) - b(N_i)}{b(N_i)} \leqslant 2\frac{b(N_i + m) - b(N_i)}{b(N_i)} < \frac{2}{m}.$$

■