

Аменабельные группы

лекция 2

Миша Вербицкий

3 августа 2011

Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия"

1 - 7 августа, 2011, ЯГПУ, Ярославль, Россия

Метрические пространства

Определение: Пусть M - множество. **Метрикой** на M называется функция $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, удовлетворяющая следующим условиям

Невырожденность: $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Симметричность: $d(x, y) = d(y, x)$

Неравенство треугольника: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

для любых точек $x, y, z \in M$.

Метрика - математическая абстракция, отвечающая интуитивному представлению о «расстоянии»

Последовательности Коши

Определение: Пусть $x \in M$ точка в метрическом пространстве. Открытый ε -шар $B_\varepsilon(x)$ в M с центром в x - множество всех точек, отстоящих от x меньше, чем на ε :

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

Определение: Пусть M - метрическое пространство. Последовательность $\{\alpha_i\}$ точек из M называется **последовательностью Коши**, если для каждого $\varepsilon > 0$, все элементы последовательности $\{\alpha_i\}$, кроме конечного числа, содержатся в некотором ε -шаре.

Не путать со сходимостью!

Все сходящиеся последовательности - последовательности Коши, но не все последовательности Коши сходятся.

Определение: Пусть M - метрическое пространство. Последовательность $\{\alpha_i\}$ точек из M **сходится к $x \in M$** , если в любом ε -шаре $B_\varepsilon(x)$ содержатся все члены $\{\alpha_i\}$, кроме конечного числа. В этом случае также говорят, что x - это **предел** последовательности $\{\alpha_i\}$. Метрическое пространство M называется **полным**, если у любой последовательности Коши есть предел.

Расстояние Хаусдорфа

Определение: Подмножество $Z \subset M$ называется **ограниченным**, если оно содержится в шаре $B_C(x)$.

Определение: ε -**окрестность** $Z \subset M$ - объединение всех $B_\varepsilon(x)$, для $x \in Z$. Обозначим ее за $Z(\varepsilon)$.

Определение: Пусть Z_1, Z_2 - замкнутые, ограниченные подмножества M . Определим **расстояние Хаусдорфа** $d_H(Z_1, Z_2)$ как инфимум всех ε таких, что $Z_1 \subset Z_2(\varepsilon)$, $Z_2 \subset Z_1(\varepsilon)$

Утверждение: d_H задает метрику на множестве замкнутых, ограниченных подмножеств.

Компактность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрическое пространство M называется **КОМПАКТНЫМ**, если любое из следующих равносильных условий выполнено.

1. Из каждого открытого покрытия M можно выбрать конечное подпокрытие.
2. Любая система вложенных замкнутых подмножеств M имеет общую точку.
3. Любая последовательность точек в M имеет предельную точку.
4. Любая ограниченная непрерывная функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ достигает максимума в какой-то точке M .

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **эти условия равносильны для метрических пространств**, а (1) и (2) – для топологических пространств. Придумайте контрпримеры к равносильности 2, 3, 4 для топологических пространств.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть M – компакт. Докажите, что **множество компактных подмножеств M компактно в метрике d_H** .

Расстояние Громова-Хаусдорфа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение, сохраняющее расстояния, называется **изометрическим**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Диаметр** метрического пространства M есть

$$\sup_{x,y \in M} d(x,y).$$

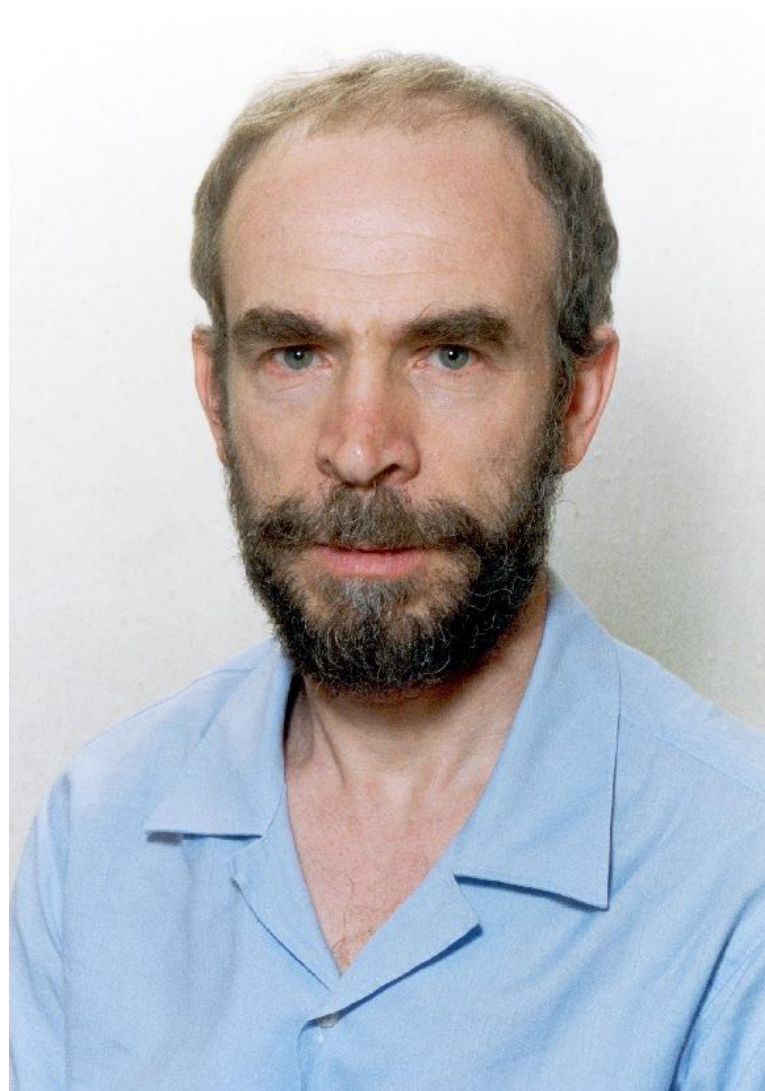
УПРАЖНЕНИЕ: Пусть X, Y – метрические пространства диаметра d . Докажите, что существует метрическое пространство M диаметра $\leq 3d$, **снабженное изометрическими вложениями** $X \hookrightarrow M, Y \hookrightarrow M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Расстояние Громова-Хаусдорфа** $d_{GH}(X, Y)$ определяется как $\inf_M (d_H(X, Y))$, где инфимум берется по всем M и всем изометрическим вложениям $X \hookrightarrow M, Y \hookrightarrow M$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что d_{GH} **задает метрику** на "множестве" всех компактных метрических пространств.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть X, Y – полные, локально компактные метрические пространства, такие, что $d_{GH}(X, Y) = 0$. **Докажите, что X и Y изометричны.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Громовский предел** семейства метрических пространств $\{M_i\}$ есть метрическое пространство, полученное как предел $\{M_i\}$ в метрике Громова-Хаусдорфа.



Михаил Громов
(р. 23 декабря 1943)

Асимптотический конус

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, d) – метрическое пространство. **Асимптотический конус** M есть громовский предел пространств $(M, a_i d)$, где $a_i \in \mathbb{R}$, а $\lim a_i = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Он **определен неоднозначно**, у некоторых пространств есть несчетное количество конусов.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $d_{GH}(X, Y) < \infty$. Тогда любой асимптотический конус X **изометричен какому-то асимптотическому конусу Y** .

Доказательство. Шаг 1:

Если $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) = C$, то $d((X, a d_X), (Y, a d_Y)) = a C$.

Шаг 2: Если $(X, a_i d_X)$ – последовательность Коши в d_{GH} , а $\lim a_i = 0$, то $(Y, a_i d_Y)$ – тоже последовательность Коши, причем

$$\lim_i d_{GH}((X, a_i d_X), (Y, a_i d_Y)) = \lim a_i C = 0,$$

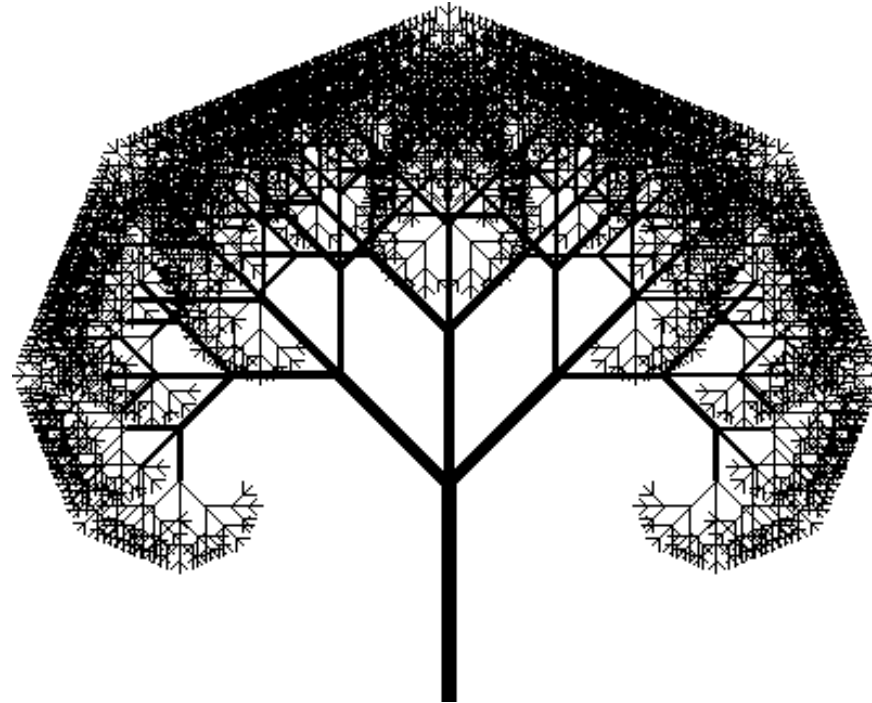
то есть **ЭТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЭКВИВАЛЕНТНЫ. ■**

Асимптотический конус (примеры)

Асимптотический конус M есть то, каким образом M выглядит с «очень большого» расстояния

ПРИМЕР: $d_{GH}(\frac{1}{N}\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}^n) < \frac{1}{n}$, значит, $\mathbb{R}^n = \lim_N \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n$. Мы получили, что **асимптотический конус \mathbb{Z}^n есть \mathbb{R}^n .**

ПРИМЕР: Асимптотический конус гиперболического пространства есть дерево, от **каждой точки** которого отходит несчетное множество веток.



Липшицевы отображения

Определение: Пусть (M_1, d_1) и (M_2, d_2) - метрические пространства, а $C > 0$ - вещественное число. Отображение $f : M_1 \rightarrow M_2$ называется **C -липшицевым** если для любых $x, y \in M_1$,

$$d_2(f(x), f(y)) \leq C d_1(x, y).$$

Липшицевы отображения непрерывны.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что расстояние $d_z(x) := d(z, x)$ до фиксированной точки $z \in M$ - **1-липшицева функция из M в \mathbb{R} .**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Два метрических пространства называются **Липшиц-эквивалентными**, если существует липшицева биекция $f : M_1 \rightarrow M_2$, такая, что f^{-1} тоже липшицево.

ЗАМЕЧАНИЕ: Липшицевы отображения непрерывны. **Липшиц-эквивалентные пространства гомеоморфны.**

Квази-изометрии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Квази-изометрия метрических пространств есть отображение $f : (M, d) \longrightarrow (M', d')$, удовлетворяющее двум условиям:

1. $\frac{1}{A} d(x, y) - B \leq d'(f(x), f(y)) \leq A d(x, y) + B$
для каких-то констант $A, B \in \mathbb{R}^{>0}$.

2. $d_{GH}(M', f(M)) < \infty$.

УПРАЖНЕНИЕ: В условии этого определения, постройте квази-изометрию между M' и M . Докажите, что квази-изометрия задает отношение эквивалентности на метрических пространствах.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть X, Y – квази-изометричные пространства. Докажите, что их асимптотические конусы липшиц-эквивалентны.

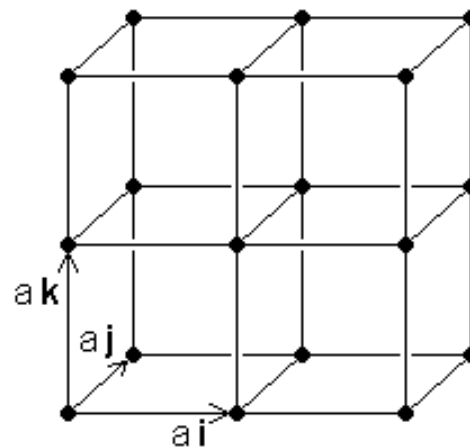
Граф Кэли

Все группы в сегодняшней лекции предполагаются конечно порожденными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Набор образующих группы G есть множество элементов S , мультипликативно порождающих G . В дальнейшем, мы будем всегда предполагать, что $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$.

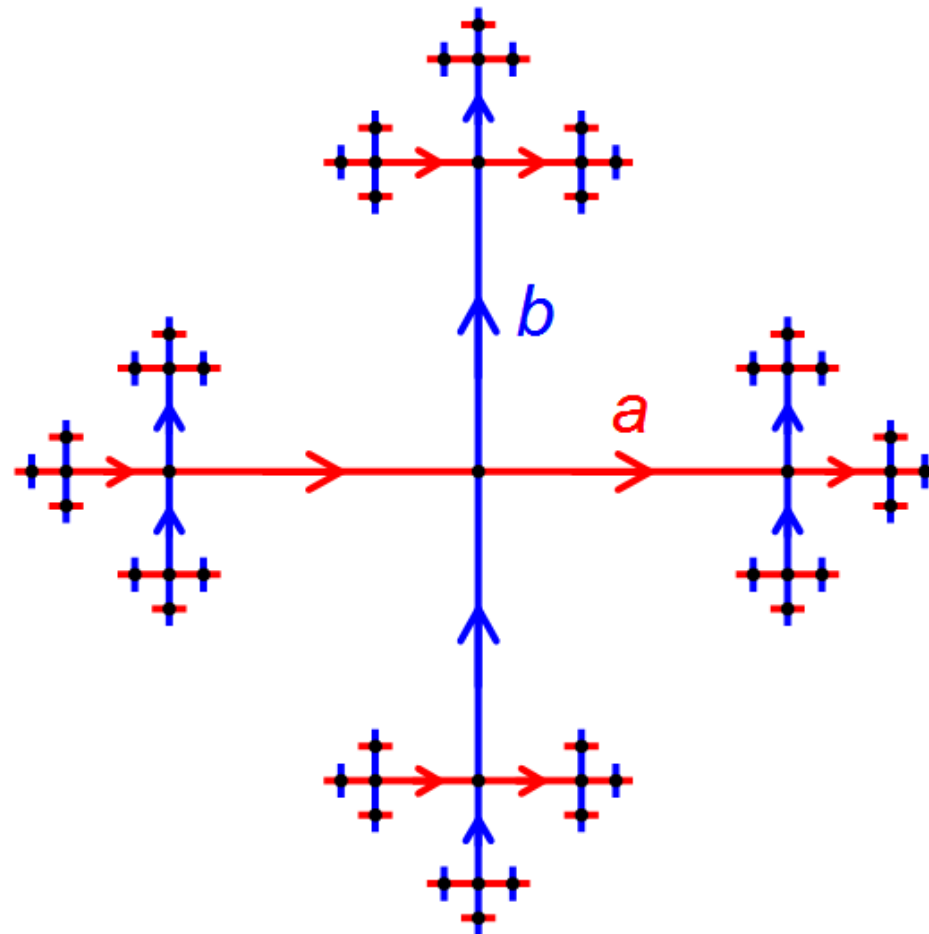
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $\{s_i\}$ – набор образующих. Граф Кэли пары $(G, \{s_i\})$ есть граф, вершины которого – элементы G , а ребра соединяют точки вида g и gs_i .

ПРИМЕР: Граф Кэли для \mathbb{Z}^n с обычным набором образующих есть кубическая решетка.



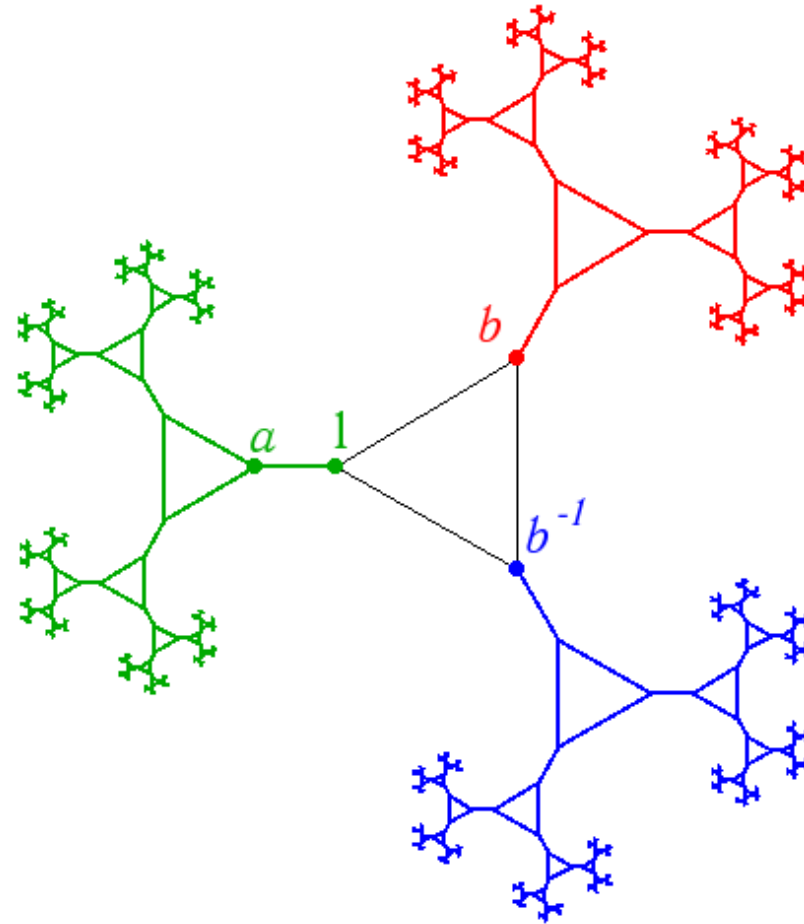
Граф Кэли для свободной группы

ПРИМЕР: Граф Кэли для свободной группы – регулярное дерево



Граф Кэли свободной группы \mathbb{F}_2 с образующими a, b, a^{-1}, b^{-1} .

Граф Кэли для $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$



Граф Кэли для $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Граф Кэли – квазиметрический инвариант

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: С каждым графом связано **топологическое пространство графа**: набор отрезков, соединяющих набор отмеченных точек – вершин. Оно снабжено метрикой, таким образом, что каждое ребро изометрично отрезку длины 1, и **расстояние между точками a, b – длина кратчайшего пути из a в b .**

ЗАМЕЧАНИЕ: Группа G действует на своем графе Кэли левыми сдвигами, и **это действие изометрично** (проверьте!).

ТЕОРЕМА: Пусть G – группа, S, S' – два набора образующих, а $\Gamma_S, \Gamma_{S'}$ – соответствующие графы Кэли. Тогда Γ_S квази-изометрично $\Gamma_{S'}$.

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим G как множество вершин на ее графе Кэли. Обозначим соответствующее метрическое пространство за $G_S, G_{S'}$. Тогда $d_{GH}(G_S, \Gamma_S) = 1/2$.

Шаг 2: В силу предыдущего шага, достаточно доказать, что G_S квази-изометрично $G_{S'}$. Мы докажем, что **тавтологическая биекция $G_S \rightarrow G_{S'}$ – квази-изометрия.**

Граф Кэли – квазиметрический инвариант (продолжение)

Шаг 3: Обозначим за $|x|_S$ расстояние $d_S(e, x)$. Поскольку расстояние на графе Кэли G -инвариантно, достаточно проверить, что **существуют константы A, A' такие, что $A|x|_S \leq |x|_{S'} \leq A'|x|_S$ для любого $x \in G$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: $|x|_S$ есть минимальная длина слова W , составленного из букв $s_i \in S$ такого, что произведение всех букв W составляет x .

Шаг 4: Пусть $N := \min_{s' \in S'} |s'_i|_S$. Это значит, что каждый $s' \in S'$ представляется в виде произведения $\leq N$ букв $s_i \in S$. Тогда каждое разложение x в произведение k букв $s'_i \in S'$ дает разложение x в произведение Nk букв из S . **Значит, $|x|_{S'} \leq N|x|_S$.** Второе неравенство получается аналогично.

■

СЛЕДСТВИЕ: Асимптотический конус графа Кэли, как топологическое пространство, **не зависит от выбора образующих группы.**

Квази-изометричные группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Две группы G, G' называются **квази-изометричными**, если их графы Кэли квази-изометричны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Свойство X группы называется **геометрическим**, если для любой пары квази-изометричных групп G, G' (X выполнено для G) \Leftrightarrow (X выполнено для G').

Геометрическая теория групп изучает геометрические свойства групп.

Геометрические свойства (примеры).

1. Конечность.
2. Аменабельность.
3. Виртуальная нильпотентность (группа называется **виртуально нильпотентной**, если она содержит подгруппу конечного индекса, которая нильпотентна).
4. Виртуальная абелевость
5. Виртуальная свобода.

Группы полиномиального и экспоненциального роста

Пусть G, S – группа с заданной системой образующих, а Γ_S – ее граф Кэли. **Обозначим за $b_S(N)$** число вершин графа в шаре радиуса N с центром в e .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **группой полиномиального роста степени $\leq d$** , если $b_S(N) \leq CN^d + C'$ для каких-то констант C, C' .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **группой экспоненциального роста**, если $b_S(N) \geq \alpha^N$ для какой-то константы $\alpha > 0$.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что **эти свойства являются геометрическими**.

ПРИМЕР: \mathbb{Z}^n – группа полиномиального роста.

ПРИМЕР: \mathbb{F}_n , $n \geq 2$ – группа экспоненциального роста (проверьте это).

ТЕОРЕМА: (Громов) Любая группа полиномиального роста является виртуально нильпотентной.

Аменабельные группы (повторение)

Для любого множества S , обозначим за 2^S **множество его подмножеств**. Обозначим за $A \sqcup B$ **объединение непересекающихся подмножеств S** .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geq 0}$ называется **конечно-аддитивной мерой**, если верно свойство **конечной аддитивности**: $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $g \in G$, а $L_g : G \rightarrow G$ – отображение **левого сдвига**, переводящее x в gx . Функция $2^G \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}$ называется **левоинвариантной**, если $\mu(L_g(A)) = \mu(A)$ для любого $A \subset G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Конечно-аддитивная мера $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geq 0}$ называется **вероятностной**, если $\mu(S) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **аменабельной**, если существует конечно-аддитивная левоинвариантная вероятностная мера $\mu : 2^G \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$.

ТЕОРЕМА: Любая группа полиномиального роста аменабельна.

Множества Фёльнера (напоминание)

Обозначим число элементов конечного множества за $|A|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A, B \subset S$ – множества. **симметрическая разность** A и B – это $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, а $F_n \subset G$ – последовательность подмножеств. $\{F_n\}$ называется **последовательностью Фёльнера** (Følner sequence), если для каждого $g \in G$, $\lim_n \frac{|F_n \Delta L_g(F_n)|}{|F_n|} = 0$.

ТЕОРЕМА: Пусть G – группа, снабженная последовательностью Фёльнера. **Тогда G аменабельна.**

Аменабельность групп полиномиального роста

Пусть G – группа полиномиального роста, снабженная набором образующих и соответствующей метрикой. **Обозначим шар радиуса r с центром в g за $B_g(r)$.**

Мы докажем, что на группе полиномиального роста **для подходящей последовательности $N_i \rightarrow \infty$ шары $\{B_e(N_i)\}$ образуют последовательность Фёльнера.**

Доказательство аменабельности групп полиномиального роста.

Шаг 1: Левый перенос шара дает $L_g(B_e(N)) = B_g(N) \subset B_e(|g| + N)$, где $|g| := d(g, e)$ (здесь используется неравенство треугольника).

Шаг 2:

$$B_e(N) \setminus L_g(B_e(N)) \subset B_e(|g| + N) \setminus B_e(N).$$

Следовательно,

$$|B_e(N) \Delta_g B_e(N)| \leq 2 \left(|B_e(|g| + N)| - |B_e(N)| \right).$$

Аменабельность групп полиномиального роста (продолжение)

Шаг 3: Обозначим за $b(N) := |B_e(N)|$. Если для каждого k имеет место

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b(N+k) - b(N)}{b(N)} = 0$$

то

$$\frac{|B_e(N) \Delta_g B_e(N)|}{|B_e(N)|} \leq 2 \frac{b(N + |g|) - b(N)}{b(N)}$$

стремится к нулю, то есть $B_e(N)$ – множества Фёльнера. Это имеет место, например, если $b(N)$ – полином.

Шаг 4: Для заданных $\varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}$, рассмотрим множество $N(\varepsilon, k)$ таких $N \in \mathbb{N}$, что $\frac{b(N+k) - b(N)}{b(N)} < \varepsilon$. Легко видеть, что $N(\varepsilon, k)$ монотонно зависят от k и ε :

$$N(\varepsilon, k) \supset N(\varepsilon, k+1), N(\varepsilon + \delta, k) \supset N(\varepsilon, k)$$

для любого $\delta \geq 0$.

Если $n \notin N(\varepsilon, k)$, то $\frac{b(N+k)}{b(N)} > 1 + \varepsilon$. Коль скоро $b(N)$ растет полиномиально, **множество $N(\varepsilon, k)$ бесконечно для любого ε, k .**

Аменабельность групп полиномиального роста (окончание)

Шаг 5: Возьмем последовательность $\{N_i\}$ такую, что

$$N_i \in N\left(\frac{1}{i}, i\right) \subset N\left(\frac{1}{i+1}, i+1\right) \subset \dots$$

Тогда $F_n := B_e(N_i)$ – последовательность Фёльнера, так как $\forall g$ с $|g| < m$, и любого $N_i \in N\left(\frac{1}{m}, m\right)$, имеет место неравенство

$$\frac{|B_e(N_i) \Delta_g B_e(N_i)|}{|B_e(N_i)|} \leq 2 \frac{b(N_i + |g|) - b(N_i)}{b(N_i)} \leq 2 \frac{b(N_i + m) - b(N_i)}{b(N_i)} < \frac{2}{m}.$$

■