Аменабельные группы

лекция 3

Миша Вербицкий

6 августа 2011

Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия"
1 - 7 августа, 2011, ЯГПУ, Ярославль, Россия

Литература

Аменабельность:

* http://terrytao.wordpress.com/2008/02/14/kleiners-proof-of-gromovs-theorem/
* http://terrytao.wordpress.com/2009/04/14/some-notes-on-amenability/

Геометрическая теория групп:

* Wolfgang Lueck, “Survey on geometric group theory”,
http://arxiv.org/abs/0806.3771
* Wolfgang Lueck, “On the Farrell-Jones and related Conjectures”,
http://arxiv.org/abs/0710.2269

Свойство Каждана Т

* Bekka, de la Harpe, Valette, (2008), Kazhdan's property (T)
http://perso.univ-rennes1.fr/bachir.bekka/KazhdanTotal.pdf

Метрическая геометрия:

* Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. "Курс метрической геометрии"
* Громов М. "Гиперболические группы"

Риманова геометрия:

* Громов, “Знак и геометрический смысл кривизны”

* Милнор, "Теория Морса"

* Бессе А. Многообразия Эйнштейна

* Gallot S., Hulin D., Lafontaine J. Riemannian geometry

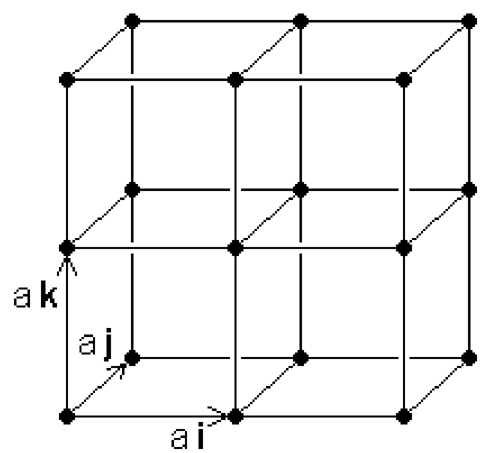
Граф Кэли (повторение)

Все группы лекции предполагаются по умолчанию конечно порожденными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Набор образующих** группы G есть множество элементов S, мультипликативно порождающих G. **В дальнейшем, мы будем всегда предполагать, что $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $\{s_i\}$ – набор образующих. **Граф Кэли** пары $(G, \{s_i\})$ есть граф, вершины которого – элементы G, а ребра соединяют точки вида g и gs_i.

ПРИМЕР: Граф Кэли для $\mathbb{Z}^n$ с обычным набором образующих есть кубическая решетка.



Метрика слов на группе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: С каждым графом связано **топологическое пространство графа**: набор отрезков, соединяющих набор отмеченных точек – вершин. **Оно снабжено метрикой,** таким образом, что каждое ребро изометрично отрезку длины 1, и **расстояние между точками a, b – длина кратчайшего пути из a в b.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Метрика слов на группе** $d_S(\cdot,\cdot)$ есть метрика на группе G с системой образующих S, полученная ограничением обычной метрики на графе Кэли.

ЗАМЕЧАНИЕ: Обозначим за $|x|_S$ расстояние $d_S(e,x)$. Тогда $|x|_S$ **есть минимальная длина слова W, составленного из букв $s_i \in S$ такого, что произведение всех букв W составляет x.**

Группы полиномиального и экспоненциального роста (повторение)

Пусть G, S – группа с заданной системой образующих, а Γ_S – ее граф Кэли. **Обозначим за $b_s(N)$** число вершин графа в шаре радиуса N с центром в e.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **группой полиномиального роста степени $\leqslant d$,** если $b_s(N) \leqslant CN^d + C'$ для каких-то констант C, C'.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **группой экспоненциального роста**, если $b_s(N) \geqslant \alpha^N$ для какой-то константы $\alpha > 0$.

ПРИМЕР: $\mathbb{Z}^n$ – группа полиномиального роста.

ПРИМЕР: $\mathbb{F}_n$, $n \geqslant 2$ – группа экспоненциального роста.

Теорема Громова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Нижний центральный ряд** группы G есть ряд вида

$$G_0 = G \supset G_1 = [G,G] \supset G_2 = [G,[G,G]] \supset G_3 = [G,[G,[G,G]]] \supset ...$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Нильпотентная группа** есть группа, нижний центральный ряд которой конечен и обрывается на $G_n = \{e\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа называется **виртуально нильпотентной**, если она содержит нильпотентную подгруппу конечного индекса.

Теорема Громова: **Любая группа полиномиального роста виртуально нильпотентна.**

Я расскажу схему доказательства теоремы Громова, принадлежащую Брюсу Клейнеру:

Bruce Kleiner, *A new proof of Gromov's theorem on groups of polynomial growth,*
`http://arxiv.org/abs/0710.4593`

Группа, проектирующаяся на $\mathbb{Z}$, и ее порядок роста

Утверждение 1: Предположим, что задано сюрьективное отображение $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{Z}$, а G – группа полиномиального роста степени d. Тогда $G_0 := \ker\varphi$ – **группа полиномиального роста, степени $\leqslant d-1$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем какой-то набор элементов $S_0 \subset G_0$, и пусть $g \in G$ проектируется в образующую $\mathbb{Z}$. Обозначим за $B_e(R, S_0)$ R-шар в подгруппе, порожденной S_0, а за $B_e(R, S_0 \cup \{g\})$ – аналогичный шар, порожденный $S_0 \cup \{g\}$.

Шаг 1:

$$B_e(2N, S_0 \cup \{g\}) \supset B_e(N, S_0) \cdot \{g^{-N}, g^{-N+1}, ...g^N\}.$$

Шаг 2: Множество $B_e(N, S_0) \cdot \{g^{-N}, g^{-N+1}, ...g^N\} \subset G$ **содержит $\geqslant 2N|B_e(N, S_0)|$ элементов.**

Шаг 3: Если $|B(N, S_0)| > CN^d$, то

$$|B(2N, S_0) \cup \{g\}| > C2N^{d+1} = \frac{C}{2^n}(2N)^{d+1}.$$

Значит, **группа, порожденная S_0 и $\{g\}$, имеет показатель степени роста на $\geqslant 1$ больше, чем степень роста группы, порожденной S_0.**

■

Скрещенное произведение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть K – группа, а φ –действие K на группе L автоморфизмами. **Скрещенное произведение** $L \rtimes_\varphi K$ есть $L \times K$ с произведением, заданным формулой

$$(l,k)(l',k') = (ll', \varphi_{l'}(k)k').$$

УПРАЖНЕНИЕ: Рассмотрим точную последовательность групп

$$\{e\} \longrightarrow G_0 \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \{e\}.$$

Докажите, что $G = G_0 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $G_0 = \mathbb{Z}^m$ – абелева группа без кручения, φ – действие $\mathbb{Z}$ на G_0, а $G = G_0 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$. Докажите, что **$G$ нильпотентна тогда и только тогда, когда матрица, $A := \varphi(1) \in GL(m,\mathbb{Z})$ имеет конечный порядок,** т.е. удовлетворяет $A^N = \mathrm{Id}$.

УПРАЖНЕНИЕ: В условиях предыдущей задачи, докажите, что G имеет полиномиальный рост, если A конечного порядка, и экспоненциальный рост, если бесконечного.

Редукция теоремы Громова к существованию представлений

УПРАЖНЕНИЕ: (*) Пусть $G = G_0 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$, где G_0 нильпотентна. Докажите, что G **имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда она виртуально нильпотентна.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Предположим, что всякая группа полиномиального роста допускает сюрьективное отображение в $\mathbb{Z}$. Пользуясь утверждением со слайда выше и индукцией по степени роста в теореме Громова, мы можем считать, что G_0 – виртуально нильпотентна, а $G = G_0 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$. **Применив предыдущее упражнение, мы получим, что G также виртуально нильпотентна.**

Мы свели теорему Громова к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА: **Любая группа полиномиального роста допускает сюрьективый гомоморфизм в $\mathbb{Z}$.**

Именно это и доказывает Клейнер.

Аменабельные группы (повторение)

Для любого множества S, обозначим за 2^S **множество его подмножеств.** Обозначим за $A\coprod B$ **объединение непересекающихся подмножеств S.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **конечно-аддитивной мерой**, если верно свойство **конечной аддитивности**: $\mu(A\coprod B) = \mu(A)+\mu(B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $g\in G$, а $L_g:\ G\longrightarrow G$ – отображение **левого сдвига**, переводящее x в gx. Функция $2^G \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}$ называется **левоинвариантной**, если $\mu(L_g(A))=\mu(A)$ для любого $A\subset G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Конечно-аддитивная мера $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **вероятностной**, если $\mu(S)=1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **аменабельной**, если существует конечно-аддитивная левоинвариантная вероятностная мера $\mu:2^G\longrightarrow\mathbb{R}^{\geqslant 0}$.

ТЕОРЕМА: Любая группа полиномиального роста аменабельна.

Множества Фёлнера (повторение)

Обозначим число элементов конечного множества за $|A|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A, B \subset S$ – множества. **симметрическая разность** A и B – это $A \triangle B := (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, а $F_n \subset G$ – последовательность подмножеств. $\{F_n\}$ называется **последовательностью Фёльнера** (Følner sequence), если для каждого $g \in G$, $\lim_n \frac{|F_n \triangle L_g(F_n)|}{|F_n|} = 0$.

ТЕОРЕМА: Пусть G – группа, снабженная последовательностью Фёльнера. **Тогда G аменабельна.**

Erling Følner, 18.11.1919-10.10.1991, dansk matematiker, professor ved Danmarks Tekniske Højskole 1954-74. Følner publicerede sammen med Harald Bohr en omfattende undersøgelse af generaliserede næsten-periodiske funktioner, som han i sin doktorafhandling fulgte op med yderligere undersøgelser. Senere har han publiceret vigtige resultater om næsten-periodiske funktioner på grupper med anvendelser på gruppeteori.

Аменабельность групп полиномиального роста

Пусть G – группа полиномиального роста, снабженная набором образующих и соответствующей метрикой. **Обозначим шар радиуса r с центром в g за $B_g(r)$.**

Мы докажем, что на группе полиномиального роста **для подходящей последовательности $N_i \longrightarrow \infty$ шары $\{B_e(N_i))\}$ образуют последовательность Фёльнера.**

Доказательство аменабельности групп полиномиального роста.
Шаг 1: Левый перенос шара дает $L_g(B_e(N)) = B_g(N) \subset B_e(|g| + N)$, где $|g| := d(g, e)$ (здесь используется неравенство треугольника).

Шаг 2:

$$B_e(N)\backslash L_g(B_e(N)) \subset B_e(|g| + N)\backslash B_e(N).$$

Следовательно,

$$|B_e(N) \triangle g B_e(N)| \leqslant 2\Big(|B_e(|g| + N)| - |B_e(N)|\Big).$$

Аменабельность групп полиномиального роста (продолжение)

Шаг 3: Обозначим за $b(N) := |B_e(N)|$. Если для каждого k имеет место

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{b(N+k) - b(N)}{b(N)} = 0$$

то

$$\frac{|B_e(N) \triangle g B_e(N)|}{|B_e(N)|} \leqslant 2 \frac{b(N+|g|) - b(N)}{b(N)}$$

стремится к нулю, то есть $B_e(N)$ – множества Фёльнера. Это имеет место, например, если $b(N)$ – полином.

Шаг 4: Для заданных $\varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}$, рассмотрим множество $N(\varepsilon, k)$ таких $N \in \mathbb{N}$, что $\frac{b(N+k)-b(N)}{b(N)} < \varepsilon$. Легко видеть, что $N(\varepsilon, k)$ монотонно зависят от k и ε:

$$N(\varepsilon, k) \supset N(\varepsilon, k+1), N(\varepsilon + \delta, k) \supset N(\varepsilon, k)$$

для любого $\delta \geqslant 0$.

Если $n \notin N(\varepsilon, k)$, то $\frac{b(N+k)}{b(N)} > 1 + \varepsilon$. Коль скоро $b(N)$ растет полиномиально, **множество $N(\varepsilon, k)$ бесконечно для любого ε, k.**

Аменабельность групп полиномиального роста (окончание)

Шаг 5: Возьмем последовательность $\{N_i\}$ такую, что

$$N_i \in N\left(\frac{1}{i}, i\right) \subset N\left(\frac{1}{i+1}, i+1\right) \subset \ldots$$

Тогда $F_n := B_e(N_i)$ – последовательность Фёльнера, так как $\forall g$ с $|g| < m$, и любого $N_i \in N(\frac{1}{m}, m)$, имеет место неравенство

$$\frac{|B_e(N_i) \triangle g B_e(N_i)|}{|B_e(N_i)|} \leqslant 2\frac{b(N_i + |g|) - b(N_i)}{b(N_i)} \leqslant 2\frac{b(N_i + m) - b(N_i)}{b(N_i)} < \frac{2}{m}.$$

■

Свойство (T) Каждана

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гильбертов базис** в эрмитовом векторном пространстве H есть минимальный набор векторов, такой, что их линейные комбинации плотны в H.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гильбертово пространство** H есть полное бесконечномерное эрмитово пространство, снабженное счетным гильбертовым базисом.

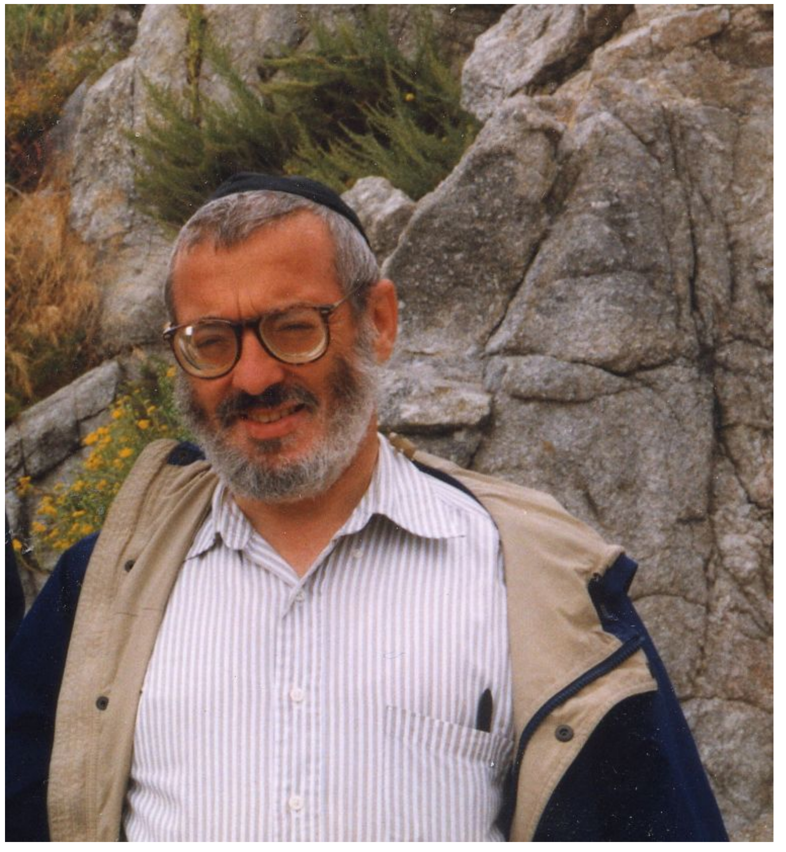
УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **все гильбертовы пространства изоморфны** как эрмитовы векторные пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **группой Каждана**, если выполнено **свойство (T)**:

(T) Для любого изометрического действия G на гильбертовом пространстве H, **G сохраняет какую-то фиксированную точку $h \in H$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Изначально Каждан определял (T) иначе, а это определение принадлежит Серру; его равносильность определению Каждана называется Delorme-Guichardet Theorem.

Д. А. Каждан



David Kazhdan
(р. 20 июня 1946)

David Kazhdan, *"On the connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups"*, Functional analysis and its applications 1 (1): 63-65, (1967).

Свойство (Т) Каждана (продолжение)

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть s есть изометрия H. Докажите, что s аффинно.

Тривиальный пример: $\mathbb{Z}$ действует на H сдвигами на вектор v, очевидно, без неподвижных точек.

СЛЕДСТВИЕ: Абелева группа $\mathbb{Z}^n$ не обладает свойством (Т).

Еще примеры: $SL(n,\mathbb{Z})$ для $n \geqslant 3$, $SO(p,q,\mathbb{Z})$, $p > q \geqslant 2$, $SO(3,3,\mathbb{Z})$, $Sp(n,\mathbb{Z})$, $F_4(\mathbb{Z})$, $Sp(n,1,\mathbb{Z})$, $n \geqslant 2$.

Свойства групп Каждана:

1. Группы Каждана конечно порождены.

2. Фактор группы Каждана по ее коммутанту конечен.

3. Любая нормальная подгруппа группы Каждана G имеет конечный индекс, или лежит в центре G и конечна.

Гармонические функции на графах

ЗАМЕЧАНИЕ: Все графы предполагаются не имеющими изолированных вершин. Любое ребро графа канонически отождествлено с отрезком $[0,1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть Г – граф, а $f: \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ – функция на его топологическом пространстве. **Гармоническая функция** на графе есть функция, линейная на ребрах, такая, что для любой вершины v, имеем $\sum_\gamma \frac{d}{dx} f|_\gamma = 0$, где сумма берется по ребрам, примыкающим к v. Это условие утверждает, что сумма производных f по всем ребрам, примыкающим к v, равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ: Иначе говоря, **производные f по всем ребрам графа удовлетворяют закону токов Кирхгофа.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция f на графе Г называется **функцией полиномиального роста** степени $\leqslant d$, если для какой-то точки $c \in \Gamma$ и $C > 0$, для всех шаров $B_c(R)$ с центром в c имеем $\sup_{B_c(R)} |f| \leqslant CR^d$.

ТЕОРЕМА: (Теорема Клейнера) Пусть G – группа полиномиального роста, а Г ее граф Кэли. Обозначим за V_d пространство гармонических функций полиномиального роста степени $\leqslant d$ на Г. **Тогда V_d конечномерно.**

Гармоничность и функционал энергии.

ЗАМЕЧАНИЕ: Аналогичным образом определяется **гармоническое отображение в векторное пространство.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – счетная группа, которая действует изометриями на гильбертовом пространстве H. Определим **энергию** точки $v \in H$ формулой $E(v) := \sum_{g\in G} \|v - g(v)\|^2$.

ТЕОРЕМА: (Кореваар-Шоен, Мок) Пусть G – группа полиномиального роста, которая действует изометриями на гильбертовом пространстве H, с конечной энергией. **Тогда у энергии E найдется локальный минимум на H.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть v – минимум энергии действия G на H. Рассмотрим вложение графа Кэли Γ_G в H, переводящее вершины g в $g(v)$, а ребра в прямолинейные отрезки. **Тогда это отображение гармонично.**

Схема доказательства Клейнера теоремы Громова.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть группа G аменабельна. **Тогда она не обладает свойством (T).**

СЛЕДСТВИЕ: Существует действие G на гильбертовом пространстве H, с конечной энергией.

СЛЕДСТВИЕ: Существует **гармоническое, G-эквивариантное отображение** $\xi : \Gamma_G \longrightarrow H$.

Шаг 1: Поскольку ξ G-эквивариантно, оно **липшицево.**

Шаг 2: По теореме Клейнера, пространство гармонических липшицевых функций на Γ_G конечномерно. Значит, **образ Γ_G сидит в конечномерном подпространстве H.**

Шаг 3: Мы получили представление G в группе A аффинных изометрий $\mathbb{R}^n$.

Схема доказательства Клейнера теоремы Громова (продолжение).

ТЕОРЕМА: "Альтернатива Титса"
Пусть $\Gamma \subset A$ – конечно-порожденная подгруппа группы Ли. Тогда **Γ виртуально разрешима, либо содержит свободную группу $\mathbb{F}_2$.**

Шаг 4: Образ G в A бесконечен и разрешим, значит, **фактор этого образа по коммутанту – бесконечная коммутативная группа.**

Шаг 5: Применяя классификацию коммутативных групп, получаем сюрьективный гомоморфизм $G \longrightarrow \mathbb{Z}$. **Это и нужно для доказательства теоремы Громова.**