Аменабельные группы

лекция 4

Миша Вербицкий

7 августа 2011

Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия"
1 - 7 августа, 2011, ЯГПУ, Ярославль, Россия

Аменабельные группы (повторение)

Для любого множества S, обозначим за 2^S **множество его подмножеств.** Обозначим за $A\coprod B$ **объединение непересекающихся подмножеств S.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **конечно-аддитивной мерой**, если верно свойство **конечной аддитивности**: $\mu(A\coprod B) = \mu(A)+\mu(B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $g\in G$, а $L_g:\ G\longrightarrow G$ – отображение **левого сдвига**, переводящее x в gx. Функция $2^G \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}$ называется **левоинвариантной**, если $\mu(L_g(A))=\mu(A)$ для любого $A\subset G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Конечно-аддитивная мера $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **вероятностной**, если $\mu(S)=1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **аменабельной**, если существует конечно-аддитивная левоинвариантная вероятностная мера $\mu: 2^G\longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$.

Множества Фёлнера

Обозначим число элементов конечного множества за $|A|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A, B \subset S$ – множества. **симметрическая разность** A и B – это $A \triangle B := (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, а $F_n \subset G$ – последовательность подмножеств. $\{F_n\}$ называется **последовательностью Фёльнера** (Følner sequence), если для каждого $g \in G$, $\lim_n \frac{|F_n \triangle L_g(F_n)|}{|F_n|} = 0$.

ТЕОРЕМА: Пусть G – группа, снабженная последовательностью Фёльнера. **Тогда G аменабельна.**

(было на первой лекции)

ТЕОРЕМА: (Теорема Фёльнера)
Аменабельная группа содержит последовательность Фёльнера.

Доказательство будет.

Банаховы пространства (повторение)

Определение:
Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{R}$, снабженное метрикой, которая инвариантна относительно параллельных переносов, то есть имеет вид $x, y \longrightarrow \|x - y\|$, и удовлетворяет $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$,
для любых $x \in V$, и любого $\lambda \in \mathbb{R}$. В такой ситуации V называется **нормированным пространством**.

Определение: Пусть (V, ν) – нормированное пространство. Напомним, что (V, ν) называется **банаховым**, если оно полно, как метрическое пространство.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **любое конечномерное нормированное пространство – банахово.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть S – счетное множество, а $\ell^\infty(S)$ – пространство ограниченных $\mathbb{R}$-значных функций на S. Определим **ℓ^∞-норму** на $\ell^\infty(S)$ формулой $|f|_{\ell^\infty} := \sup_S |f|$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **$\ell^\infty(S)$ – банахово пространство.**

Примеры банаховых пространств

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть S – счетное множество, а $\ell^1(S)$ – пространство суммируемых $\mathbb{R}$-значных функций на S. Определим **ℓ^1-норму** на $\ell^1(S)$ формулой $|f|_{\ell^1} := \sum_S |f|$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\ell^1(S)$ **– банахово пространство.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **двойственное пространство к $\ell^1(S)^*$ это $\ell^\infty(S)$**.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\ell^1(S)$ **вложено в двойственное пространство к $\ell^\infty(S)^*$, но не изоморфно ему.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть S – счетное множество, а $\ell^2(S)$ – пространство с $\mathbb{R}$-значных функций на S, таких, что $\sum_S |f|^2 < \infty$ (такие функции называются **квадратично-интегрируемыми**. Определим **ℓ^2-норму** на $\ell^1(S)$ формулой $|f|_{\ell^1} := \left(\sum_S |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что это банахово пространство. Докажите, что $\ell^2(S)^*$ канонически изоморфно $\ell^2(S)$.

Свойство (T) Каждана (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Гильбертово пространство H есть полное бесконечномерное эрмитово пространство, изоморфное пространству $\ell^2(\mathbb{Z})$ квадратично-суммируемых последовательностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **группой Каждана**, если выполнено **свойство (T)**:

(T) Для любого изометрического действия G на гильбертовом пространстве H, G **сохраняет какую-то фиксированную точку** $h \in H$**.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Изначально Каждан определял (T) иначе, а это определение принадлежит Серру; его равносильность определению Каждана называется Delorme-Guichardet Theorem.

Свойства групп Каждана:

1. Группы Каждана конечно порождены.

2. Фактор группы Каждана по ее коммутанту конечен.

3. Любая нормальная подгруппа группы Каждана G имеет конечный индекс, или лежит в центре G и конечна.

Группы Каждана и аменабельные группы

ТЕОРЕМА: Пусть G – аменабельная группа. **Тогда свойство (T) для G не выполняется.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть S – набор образующих для G. Выберем последовательность Фёльнера $\{F_i\}$ таким образом, чтобы $\frac{|F_n \triangle L_s(F_n)|}{|F_n|} < \frac{1}{2^n}$. Тогда для любого $g \in G$ имеем

$$\frac{|F_n \triangle L_g(F_n)|}{|F_n|} < \frac{|g|}{2^n}.$$

(следует из неравенства треугольника для $A \triangle B$).

Шаг 2: Рассмотрим $H = \ell^2(\mathbb{N}, \ell^2(G))$ – пространство последовательностей $\{f_i \in \ell^2(G)\}$, таких, что $\sum \|f_i\|^2 \leqslant \infty$. Оно очевидно гильбертово, и снабжено действием G сдвигами, которое имеет неподвижную точку - 0.

Шаг 3: Рассмотрим последовательность $\mathfrak{h} = \{h_i \in \ell^2(G)\}$, где $h_i := \frac{\chi_{F_i}}{|F_i|^{1/2}}$. Тогда $|h_i - L_g h_i| \leqslant \frac{\chi_{F_n \triangle L_g(F_n)}}{|F_i|^{1/2}}$ и в силу шага 1, ее ℓ^2-норма удовлетворяет

$$\|h_i - L_g h_i\|^2_{\ell^2} \leqslant \frac{|F_n \triangle L_g(F_n)|}{|F_n|} \leqslant \frac{|g|}{2^n}.$$

Группы Каждана и аменабельные группы (продолжение)

Шаг 4: Мы получаем, что для любого $g \in G$, последовательность $\{h_i - L_g h_i\} = \mathfrak{h} - g\mathfrak{h}$ лежит в $\ell^2((\mathbb{N}, \ell^2(G))$.

Шаг 5: Определим действие G на H формулой $g(\mathfrak{f}) = L_g\mathfrak{f} + (\mathfrak{h} - L_g\mathfrak{h})$. Если $\mathfrak{f}$ – неподвижная точка этого действия, то $(1 - L_g)(\mathfrak{f} - \mathfrak{h})$ для любого $g \in G$.

Шаг 6: Пусть $\{f_i \in \ell^2(G)\}$ – последовательность, соответствующая $\mathfrak{f}$. **Тогда $L_g(f_i - h_i) = f_i - h_i$ для любого $g \in G$.**

Шаг 7: Значит, **$f_i - h_i$ – G-инвариантная, квадратично суммируемая функция на G,** то есть $f_i - h_i = 0$.

Шаг 8: Поскольку последовательность $\{h_i \in \ell^2(G)\}$ удовлетворяет $\|h_i\|_{\ell^2} = 1$, **она не квадратично суммируема, то есть не лежит в H.** Мы пришли к противоречию! Значит, **у действия G на H нет неподвижных точек.** ■

ℓ^∞ и среднее (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть S – множество, а $\ell^\infty(S)$ – пространство ограниченных $\mathbb{R}$-значных функций на S. Определим **ℓ^∞-норму** на $\ell^\infty(S)$ формулой $|f|_{\ell^\infty} := \sup_S |f|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Среднее** на S есть непрерывный функционал $\operatorname{Av}_S : \ell^\infty(S) \longrightarrow \mathbb{R}$, который удовлетворяет следующим условиям:
1. $\operatorname{Av}_S(\chi_S) = 1$, где $\chi_S \in \ell^\infty(S)$ есть функция, отображающая S в 1.
2. $\operatorname{Av}_S(f) \geqslant 0$ для любой неотрицательной функции $f \in \ell^\infty(S)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для подмножества $A \subset S$, обозначим за $\chi_A \in \ell^\infty(S)$ **характеристическую функцию**, которая равна 1 на A и 0 вне A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Конечно-аддитивная мера $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **вероятностной**, если $\mu(S) = 1$.

ТЕОРЕМА: Пусть $2^S \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ – конечно-аддитивная вероятностная мера. Тогда **существует среднее** $\ell^\infty(S) \xrightarrow{\operatorname{Av}_S} \mathbb{R}$ такое, что $\operatorname{Av}_S \chi_A = \mu(A)$ для каждого $A \subset S$, и оно единственно.

СЛЕДСТВИЕ: Группа аменабельна тогда и только тогда, когда на ней существует среднее, которое инвариантно относительно левых сдвигов.

Почти инвариантные L^1-меры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа. Говорится, что на G найдется **почти инвариантная L^1-мера**, если задана последовательность неотрицательных, суммируемых функций μ_i на G с $\sum_G \mu_i = 1$, причем для любого $s \in G$, имеем

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{g \in G} |\mu_i(g) - \mu_i(sg)| = 0$$

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что это равносильно тому, что для любого конечного $S \subset G$, любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $\mu \geqslant 0$ на G с $\sum_G \mu = 1$, такое, что $\|\mu_i(g) - \mu_i(sg)\| < \varepsilon$ для любого $s \in S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция на G называется **финитной**, если она равна 0 вне конечного числа $g \in G$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку финитные функции плотны в $\ell^1(G)$, **почти инвариантную L^1-меру μ_i можно всегда выбрать финитной.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Если у G есть последовательность Фёльнера, **в качестве μ_i всегда можно взять $\frac{1}{|F_i|}\chi_{F_i}$** (проверьте это).

Теорема Фёльнера

ТЕОРЕМА: (Теорема Фёльнера) Пусть G – конечно порожденная группа. Тогда следующие условия равносильны.
(i) G **аменабельна**
(ii) G **допускает среднее**, то есть непрерывный, неотрицательный левоинвариантный функционал $\ell^\infty(G) \longrightarrow \mathbb{R}$, причем $\mathrm{Av}_G(1) = 1$.
(iii) На G найдется **почти инвариантная L^1-мера**.
(iv) Для каждого конечного $S \subset G$, $\varepsilon > 0$, у G найдется конечное подмножество A такое, что $\frac{|A \triangle L_g(A)|}{|A|} < \varepsilon$ для всех $g \in S$.
(v) G **допускает последовательность Фёльнера.**

ЗАМЕЧАНИЕ: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) и (v) $\Rightarrow$ (i) доказаны в лекции 1, (v) $\Rightarrow$ (iii) см. выше. Для доказательства теоремы Фельнера **остается убедиться, что (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (iv) и (iv)$\Rightarrow$ (v).**

Теорема Фёльнера, (iii) $\Rightarrow$ (iv)

Доказательство (iii) $\Rightarrow$ (iv). Шаг 1: Пусть μ_ε - финитная, неотрицательная функция, такая, что $\mu_\varepsilon = \sum c_i \chi_{E_i}$, где $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset ...$ – монотонная система подмножеств G, а $c_i > 0$, причем для любого $g \in S \subset G$, имеем $\|\mu_\varepsilon - L_g^* \mu_\varepsilon\| < \varepsilon$. **Такое μ_ε всегда существует в силу того, что финитные функции плотны в $\ell^1(G)$.**

Шаг 2: Поскольку $E_i \backslash L_g(E_i) \cap L_g E_{i+j} \backslash (E_{i+j}) = \emptyset$, мы имеем

$$|\mu_\varepsilon - L_g^* \mu_\varepsilon| \geqslant \sum_i c_i \chi_{E_i \triangle L_g(E_i)},$$

для любого i.

Шаг 3: Коль скоро $\|\mu_\varepsilon - L_g^* \mu_\varepsilon\| < \varepsilon$, а $\|\mu_\varepsilon\| = \sum_i c_i |E_i| = 1$, получаем из шага 2, что

$$\varepsilon |S| \sum_i c_i |E_i| \geqslant \sum_i \sum_{g \in S} c_i |E_i \triangle L_g(E_i)|.$$

Шаг 4: **Значит, для какого-то i верно неравенство**

$$\varepsilon |S| c_i |E_i| \geqslant \sum_{g \in S} c_i |E_i \triangle L_g(E_i)|.$$

Положим $A = E_i$. ■

Теорема Фёльнера (продолжение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Выпуклое подмножество линейного пространства есть подмножество, содержащее вместе с любыми двумя точками a, b отрезок $[a, b]$.

Доказательство (iv) $\Rightarrow$ (v): Возьмем G как объединение возрастающей системы S_i, и для каждой S_i возьмем A как выше для $\varepsilon = 1/i$. ■

Доказательство (ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть дано $\varepsilon > 0$ и конечное множество $S \subset G$ в аменабельной группе. Надо доказать, что найдется неотрицательное $\mu \in \ell^1(G)$ такое, что $\|L_g\mu - \mu\|_{\ell^1(G)} < \varepsilon$ для всех $g \in S$.

Шаг 1: Пусть $n = |S|$, а $V = \ell^1(G)^n = \ell^1(G \times S)$ – пространство ℓ^1-суммируемых функций из G в $\mathbb{R}^n$. Обозначим за $A_0 \subset V$ подмножество, состоящее из n-ок вида $(\mu, \mu, ..., \mu)$, где $\mu \in \ell^1(G)$ неотрицательная функция с $\|\mu\|_{\ell^1} = 1$. Легко видеть, что A_0 **выпукло** (проверьте).

Шаг 2: Обозначим элементы S за $s_1, ..., s_n$. Пусть

$$A := (\mu - L_{s_1}\mu, \mu - L_{s_2}\mu, ...\mu - L_{s_n}\mu).$$

Поскольку A получено из A_0 применением линейного оператора, оно тоже выпукло.

Теорема Фёльнера, (ii) $\Rightarrow$ (iii) (продолжение)

Шаг 3: Вспомним **теорему Хана-Банаха о сепарации**. Пусть A – выпуклое множество в нормированном пространстве V, не пересекающее ε-окрестности 0 **Тогда существует непрерывный функционал h на V, такой, что $h|_A > C > 0$.**

Применив теорему Хана-Банаха к $A \subset V$, найдем функционал $f \in \ell^n(G \times S)^* = \ell^\infty(G \times S)$, удовлетворяющий $(\langle f, A) \geqslant C > 0$.

Шаг 4: Функцию $f \in \ell^\infty(G \times S)$ можно рассмотреть как последовательность ограниченных функций $(f_1, ..., f_n) \in \ell^\infty(G)^n$.

Возьмем функцию δ_g, которая равна 1 в какой-то точке $g \in G$ и 0 во всех остальных точках. Соответствующий вектор $(\delta_g, \delta_g, ..., \delta_g) \in \ell^1(G)^n$ лежит в A_0, значит,

Теорема Фёльнера, (ii) $\Rightarrow$ (iii) (окончание)

$$\mathfrak{d}_g := (\delta_g - \delta_{s_1 g}, \delta_g - \delta_{s_2 g}, ..., \delta_g - \delta_{s_n g}) \in A.$$

Шаг 5: Поскольку $\langle \delta_g, f_i \rangle = f_i(g)$, условие $\forall g \in G \ \ \langle \mathfrak{d}_g, f \rangle > C$ равносильно

$$(*) \qquad \forall g \in G \ \ | \ \ \sum_i (f_i(g) - f_i(s_i g)) > C.$$

Шаг 5: Условие (*) равносильно $\sum_i f_i - L_{s_i} f_i > C\chi_G$. Значит, $\sum_i \mathsf{Av}_G(f_i - L_{s_i} f_i) > C$, **что противоречит аменабельности.** ■