

Симплектическая емкость

лекция 1

Миша Вербицкий

25 июля 2013

Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия"
24 - 30 августа, 2013, ЯГПУ, Ярославль, Россия

Алгебра де Рама

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – гладкое многообразие. Обозначим за $\Lambda^i M$ **пространство дифференциальных i -форм на M** , то есть антисимметричных i -форм на TM . Определим умножение $\Lambda^i M \times \Lambda^j M \rightarrow \Lambda^{i+j} M$ как $\alpha \wedge \beta \rightarrow \Pi(\alpha \otimes \beta)$, где $\alpha \otimes \beta$ – сечение $\Lambda^i M \otimes \Lambda^j M \subset \otimes_{i+j} T^*M$, полученное перемножением α и β , а Π – кососимметризация тензора.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Это умножение ассоциативно, и удовлетворяет $\alpha \wedge \beta = (-1)^{ij} \beta \wedge \alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Алгебра $\Lambda^* M := \bigoplus_i \Lambda^i M$ с определенной выше алгебраической структурой называется **алгеброй де Рама** многообразия.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ – гладкое отображение многообразий. Тогда задано отображение $\varphi^* : \Lambda^* M_2 \rightarrow \Lambda^* M_1$, переводящее дифференциальную форму $\eta \in \Lambda^k M_2$ в форму $(v_1, \dots, v_k) \in TM_1 \rightarrow \eta(D_\varphi v_1, \dots, D_\varphi(v_k))$.

Дифференциал де Рама

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дифференциал де Рама $d : \Lambda^* M \longrightarrow \Lambda^{*+1} M$ есть \mathbb{R} -линейное отображение, которое удовлетворяет следующим условиям.

(i) Для любого $f \in \Lambda^0 = C^\infty M$, df есть элемент $\Lambda^1 M$, который равен дифференциалу $df \in \Omega^1 M$.

(ii) **(Правило Лейбница)** $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^j a \wedge db$, для любых $a \in \Lambda^i M, b \in \Lambda^j M$.

(iii) $d^2 = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ:

Дифференциал де Рама однозначно задается этими условиями.

Однозначность определения: Алгебра де Рама порождена $C^\infty M$ и 1-формами вида df , а на таких формах дифференциал де Рама уже задан.

Существование, для $M = \mathbb{R}^n$: Пусть t_1, \dots, t_n – координатные функции на \mathbb{R}^n , а $\alpha \in \Lambda^* \mathbb{R}^n$ – какой-то моном, полученный произведением нескольких dt_i . Дифференциал де Рама переводит $f\alpha$ в $\sum_i \frac{df}{dt_i} dt_i \wedge \alpha$, для любой функции $f \in C^\infty \mathbb{R}^n$.

Дифференциал де Рама (продолжение)

УТВЕРЖДЕНИЕ:

Дифференциал де Рама однозначно задается этими условиями.

Однозначность определения: Алгебра де Рама порождена $C^\infty M$ и 1-формами вида df , а на таких формах дифференциал де Рама уже задан.

Существование, для $M = \mathbb{R}^n$: Пусть t_1, \dots, t_n – координатные функции на \mathbb{R}^n , а $\alpha \in \Lambda^* \mathbb{R}^n$ – какой-то моном, полученный произведением нескольких dt_i . Дифференциал де Рама переводит $f\alpha$ в $\sum_i \frac{df}{dt_i} dt_i \wedge \alpha$, для любой функции $f \in C^\infty \mathbb{R}^n$.

Существование, для любого многообразия: Зададим d локально по формуле, указанной выше. **Это определение согласовано с заменой координат в силу единственности d** , значит, d согласован с переклейкой карт. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дифференциальная форма называется **замкнутой**, если она лежит в ядре d , и **точной**, если она лежит в образе d . Пространство $H^i(M) := \frac{\ker d}{\operatorname{im} d} \Big|_{\Lambda^i M}$ называется **i -й группой когомологий де Рама** многообразия M .

Интегрирование дифференциальных форм

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Форма ориентации** (она же **форма объема**) n -мерного многообразия есть нигде не зануляющаяся дифференциальная форма $\eta \in \Lambda^n M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дифференциальная форма с компактным носителем** есть форма, равная нулю вне компактного подмножества. Пространство дифференциальных форм с компактным носителем обозначается $\Lambda_c^k(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Интеграл** n -формы по n -мерному многообразию M есть функционал $\int_M : \Lambda_c^n M \rightarrow \mathbb{R}$, обладающий следующими свойствами.

1. \int_M инвариантен относительно диффеоморфизмов: для любого диффеоморфизма $\varphi : M \rightarrow N$ и n -формы $\eta \in \Lambda_c^n N$, имеем $\int_N \varphi^* \eta = \int_M \eta$.

2. Положительность интеграла:

для любой формы ориентации η и ненулевой неотрицательной функции f с компактным носителем, $\int_M f \eta > 0$

3. Нормализация:

если M есть тор $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, а форма ориентации равна $\eta = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$, имеем $\int_M \eta = 1$.

Интегрирование дифференциальных форм (продолжение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Интеграл n -формы по n -мерному многообразию M есть функционал $\int_M : \Lambda_c^n M \rightarrow \mathbb{R}$, обладающий следующими свойствами.

1. \int_M инвариантен относительно диффеоморфизмов: для любого диффеоморфизма $\varphi : M \rightarrow N$ и n -формы $\eta \in \Lambda_c^n N$, имеем $\int_N \varphi^* \eta = \int_M \eta$.

2. Положительность интеграла:

для любой формы ориентации η и ненулевой неотрицательной функции f с компактным носителем, $\int_M f \eta > 0$

3. Нормализация:

если M есть тор $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, а форма ориентации равна $\eta = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$, имеем $\int_M \eta = 1$.

ТЕОРЕМА: Интеграл существует и однозначно определен выше-приведенными условиями (докажите это).

ТЕОРЕМА: Формула Стокса: Пусть M – многообразие с краем ∂M . Тогда $\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Воспользовавшись разбиением единицы, интеграл можно доопределить до функционала $\int_M : \eta \mapsto]0, \infty]$ на формах объема, даже когда M некомпактно. Такой функционал называется **объемом многообразия**.

Симплектические многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кососимметрическая 2-форма ω на векторном пространстве V называется **невырожденной**, или **симплектической**, если для каждого ненулевого $x \in V$ найдется $y \in V$ такой, что $\omega(x, y) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Каждая невырожденная кососимметрическая форма записывается в некотором базисе как

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если обозначить соответствующий базис в V^* как $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$, форма ω будет записана в виде $\omega = \sum_i x_i \wedge y_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Ориентация** на n -мерном векторном пространстве есть ненулевой вектор в $\Lambda^n V$. **Ориентация** на n -мерном многообразии есть нигде не зануляющаяся n -форма.

ЗАМЕЧАНИЕ: Симплектическое пространство всегда ориентировано. Действительно, $\omega^n = n! x_1 \wedge y_1 \wedge x_2 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge x_n \wedge y_n$.

Симплектические многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – многообразие. Дифференциальная форма $\omega \in \Lambda^2 M$ называется **симплектической**, если она невырождена в каждой точке, и замкнута.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Диффеоморфизм $\varphi : M \rightarrow M'$ симплектических многообразий (M, ω) и (M', ω') называется **симплектоморфизмом**, если $\varphi^* \omega' = \omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Симплектическая геометрия изучает симплектические многообразия с точностью до симплектоморфизма.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплектический шар** радиуса r есть шар радиуса r в \mathbb{R}^{2n} с симплектической структурой, которая индуцирована формой $\omega = \sum_i dx_i \wedge dy_i$ на \mathbb{R}^{2n} (x_i, y_i – координаты).

ТЕОРЕМА: (Теорема Дарбу): Симплектическое многообразие локально симплектоморфно симплектическому шару (в окрестности каждой своей точки).

Теорема Дарбу будет доказана на этой лекции.

Симплектическая емкость

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симплектический объем симплектического многообразия (M, ω) размерности $2n$ есть интеграл $\int_M \omega^n$.

Наука о симплектической емкости изобретена, чтобы отвечать на следующий вопрос.

ВОПРОС: Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^{2n}$ два подмножества одинакового объема, гомеоморфные шару. Будут ли они симплектоморфны? **Ответ: не всегда.**

ЗАДАЧА: Докажите, что при $n = 1$, любые два симплектических многообразия одинакового симплектического объема, гомеоморфных диску, являются симплектоморфными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, ω) – симплектическое многообразие, а r – супремум радиусов всех симплектических шаров той же размерности, которые симплектоморфно вкладываются в M . Число $\text{cap}(M, \omega) := \pi r^2$ называется **симплектической емкостью Громова** многообразия M .

Свойства симплектической емкости

Два факта про симплектическую емкость, которые я докажу позже.

ТЕОРЕМА: (Экланд-Хофер)

Диффеоморфизм симплектических многообразий, сохраняющий ориентацию, **является симплектоморфизмом тогда и только тогда, когда он сохраняет симплектическую емкость** всех подмножеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симплектический цилиндр есть $\mathbb{R}^{2n} \times B_r$, где \mathbb{R}^{2n} снабжено обычной симплектической формой $dx \wedge dy$, а B_r – симплектический шар радиуса r в \mathbb{R}^2 .

ТЕОРЕМА: (Громов)

Симплектическая емкость симплектического цилиндра равна πr^2

ЗАМЕЧАНИЕ: Получается, что объем цилиндра бесконечный, а его симплектическая емкость конечна.

Производная Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Поток диффеоморфизмов многообразия есть гладкое отображение $\varphi_t : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$, которое является диффеоморфизмом для любого $t \in \mathbb{R}$. Аналогично определяется **поток симплектоморфизмов**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Предположим, что $\varphi_0 = \text{Id}_M$. Тогда производная $\frac{d\varphi_t}{dt}|_{t=0}$ есть векторное поле, которое называется **производной потока диффеоморфизмов**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\varphi_t : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ – поток диффеоморфизмов, а $v := \frac{d\varphi_t}{dt}|_{t=0}$ соответствующее векторное поле. **Производная Ли вдоль v** , есть отображение $\text{Lie}_v : \Lambda^i M \rightarrow \Lambda^i M$, полученное как $\text{Lie}_v(\eta) := \frac{d}{dt} \varphi_t^* \eta|_{t=0}$.

ТЕОРЕМА: (Формула Картана)

$$\text{Lie}_v(\eta) = \{d, i_v\}\eta,$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ обозначает антикоммутатор, а i_v – операцию подстановки v в форму.

Формула Картана (набросок доказательства)

ТЕОРЕМА: (Формула Картана)

$$\text{Lie}_v(\eta) = \{d, i_v\}\eta,$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ обозначает антикоммутатор $\{a, b\} = ab - ba$, а i_v – операцию подстановки v в форму.

Доказательство. Шаг 1: Проверяем, что Lie_v и $\{d, i_v\}$ – дифференцирования алгебры де Рама, коммутирующие с d .

Шаг 2: Проверяем, что они совпадают на функциях.

Шаг 3: Проверяем, что дифференцирования Λ^*M , которые совпадают на функциях и коммутируют с d , равны. ■

Потоки диффеоморфизмов (окончание)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для любого потока диффеоморфизмов φ_t , найдется векторное поле v_t такое, что $\varphi_t^*(\text{Lie}_{v_t} \eta) = \frac{d}{dt} \varphi_t^* \eta$. Такое векторное поле называется **касательное к потоку диффеоморфизмов в точке $t = c$** .

ТЕОРЕМА: (основная теорема теории обыкновенных дифференциальных уравнений; теорема Пикара-Линделефа)

Пусть $\{v_t\}$ – семейство векторных полей на компактном многообразии M , которое гладко параметризовано $t \in \mathbb{R}$. Тогда **каждый диффеоморфизм φ_0 единственным образом продолжается до потока диффеоморфизмов φ_t , касательного к v_t в каждом $t \in \mathbb{R}$.** ■

Гамильтоновы векторные поля

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\varphi_t : M \rightarrow M$ – поток симплектоморфизмов, а v_t – соответствующее векторное поле. Тогда $\text{Lie}_{v_t}(\omega) = 0$, что дает по формуле Картана $0 = i_{v_t}d\omega + di_{v_t}\omega = di_{v_t}\omega$, то есть **1-форма** $i_v\omega = \omega(v, \cdot)$ **замкнута**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Векторное поле v называется **симплектическим**, если 1-форма $i_v\omega$ замкнута (это равносильно $\text{Lie}_v(\omega) = 0$), и **гамильтоновым**, если $i_v\omega$ точна. Поток симплектоморфизмов φ_t называется **поток гамильтоновых симплектоморфизмов**, если касательные векторные поля гамильтоновы.

СЛЕДСТВИЕ: Отображение $v \rightarrow i_v(\omega)$ задает биекцию между гамильтоновыми векторными полями и точными формами. Таким образом, существует биекция между $C^\infty M / \text{const}$ и пространством $\text{Ham}(M)$ гамильтоновых векторных полей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гамильтониан** гамильтонова векторного поля v есть функция H_v , такая, что $dH_v = i_v(\omega)$.

Гамильтоновы симплектоморфизмы

СЛЕДСТВИЕ: Отображение $v \rightarrow i_v(\omega)$ задает биекцию между гамильтоновыми векторными полями и точными формами. Таким образом, существует биекция между $C^\infty M / \text{const}$ и пространством $\text{Ham}(M)$ гамильтоновых векторных полей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Гамильтониан гамильтонова векторного поля v есть функция H_v , такая, что $dH_v = i_v(\omega)$.

СЛЕДСТВИЕ: Потoki φ_t , $\varphi_0 = \text{Id}_M$ гамильтоновых симплектоморфизмов параметризуются гладкими семействами гамильтонианов H_t .

СЛЕДСТВИЕ: Гамильтоновых симплектоморфизмов **очень много**.

Теорема Мозера

ТЕОРЕМА: (теорема Мозера) Пусть ω_t – гладкое семейство симплектических форм на компактном многообразии M . Предположим, что классы когомологий ω_t равны для всех t . **Тогда найдется поток диффеоморфизмов $\Psi_t \in \text{Diff}_0(M)$, с $\Psi_0 = \text{Id}$, такой, что $\Psi_t^* \omega_0 = \omega_t$.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку ω_t все когомологичны, форма $\frac{d\omega_t}{dt}$ точна. Значит, $\frac{d\omega_t}{dt} = d\eta_t$, где $\eta_t \in \Lambda^1(M)$.

Шаг 2: Пусть v_t – касательное векторное поле к Ψ_t . $\Psi_t^* \omega_t = \omega$ равносильно $\frac{d\Psi_t^* \omega_t}{dt} = 0$. Но

$$\frac{d\Psi_t^* \omega_t}{dt} = \Psi_t^* (d\eta_t + \text{Lie}_{v_t} \omega_t);$$

это выражение зануляется тогда и только тогда, когда $d\eta_t + \text{Lie}_{v_t} \omega_t = 0$.

Шаг 3: По формуле Картана, $\text{Lie}_{v_t} \omega_t = d(i_{v_t} \omega_t)$, то есть для $\Psi_t^* \omega_t = \omega$ нам нужно $d(i_{v_t} \omega_t) = -d\eta_t$. Поскольку ω невырождена, $x \rightarrow i_x \omega_t$ – биективное отображение из TM в $\Lambda^1 M$ а значит, **существует $v_t \in TM$ такое, что $i_{v_t} \omega_t = -\eta_t$.** ■

Теорема Дарбу

ТЕОРЕМА: Симплектическое многообразие локально симплектоморфно симплектическому шару (в окрестности каждой своей точки).

Доказательство. Шаг 1: Достаточно проверить, что для любой симплектической формы ω_1 на \mathbb{R}^{2n} , существует окрестность нуля U , такая, что (U, ω_1) симплектоморфно симплектическому шару.

Шаг 2: Выберем координаты x_i, y_i на \mathbb{R}^{2n} таким образом, что $\omega_1|_{T_0\mathbb{R}^{2n}} = \omega_0|_{T_0\mathbb{R}^{2n}}$, где $\omega_0 = \sum_i dx_i \wedge dy_i$.

Шаг 3: Форма $\omega_t := t\omega + (1-t)\omega_0$ невырождена в 0. Выберем стягиваемую окрестность $U \ni 0$ такую, что ω_t невырождена в U для $t \in [0, 1]$ (проверьте, что это можно сделать).

Шаг 4: В U формы ω_t невырождены и когомологичны; пусть $\frac{d\omega_t}{dt} = d\eta_t$, где η_t гладко зависит от t . Возьмем векторное поле $v_t := -\omega_t^{-1}(\eta_t)$. В небольшой окрестности 0, это векторное поле можно проинтегрировать до диффеоморфизма Ψ_t . Аргумент, который использовался в доказательстве теоремы Мозера, дает $d\eta_t + \text{Lie}_{v_t}\omega_t = 0$, что влечет $\Psi_t^*\omega_0 = \omega_t$, то есть ω_0 диффеоморфно ω_1 в какой-то окрестности 0.

■