Симплектическая емкость

лекция 1

Миша Вербицкий

25 июля 2013

Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия"
24 - 30 августа, 2013, ЯГПУ, Ярославль, Россия

Алгебра де Рама

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – гладкое многообразие. Обозначим за $\Lambda^i M$ **пространство дифференциальных i-форм на M,** то есть антисимметричных i-форм на TM. Определим умножение $\Lambda^i M \times \Lambda^j M \longrightarrow \Lambda^{i+j} M$ как $\alpha \wedge \beta \longrightarrow \Pi(\alpha \otimes \beta)$, где $\alpha \otimes \beta$ – сечение $\Lambda^i M \otimes \Lambda^j M \subset \bigotimes_{i+j} T^*M$, полученное перемножением α и β, а Π – кососимметризация тензора.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Это умножение ассоциативно, и удовлетворяет $\alpha \wedge \beta = (-1)^{ij} \beta \wedge \alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Алгебра $\Lambda^* M := \oplus_i \Lambda^i M$ с определенной выше алгебраической структурой называется **алгеброй де Рама** многообразия.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\varphi: M_1 \longrightarrow M_2$ – гладкое отображение многообразий. Тогда задано отображение $\varphi^*: \Lambda^* M_2 \longrightarrow \Lambda^* M_1$, переводящее дифференциальную форму $\eta \in \Lambda^k M_2$ в форму $(v_1, ..., v_k) \in TM_1 \longrightarrow \eta(D_\varphi v_1, ..., D_\varphi(v_k))$.

Дифференциал де Рама

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дифференциал де Рама $d: \Lambda^* M \longrightarrow \Lambda^{*+1} M$ есть $\mathbb{R}$-линейное отображение, которое удовлетворяет следующим условиям.

(i) Для любого $f \in \Lambda^0 = C^\infty M$, df есть элемент $\Lambda^1 M$, который равен дифференциалу $df \in \Omega^1 M$.

(ii) **(Правило Лейбница)** $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^j a \wedge db$, для любых $a \in \Lambda^i M, b \in \Lambda^j M$.

(iii) $d^2 = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ:
Дифференциал де Рама однозначно задается этими условиями.

Однозначность определения: Алгебра де Рама порождена $C^\infty M$ и 1-формами вида df, а на таких формах дифференциал де Рама уже задан.

Существование, для $M = \mathbb{R}^n$: Пусть $t_1, ..., t_n$ – координатные функции на $\mathbb{R}^n$, а $\alpha \in \Lambda^* \mathbb{R}^n$ – какой-то моном, полученный произведением нескольких dt_i. Дифференциал де Рама переводит $f\alpha$ в $\sum_i \frac{df}{dt_i} dt_i \wedge \alpha$, для любой функции $f \in C^\infty \mathbb{R}^n$.

Дифференциал де Рама (продолжение)

УТВЕРЖДЕНИЕ:
Дифференциал де Рама однозначно задается этими условиями.

Однозначность определения: Алгебра де Рама порождена $C^\infty M$ и 1-формами вида df, а на таких формах дифференциал де Рама уже задан.

Существование, для $M = \mathbb{R}^n$: Пусть $t_1, ..., t_n$ – координатные функции на $\mathbb{R}^n$, а $\alpha \in \Lambda^*\mathbb{R}^n$ – какой-то моном, полученный произведением нескольких dt_i. Дифференциал де Рама переводит $f\alpha$ в $\sum_i \frac{df}{dt_i} dt_i \wedge \alpha$, для любой функции $f \in C^\infty\mathbb{R}^n$.

Существование, для любого многообразия: Зададим d локально по формуле, указанной выше. **Это определение согласовано с заменой координат в силу единственности d,** значит, d согласован с переклейкой карт. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дифференциальная форма называется **замкнутой**, если она лежит в ядре d, и **точной**, если она лежит в образе d. Пространство $H^i(M) := \frac{\ker d}{im d}\Big|_{\Lambda^i M}$ называется **i-й группой когомологий де Рама** многообразия M.

Интегрирование дифференциальных форм

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Форма ориентации** (она же **форма объема**) n-мерного многообразия есть нигде не зануляющаяся дифференциальная форма $\eta \in \Lambda^n M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дифференциальная форма с компактным носителем** есть форма, равная нулю вне компактного подмножества. Пространство дифференциальных форм с компактным носителем обозначается $\Lambda_c^k(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Интеграл** n-формы по n-мерному многообразию M есть функционал $\int_M : \Lambda_c^n M \longrightarrow \mathbb{R}$, обладающий следующими свойствами.
1. $\int_M$ инвариантен относительно диффеоморфизмов: для любого диффеоморфизма $\varphi : M \longrightarrow N$ и n-формы $\eta \in \Lambda_c^n N$, имеем $\int_N \varphi^* \eta = \int_M \eta$.
2. Положительность интеграла:
для любой формы ориентации η и ненулевой неотрицательной функции f с компактным носителем, $\int_M f\eta > 0$
3. Нормализация:
если M есть тор $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, а форма ориентации равна $\eta = dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n$, имеем $\int_M \eta = 1$.

Интегрирование дифференциальных форм (продолжение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Интеграл** n-формы по n-мерному многообразию M есть функционал $\int_M : \Lambda^n_c M \longrightarrow \mathbb{R}$, обладающий следующими свойствами.
1. $\int_M$ инвариантен относительно диффеоморфизмов: для любого диффеоморфизма $\varphi : M \longrightarrow N$ и n-формы $\eta \in \Lambda^n_c N$, имеем $\int_N \varphi^* \eta = \int_M \eta$.
2. Положительность интеграла:
для любой формы ориентации η и ненулевой неотрицательной функции f с компактным носителем, $\int_M f\eta > 0$
3. Нормализация:
если M есть тор $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, а форма ориентации равна $\eta = dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n$, имеем $\int_M \eta = 1$.

ТЕОРЕМА: **Интеграл существует и однозначно определен вышеприведенными условиями (докажите это)**.

ТЕОРЕМА: **Формула Стокса:** Пусть M – многообразие с краем ∂M. Тогда $\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Воспользовавшись разбиением единицы, интеграл можно доопределить до функционала $\int_M : \eta \mapsto]0, \infty]$ на формах объема, даже когда M некомпактно. Такой функционал называется **объемом многообразия**.

Симплектические многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кососимметрическая 2-форма ω на векторном пространстве V называется **невырожденной**, или **симплектической**, если для каждого ненулевого $x \in V$ найдется $y \in V$ такой, что $\omega(x, y) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Каждая невырожденная кососимметрическая форма записывается в некотором базисе как

$$\begin{pmatrix} \omega = \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Если обозначить соответствующий базис в V^* как $x_1, y_1, x_2, y_2, ...$, форма ω будет записана в виде $\omega = \sum_i x_i \wedge y_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Ориентация на n-мерном векторном пространстве есть ненулевой вектор в $\Lambda^n V$. **Ориентация** на n-мерном многообразии есть нигде не зануляющаяся n-форма.

ЗАМЕЧАНИЕ: Симплектическое пространство всегда ориентировано. Действительно, $\omega^n = n! x_1 \wedge y_1 \wedge x_2 \wedge y_2 \wedge ... \wedge x_n \wedge y_n$.

Симплектические многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – многообразие. Дифференциальная форма $\omega \in \Lambda^2 M$ называется **симплектической**, если она невырождена в каждой точке, и замкнута.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Диффеоморфизм $\varphi: M \longrightarrow M'$ симплектических многообразий (M, ω) и (M', ω') называется **симплектоморфизмом**, если $\varphi^* \omega' = \omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Симплектическая геометрия изучает симплектические многообразия с точностью до симплектоморфизма.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплектический шар** радиуса r есть шар радиуса r в $\mathbb{R}^{2n}$ с симплектической структурой, которая индуцирована формой $\omega = \sum_i dx_i \wedge dy_i$ на $\mathbb{R}^n$ (x_i, y_i – координаты).

ТЕОРЕМА: **(Теорема Дарбу): Симплектическое многообразие локально симплектоморфно симплектическому шару** (в окрестности каждой своей точки).

Теорема Дарбу будет доказана на этой лекции.

Симплектическая емкость

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплектический объем** симплектического многообразия (M,ω) размерности $2n$ есть интеграл $\int_M \omega^n$.

Наука о симплектической емкости изобретена, чтобы отвечать на следующий вопрос.

ВОПРОС: Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^{2n}$ два подмножества одинакового объема, гомеоморфные шару. Будут ли они симплектоморфны? **Ответ: не всегда**.

ЗАДАЧА: Докажите, что при $n = 1$, **любые два симплектических многообразия одинакового симплектического объема, гомеоморфных диску, являются симплектоморфными.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,ω) – симплектическое многообразие, а r – супремум радиусов всех симплектических шаров той же размерности, которые симплектоморфно вкладываются в M. Число $\operatorname{cap}(M,\omega) := \pi r^2$ называется **симплектической емкостью Громова** многообразия M.

Свойства симплектической емкости

Два факта про симплектическую емкость, которые я докажу позже.

ТЕОРЕМА: (Экланд-Хофер)
Диффеоморфизм симплектических многообразий, сохраняющий ориентацию, **является симплектоморфизмом тогда и только тогда, когда он сохраняет симплектическую емкость** всех подмножеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симплектический цилиндр есть $\mathbb{R}^{2n} \times B_r$, где $\mathbb{R}^{2n}$ снабжено обычной симплектической формой $dx \wedge dy$, а B_r – симплектический шар радиуса r в $\mathbb{R}^2$.

ТЕОРЕМА: (Громов)
Симплектическая емкость симплектического цилиндра равна πr^2

ЗАМЕЧАНИЕ: Получается, что объем цилиндра бесконечный, а его симплектическая емкость конечна.

Производная Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Поток диффеоморфизмов многообразия есть гладкое отображение $\varphi_t : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$, которое является диффеоморфизмом для любого $t \in \mathbb{R}$. Аналогично определяется **поток симплектоморфизмов**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Предположим, что $\varphi_0 = \mathrm{Id}_M$. Тогда производная $\frac{d\varphi_t}{dt}|_{t=0}$ есть векторное поле, которое называется **производной потока диффеоморфизмов**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\varphi_t : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ – поток диффеоморфизмов, а $v := \frac{d\varphi_t}{dt}|_{t=0}$ соответствующее векторное поле. **Производная Ли вдоль v**, есть отображение $\mathrm{Lie}_v : \Lambda^i M \longrightarrow \Lambda^i M$, полученное как $\mathrm{Lie}_v(\eta) := \frac{\varphi_t^* \eta}{dt}|_{t=0}$.

ТЕОРЕМА: (Формула Картана)

$$\mathrm{Lie}_v(\eta) = \{d, i_v\}\eta,$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ обозначает антикоммутатор, а i_v – операцию подстановки v в форму.

Формула Картана (набросок доказательства)

ТЕОРЕМА: (Формула Картана)

$$\operatorname{Lie}_v(\eta) = \{d, i_v\}\eta,$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ обозначает антикоммутатор $\{a, b\} = ab + ba$, а i_v – операцию подстановки v в форму.

Доказательство. Шаг 1: Проверяем, что Lie_v и $\{d, i_v\}$ – дифференцирования алгебры де Рама, коммутирующие с d.

Шаг 2: Проверяем, что они совпадают на функциях.

Шаг 3: Проверяем, что **дифференцирования $\Lambda^* M$, которые совпадают на функциях и коммутируют с d, равны.** ■

Потоки диффеоморфизмов (окончание)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для любого потока диффеоморфизмов φ_t, найдется векторное поле v_t такое, что $\varphi_t^*(\operatorname{Lie}_{v_t}\eta) = \frac{\varphi_t^*\eta}{dt}$ Такое векторное поле называется **касательное к потоку диффеоморфизмов в точке $t = c$.**

ТЕОРЕМА: (основная теорема теории обыкновенных дифференциальных уравнений; теорема Пикара-Линделефа)
Пусть $\{v_t\}$ – семейство векторных полей на компактном многообразии M, которое гладко параметризовано $t \in \mathbb{R}$. Тогда **каждый диффеоморфизм φ_0 единственным образом продолжается до потока диффеоморфизмов φ_t, касательного к v_t в каждом $t \in \mathbb{R}$.** ■

Гамильтоновы векторные поля

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\varphi_t : M \longrightarrow M$ – поток симплектоморфизмов, а v_t – соответствующее векторное поле. Тогда $\operatorname{Lie}_{v_t}(\omega) = 0$, что дает по формуле Картана $0 = i_{v_t} d\omega + d i_{v_t}\omega = d i_{v_t}\omega$, то есть **1-форма $i_v\omega = \omega(v, \cdot)$ замкнута.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Векторное поле v называется **симплектическим**, если 1-форма $i_v\omega$ замкнута (это равносильно $\operatorname{Lie}_v(\omega) = 0$), и **гамильтоновым**, если $i_v\omega$ точна. Поток симплектоморфизмов φ_t называется **потоком гамильтоновых симплектоморфизмов**, если касательные векторные поля гамильтоновы.

СЛЕДСТВИЕ: **Отображение $v \longrightarrow i_v(\omega)$ задает биекцию между гамильтоновыми векторными полями и точными формами.** Таким образом, существует биекция между $C^\infty M/\mathrm{const}$ и пространством $\operatorname{Ham}(M)$ гамильтоновых векторных полей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гамильтониан** гамильтонова векторного поля v есть функция H_v, такая, что $dH_v = i_v(\omega)$.

Гамильтоновы симплектоморфизмы

СЛЕДСТВИЕ: **Отображение $v \longrightarrow i_v(\omega)$ задает биекцию между гамильтоновыми векторными полями и точными формами.** Таким образом, существует биекция между $C^\infty M/\mathrm{const}$ и пространством $\mathrm{Ham}(M)$ гамильтоновых векторных полей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гамильтониан** гамильтонова векторного поля v есть функция H_v, такая, что $dH_v = i_v(\omega)$.

СЛЕДСТВИЕ: Потоки φ_t, $\varphi_0 = \mathrm{Id}_M$ гамильтоновых симплектоморфизмов параметризуются гладкими семействами гамильтонианов H_t.

СЛЕДСТВИЕ: Гамильтоновых симплектоморфизмов **очень много**.

Теорема Мозера

ТЕОРЕМА: (теорема Мозера) Пусть ω_t – гладкое семейство симплектических форм на компактном многобразии M. Предположим, что классы когомологий ω_t равны для всех t. **Тогда найдется поток диффеоморфизмов $\Psi_t \in \operatorname{Diff}_0(M)$, с $\Psi_0 = \operatorname{Id}$, такой, что $\Psi_t^*\omega_0 = \omega_t$.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку ω_t все когомологичны, форма $\frac{d\omega_t}{dt}$ точна. Значит, $\frac{d\omega_t}{dt} = d\eta_t$, где $\eta_t \in \Lambda^1(M)$.

Шаг 2: Пусть v_t – касательное векторное поле к Ψ_t. $\Psi_t^*\omega_t = \omega$ равносильно $\frac{d\Psi_t^*\omega_t}{dt} = 0$. Но

$$\frac{d\Psi_t^*\omega_t}{dt} = \Psi_t^*(d\eta_t + \operatorname{Lie}_{v_t}\omega_t);$$

это выражение зануляется тогда и только тогда, когда $d\eta_t + \operatorname{Lie}_{v_t}\omega_t = 0$.

Шаг 3: По формуле Картана, $\operatorname{Lie}_{v_t}\omega_t = d(i_{vt}\omega_t)$, то есть для $\Psi_t^*\omega_t = \omega$ нам нужно $d(i_{v_t}\omega_t) = -d\eta_t$. Поскольку ω невырождена, $x \longrightarrow i_x\omega_t$ – биективное отображение из TM в $\Lambda^1 M$ а значит, **существует $v_t \in TM$ такое, что $i_{v_t}\omega_t = -\eta_t$.** ■

Теорема Дарбу

ТЕОРЕМА: Симплектическое многообразие локально симплектоморфно симплектическому шару (в окрестности каждой своей точки).

Доказательство. Шаг 1: Достаточно проверить, что для любой симплектической формы ω_1 на $\mathbb{R}^{2n}$, существует окрестность нуля U, такая. что (U, ω_1) симплектоморфно симплектическому шару.

Шаг 2: Выберем координаты x_i, y_i на $\mathbb{R}^{2n}$ таким образом, что $\omega_1\Big|_{T_0\mathbb{R}^{2n}} = \omega_0\Big|_{T_0\mathbb{R}^{2n}}$, где $\omega_0 = \sum_i dx_i \wedge dy_i$.

Шаг 3: Форма $\omega_t := t\omega + (1-t)\omega_0$ невырождена в 0. Выберем стягиваемую окрестность $U \ni 0$ такую, что ω_t невырождена в U для $t \in [0,1]$ **(проверьте, что это можно сделать)**.

Шаг 4: В U формы ω_t невырождены и когомологичны; пусть $\frac{d\omega_t}{dt} = d\eta_t$, где η_t гладко зависит от t. Возьмем векторное поле $v_t := -\omega_t^{-1}(\eta_t)$. В небольшой окрестности 0, это векторное поле можно проинтегрировать до диффеоморфизма Ψ_t. **Аргумент, который использовался в доказательстве теоремы Мозера, дает $d\eta_t + \operatorname{Lie}_{v_t}\omega_t = 0$, что влечет $\Psi_t^*\omega_0 = \omega_t$, то есть ω_0 диффеоморфно ω_1 в какой-то окрестности 0.**

■