Симплектическая емкость

лекция 2

Миша Вербицкий

26 июля 2013

Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия"
24 - 30 августа, 2013, ЯГПУ, Ярославль, Россия

Симплектические многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кососимметрическая 2-форма ω на векторном пространстве V называется **невырожденной**, или **симплектической**, если для каждого ненулевого $x \in V$ найдется $y \in V$ такой, что $\omega(x,y) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Каждая невырожденная кососимметрическая форма записывается в некотором базисе как

$$\begin{pmatrix} \omega = \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Если обозначить соответствующий базис в V^* как $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$, форма ω будет записана в виде $\omega = \sum_i x_i \wedge y_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Ориентация на n-мерном векторном пространстве есть ненулевой вектор в $\Lambda^n V$. **Ориентация** на n-мерном многообразии есть нигде не зануляющаяся n-форма.

ЗАМЕЧАНИЕ: Симплектическое пространство всегда ориентировано. Действительно, $\omega^n = n! x_1 \wedge y_1 \wedge x_2 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge y_n$.

Симплектические многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – многообразие. Дифференциальная форма $\omega \in \Lambda^2 M$ называется **симплектической**, если она невырождена в каждой точке, и замкнута.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Диффеоморфизм $\varphi: M \longrightarrow M'$ симплектических многообразий (M, ω) и (M', ω') называется **симплектоморфизмом**, если $\varphi^* \omega' = \omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Симплектическая геометрия изучает симплектические многообразия с точностью до симплектоморфизма.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симплектический шар радиуса r есть шар радиуса r в $\mathbb{R}^2 n$ с симплектической структурой, которая индуцирована формой $\omega = \sum_i dx_i \wedge dy_i$ на $\mathbb{R}^n$ (x_i, y_i – координаты).

ТЕОРЕМА: (Теорема Дарбу): Симплектическое многообразие локально симплектоморфно симплектическому шару (в окрестности каждой своей точки).

Симплектическая емкость

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплектическая емкость** (по Экланду-Хоферу) есть функционал cap, который ставит каждому симплектическому многообразию (M,ω) число $\operatorname{cap}(M,\omega)$, удовлетворяющее следующим условиям.

1. Монотонность. Если существует симплектическое вложение $(M,\omega) \hookrightarrow (M',\omega')$, то $\operatorname{cap}(M,\omega) \leqslant \operatorname{cap}(M',\omega')$.

2. Конформная инвариантность. $\operatorname{cap}(M,\omega) = \lambda^{-2}\operatorname{cap}(M,\lambda\omega)$.

3. Нетривиальность. $0 < \operatorname{cap}(B_r,\omega) < \infty$, где (B_r,ω) – симплектический шар.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,ω) – симплектическая емкость, а r – супремум радиусов всех симплектических шаров той же размерности, которые симплектоморфно вкладываются в M. Число $\operatorname{cap}_G(M,\omega) := \pi r^2$ называется **симплектической емкостью Громова** многообразия M.

Симплектическая емкость по Громову

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплектический объем** симплектического многообразия (M, ω) размерности $2n$ есть интеграл $\int_M \omega^n$.

ЗАДАЧА: Докажите, что при $n = 1$, **любые два симплектических многообразия одинакового симплектического объема, гомеоморфных диску, являются симплектоморфными.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Нетривиальность емкости Громова следует из того, что симплектический объем многообразия ограничивает сверху симплектический объем шара, который туда вкладывается.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплектический цилиндр** есть $\mathbb{R}^{2n} \times B_r$, где $\mathbb{R}^{2n}$ снабжено обычной симплектической формой $dx \wedge dy$, а B_r – симплектический шар радиуса r в $\mathbb{R}^2$.

ТЕОРЕМА: **(Громов)**
Симплектическая емкость симплектического цилиндра равна πr^2

ЗАМЕЧАНИЕ: Получается, что объем цилиндра бесконечный, а его симплектическая емкость конечна.

Теорема Экланда-Хофера

ТЕОРЕМА: (Экланд-Хофер)
Диффеоморфизм симплектических многообразий, сохраняющий ориентацию, **является симплектоморфизмом тогда и только тогда, когда он сохраняет громовскую емкость** всех подмножеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Эллипсоид в векторном пространстве V есть множество точек вида $\{v \in V \mid q(v,v) < C\}$, где q – положительно определенное скалярное произведение.

Теорема Экланда-Хофера выводится из ее линейного аналога.

ТЕОРЕМА: (Экланд-Хофер, линейная версия)
Пусть V, ω – симплектическое пространство, а $\varphi : V \longrightarrow V$ сохраняет ориентацию и симплектическую емкость всех эллипсоидов. **Тогда φ сохраняет симплектическую форму.**

Будет доказана в конце этой лекции.

Открыто-компактная топология

План дальнейших действий:

0. Определить топологию на отображениях и на подмножествах.

1. Вывести Экланда-Хофера из линейной версии.

2. Доказать линейную версию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\varphi_i: \ M \longrightarrow M$ – последовательность отображений метрических пространств, $\varphi: \ M \longrightarrow M$ отображение, причем для каждого компакта $K \subset M$, имеем $\lim_i \sup_{x\in K} d(\varphi(x), \varphi_i(x)) = 0$. В такой ситуации говорится, что φ_i **сходится к φ в открыто-компактной топологии.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Открыто-компактная топология на пространстве отображений **не зависит от выбора метрики на топологическом пространстве M (докажите это!)**

Метрика Хаусдорфа

Определение: Пусть M – метрическое пространство. **ε-окрестность** $Z \subset M$ - объединение всех ε-шаров с центрами в Z. Обозначим ее за $Z(\varepsilon)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика Хаусдорфа на компактных подмножествах метрического пространства определяется так: $d_H(X,Y)$ есть инфимум всех ε таких, что $X(\varepsilon) \supset Y$ и $Y(\varepsilon) \supset X$

Свойства метрики Хаусдорфа

1. Пусть M – топологическое пространство. Тогда **топология Хаусдорфа** на компактных подмножествах M, заданная метрикой Хаусдорфа, **не зависит от выбора метрики на M.**

2. Если $\varphi_i: M \longrightarrow M$ – последовательность отображений, сходящихся к φ в открыто-компактной топологии, а $K \subset M$ компакт, то **$\varphi_i(K)$ сходится к $\varphi(K)$ в топологии Хаусдорфа.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Довольно часто удобно рассматривать "метрику Хаусдорфа" на множестве открытых подмножеств, замыкания которых компактны. **Это на самом деле полуметрика** (два открытых множества с одинаковым замыканием отстоят друг от друга на расстояние 0).

Симплектическая емкость и метрика Хаусдорфа

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть U_i – последовательность выпуклых, ограниченных открытых подмножеств $\mathbb{R}^{2n}$, содержащих 0, а U – их предел в метрике Хаусдорфа. **Тогда $\lim_i \operatorname{cap}_G(U_i) = \operatorname{cap}_G(U)$.**

Доказательство: Для каждого $\varepsilon > 0$, почти все элементы последовательности $\{U_i\}$ содержатся в $(1+\varepsilon)U$ и содержат $(1-\varepsilon)U$. В такой ситуации

$$\sqrt{1-\varepsilon}\operatorname{cap}_G(U) \leqslant \operatorname{cap}_G(U_i) \leqslant \sqrt{1+\varepsilon}\operatorname{cap}_G(U).$$

■

Сейчас я выведу теорему Экланда-Хофера из ее линейной версии.

ТЕОРЕМА: **(Экланд-Хофер)**
Диффеоморфизм симплектических многообразий, сохраняющий ориентацию, **является симплектоморфизмом тогда и только тогда, когда он сохраняет громовскую емкость** всех подмножеств.

ТЕОРЕМА: **(Экланд-Хофер, линейная версия)**
Пусть V, ω – симплектическое пространство, а $\varphi: V \longrightarrow V$ сохраняет ориентацию и симплектическую емкость всех эллипсоидов. **Тогда φ сохраняет симплектическую форму.**

Теорема Экланда-Хофера: доказательство

ТЕОРЕМА: (Экланд-Хофер)
Диффеоморфизм симплектических многообразий, сохраняющий ориентацию, **является симплектоморфизмом тогда и только тогда, когда он сохраняет громовскую емкость** всех подмножеств.

Локально любое симплектическое многообразие изоморфно симплектическому шару (Дарбу). Поэтому достаточно доказать следующую более слабую форму теоремы

ТЕОРЕМА: Пусть $(B, \omega) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ вложение, локально являющееся ориентированным диффеоморфизмом, из симплектического шара в $\mathbb{R}^{2n}$ с обычной симплектической формой, переводящее 0 в 0, и сохраняющее громовские симплектические емкости cap_G выпуклых подмножеств. **Тогда φ сохраняет симплектическую форму.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\lambda > 1$, а $\Gamma_\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – гомотетия, переводящая v в λv. В силу конформной инвариантности cap_G, **диффеоморфизм $\varphi_\lambda : B \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, переводящий $\varphi_\lambda(v) = \Gamma_\lambda(\varphi(\Gamma_\lambda^{-1}(v)))$ сохраняет громовские симплектические емкости.**

Теорема Экланда-Хофера: окончание доказательства

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\lambda > 1$, а $\Gamma_\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – гомотетия, переводящая v в λv. В силу конформной инвариантности cap_G, **диффеоморфизм $\varphi_\lambda : B \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, переводящий $\varphi_\lambda(v) = \Gamma_\lambda(\varphi(\Gamma_\lambda^{-1}(v)))$ сохраняет громовские симплектические емкости.**

Шаг 2: Для любого диффеоморфизма $(B, \omega) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ и любого эллипсоида $E \subset B$, **найдется такое $\lambda_0 > 0$, что $\varphi_\lambda(E)$ выпуклый для любого $\lambda > \lambda_0$.**

Шаг 3: В открытозамкнутой топологии, предел $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \varphi_\lambda$ равен дифференциалу $\mathfrak{D} := D_0\varphi$. Для каждого эллипсоида $E \subset B$, имеем $\mathfrak{D}(E) = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \varphi_\lambda(E)$ (в топологии, заданной метрикой Хаусдорфа). Для больших λ, множество $\varphi_\lambda(E)$ выпукло, а на выпуклых множествах cap_G непрерывна в топологии, заданной метрикой Хаусдорфа. **Поэтому**

$$\operatorname{cap}_G(\mathfrak{D}(E)) = \operatorname{cap}_G(\varphi_\lambda(E)) = \operatorname{cap}_G(E),$$

то есть $\mathfrak{D}$ сохраняет симплектическую емкость.

Шаг 3: В силу линейной версии теоремы Экланда-Хофера, $\mathfrak{D} = D_0\varphi$ – симплектоморфизм. ■

Симплектические гомеоморфизмы

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $\varphi: B \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ – вложение, локально являющееся ориентированным диффеоморфизмом. Предположим к тому же, что φ сохраняет симплектическую емкость каждого эллипсоида, образ которого выпуклый. Тогда φ сохраняет симплектическую форму.

ТЕОРЕМА: **(Элиашберг-Экланд-Хофер)** Пусть (M, ω) – симплектическое многообразие. **Тогда группа симплектоморфизмов M замкнута в открыто-компактной топологии в группе диффеоморфизмов.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно доказать следующее, более слабое утверждение: Пусть $\varphi_i: B \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ – последовательность симплектических вложений, сходящихся к гладкому вложению $\varphi: B \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Тогда φ сохраняет симплектические емкости эллипсоидов, образ которых выпуклый. На таких эллипсоидах симплектическая емкость непрерывна, а значит $\operatorname{cap}_G \varphi(E) = \operatorname{cap}_G \lim_i \varphi_i(E) = \operatorname{cap}_G E$. ■

УПРАЖНЕНИЕ: **Найти дыру в этом аргументе, и заделать ее.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплектический гомеоморфизм** есть гомеоморфизм симплектических многообразий, сохраняющий симплектическую емкость.

Симплектические эллипсоиды

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $V = \mathbb{R}^{2n}$, g положительно определенная билинейная форма на V, а ω невырожденная кососимметрическая. Тогда существует g-ортонормированный базис v_i в V такой, что

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega = \begin{matrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & \alpha_n \\ -\alpha_n & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

иначе говоря, $\omega = \sum_i \alpha_i x_i \wedge y_i$, где $x_1, y_1, x_2, y_2, ...$ двойственный базис, а $0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant ... \leqslant \alpha_n$. положительные вещественные числа, не зависящие от выбора базиса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $A := g^{-1}\omega$, то есть $g(Ax, y) = \omega(x, y)$. **Матрица A кососимметрична: $g(Ax, y) = \omega(x, y) = -\omega(y, x) = -g(Ay, x) = -g(x, Ay)$.** Кососимметричная матрица имеет в каком-то базисе вид (*), что следует, например, из классификации движений евклидова пространства. ■

Симплектические эллипсоиды (другое доказательство)

Шаг 2: Значит, $g(A^2x, y) = g(x, A^2y)$, то есть A^2 симметрична. Поскольку $g(A^2x, x) = -g(Ax, Ax)$, **эта матрица отрицательно определена.**

Шаг 3: Обозначим за g_A скалярное произведение $x, y \longrightarrow -g(A^2x, y)$, и пусть $\{x_i\}$ – базис, в котором и g и g_A обе ортогональны, и $g(x_i, x_i) = 1$, $g_A(x_i, x_i) = b_i$. **Такой базис существует и определен однозначно с точностью до отображения, которое является изометрией относительно g и g_A.**

Шаг 4: Поскольку $g(Ax_i, Ax_j) = b_i\delta_{ij}$, а $g_A(Ax_i, Ax_j) = -b_i^2\delta_{ij}$, вектора $b_i^{-1/2}Ax_i$ тоже ортогональны относительно g и g_A. Для всех i, выберем в качестве x_{2i} вектор $b_{2i-1}^{-1/2}Ax_{2i-1}$. В таком базисе A записывается как

$$A = \begin{pmatrix} \omega = \begin{matrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & \alpha_n \\ -\alpha_n & 0 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i = b_{2i-1}^{1/2}$. ■

Нормальная форма эллипсоида

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (V, ω) – симплектическое векторное пространство. **Симплектический базис** есть базис $\{x_i, y_i\}$, такой, что $\omega = \sum x_i^* \wedge y_i^*$, где $x_i^*, y_i^* \in V^*$ – двойственный базис.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Нормальная форма эллипсоида E в симплектическом пространстве V** это $E = \{v = \sum a_i x_i + b_i y_i \mid \sum_i (a_i^2 + b_i^2)\alpha_i < 1\}$, где $\{x_i, y_i\}$ – симплектический базис.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для любого эллипсоида в симплектическом пространстве **найдется симплектический базис, в котором эллипсоид записывается в нормальной форме,** причем числа α_i определены однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Действительно, пусть x_i', y_i' – ортонормированный базис, в котором ω записывается матрицей (*), а $E = \{v \in V \mid g(v,v) < 1\}$. Тогда $x_i = x_i' \alpha_i^{-1/2}, y_i = y_i' \alpha_i^{-1/2}$ – симплектический базис, а E записывается в нем как $\{v = \sum a_i x_i + b_i y_i \mid \sum_i (a_i^2 + b_i^2)\alpha_i < 1\}$. ■

Симплектические эллипсоиды и емкость

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть E – эллипсоид в симплектическом пространстве, записанный в нормальной форме, а α_1 – наименьшее из чисел α_i. **Тогда $\operatorname{cap}_G(E) = \pi\alpha_1^{-1}$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим симплектический цилиндр Cyl, полученный как произведение диска $\{ax_1+by_1 \mid a^2+b^2 \leqslant \alpha_1^{-1}\}$ и векторного пространства $\langle x_2, y_2, x_3, y_3, ...\rangle$. Тогда $\mathrm{Cyl} \supset E \supset B_r$, где B_r – шар радиуса $r := \alpha_1^{-1/2}$. **По теореме Громова, $\operatorname{cap}_G(\mathrm{Cyl}) = \operatorname{cap}_G(B_r) = \pi\alpha_1^{-1}$. В силу монотонности cap_G, емкость E такая же.** ■

Симплектические цилиндры и емкость

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (V, ω) – симплектическое пространство, а $W \subset V$ – двумерное симплектическое подпространство. Обозначим за $W^{\perp\omega}$ ортогональное дополнение относительно симплектической формы. **Цилиндр** $\mathsf{Cyl}_E \subset (V, \omega)$ есть произведение $\mathsf{Cyl}_E := E \times W^{\perp\omega}$ эллипсоида $E \subset W$ и $W^{\perp\omega}$. Мы рассматриваем Cyl_E как симплектический цилиндр в V.

Следующее утверждение сразу вытекает из результата о симплектической емкости эллипсоида, доказанного выше.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $\varphi : V \longrightarrow W$ – обратимое линейное отображение симплектических пространств, сохраняющее симплектические емкости эллипсоидов. **Тогда φ сохраняет симплектические емкости цилиндров.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Цилиндр $\mathsf{Cyl}_E := \{ax_1 + by_1 \ \mid \ a^2 + b^2 \leqslant r\}$ может быть получен как объединение возрастающего семейства эллипсоидов

$$E_\alpha = \{v = \sum a_i x_i + b_i y_i \ \mid \ a_1^2 + b_1^2 + \sum_{i=2}^{\infty} \alpha(a_i^2 + b_i^2) < r\}, \alpha \longrightarrow \infty$$

одинаковой емкости. Образы этих эллипсоидов имеют ту же самую емкость. ■

Кокасательное пространство

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z := T^*M$ есть тотальное пространство кокасательного расслоения, $(\xi, m) \in Z$ его точка, с $m \in M$, а $\xi \in T^*_m M$. Рассмотрим проекцию $Z \xrightarrow{\pi} M$, и пусть θ – 1-форма на T^*M, которая переводит $v \in T_{(\xi,m)}M$ в $\langle \xi, D_\pi(v)\rangle$. Эта форма называется **гамильтонова 1-форма**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Локально в координатах гамильтонова 1-форма записывается следующим образом. Пусть $q_1, ..., q_n$ – координаты на $V = \mathbb{R}^n = M$. Отождествив слои проекции с V^*, получим координаты p_i, q_i на T^*M; здесь p_i – двойственный базис к q_i. В этих координатах, $\theta = \sum_i p_i dq_i$. **значит, $d\theta = \sum_i dp_i \wedge dq_i$ симплектична.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Форма $d\theta$ на T^*M называется **гамильтонова симплектическая форма на кокасательном пространстве**.

Лжецилиндры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $W \subset V$ – подпространство в симплектическом пространстве, а $W^{\perp\omega}$ – его ортогонал. Подпространство W называется **изотропным**, если $W \subset W^{\perp\omega}$, и **коизотропным**, если $W \supset W^{\perp\omega}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу невырожденности ω, $\dim W + \dim W^{\perp\omega} = \dim V$. Поэтому изотропные пространства имеют размерность $\leqslant \frac{1}{2}\dim V$, а коизотропные $\geqslant \frac{1}{2}\dim V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $W_1 \subset V$ – коизотропное подпространство коразмерности 2, $W \subset V$ дополнительное к нему двумерное подпространство, а $E_0 \subset W$ эллипсоид. Произведение $W_1 \times E_0 \subset V$ называется **лжецилиндром**.

ТЕОРЕМА: **Лжецилиндр симплектоморфен $\mathbb{R}^{2n}$ с обычной симплектической структурой.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Из этой теоремы следует, что **лжецилиндр не может быть симплектоморфен цилиндру.** Действительно, его симплектическая емкость бесконечна.

Лжецилиндры (продолжение)

ТЕОРЕМА: Лжецилиндр $Z := W_1 \times E_0 \subset V$ симплектоморфен $\mathbb{R}^{2n}$ с обычной симплектической структурой.

Доказательство. Шаг 1: Выберем симплектический базис в V таким образом, что $W_1 = \langle x_1, x_2, x_3, y_3, x_4, y_4, ...\rangle$. Проектируя E на $\langle y_1, y_2\rangle$ вдоль W_1, получим эллипсоид в $\langle y_1, y_2\rangle$. Поэтому можно считать, что $E \subset \langle y_1, y_2\rangle$. Это дает $Z = \langle x_1, x_2\rangle \times E \times \langle x_3, y_3, x_4, y_4, ...\rangle$. Поэтому **достаточно доказать, что лжецилиндр $Z = \langle x_1, x_2\rangle \times E$ изоморфен $\mathbb{R}^4$ с обычной симплектической структурой.**

Шаг 2: Рассмотрим проекцию $Z \longrightarrow E$ вдоль $\langle x_1, x_2\rangle$. Форма ω отождествляет слои этой проекции с $T^*E = \langle y_1, y_2\rangle$. **Значит, Z симплектоморфно T^*E с гамильтоновой симплектической структурой.** Поскольку E диффеоморфно $\mathbb{R}^2$, Z симплектоморфно $T^*\mathbb{R}^2$. ■

Доказательство линейной версии Экланда-Хофера

СЛЕДСТВИЕ: Пусть V, ω – симплектическое пространство, а $\varphi: V \longrightarrow V$ сохраняет симплектическую емкость всех эллипсоидов. **Тогда φ переводит коизотропные пространства коразмерности 2 в коизотропные.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $Z \subset V$ – цилиндр или лжецилиндр, $Z = W \times E$. Подпространство W можно реконструировать из E следующим образом: это совокупность всех векторов $v \in V$ таких, что $\lambda v \in Z$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. Оно коизотропно тогда и только тогда, когда Z лжецилиндр. **Поскольку φ сохраняет емкость цилиндров (которая конечна), φ переводит цилиндры в цилиндры и лжецилиндры в лжецилиндры.**
■

Теперь линейная версия Экланда-Хофера следует из такой леммы

ЛЕММА: Пусть V, ω – симплектическое пространство, а $\varphi: V \longrightarrow V$ переводит коизотропные пространства коразмерности 2 в коизотропные. **Тогда φ умножает симплектическую форму на константу.**

Коизотроплые подпространства и симплектичность

ЛЕММА: Пусть V, ω – симплектическое пространство, а $\varphi : V \longrightarrow V$ переводит коизотропные пространства коразмерности 2 в коизотропные. **Тогда φ умножает симплектическую форму на константу.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим биекцию, переводящую гиперплоскость $W \subset V$ коразмерности 2 в ее аннулятор $\operatorname{Ann}(W) \subset V^*$ (размерности 2). Легко видеть, что W коизотропно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ann}(W)$ изотропно. Поэтому $\varphi^* : V \longrightarrow V$ сохраняет двумерные изотропные плоскости. Мы свели лемму к следующей.

ЛЕММА: Пусть V – векторное пространство, ω_1, ω_2 – симплектические формы, причем любая 2-мерная плоскость изотропна в ω_1 тогда и только тогда, когда она изотропна в ω_2. **Тогда ω_1, ω_2 пропорциональны.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В условиях леммы, $\omega_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow \omega_2(x, y) = 0$. Домножив одну из форм на константу, получим $\omega_1(a, b) = \omega_2(a, b) \neq 0$ для каких-то a, b. Тогда $\omega_1(a, c) = \omega_2(a, c)$ для любого c (иначе $\omega_1(a, c - tb)$ будет равно нулю, для подходящего $t \in \mathbb{R}$, а $\omega_2(a, c)$ не будет). Применив этот аргумент второй раз, получим $\omega_1(c, c') = \omega_2(c, c')$ для любых $c, c' \in V$.

■