Симплектическая емкость

лекция 3

Миша Вербицкий

27 июля 2013

Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия"
24 - 31 августа, 2013, ЯГПУ, Ярославль, Россия

Симплектические многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кососимметрическая 2-форма ω на векторном пространстве V называется **невырожденной**, или **симплектической**, если для каждого ненулевого $x \in V$ найдется $y \in V$ такой, что $\omega(x, y) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Каждая невырожденная кососимметрическая форма записывается в некотором базисе как

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & 0 & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если обозначить соответствующий базис в V^* как $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$, форма ω будет записана в виде $\omega = \sum_i x_i \wedge y_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Ориентация** на n-мерном векторном пространстве есть ненулевой вектор в $\Lambda^n V$. **Ориентация** на n-мерном многообразии есть нигде не зануляющаяся n-форма.

ЗАМЕЧАНИЕ: Симплектическое пространство всегда ориентировано. Действительно, $\omega^n = n! x_1 \wedge y_1 \wedge x_2 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge y_n$.

Симплектические многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – многообразие. Дифференциальная форма $\omega \in \Lambda^2 M$ называется **симплектической**, если она невырождена в каждой точке, и замкнута.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Диффеоморфизм $\varphi: M \longrightarrow M'$ симплектических многообразий (M, ω) и (M', ω') называется **симплектоморфизмом**, если $\varphi^* \omega' = \omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Симплектическая геометрия изучает симплектические многообразия с точностью до симплектоморфизма.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симплектический шар радиуса r есть шар радиуса r в $\mathbb{R}^{2n}$ с симплектической структурой, которая индуцирована формой $\omega = \sum_i dx_i \wedge dy_i$ на $\mathbb{R}^n$ (x_i, y_i – координаты).

ТЕОРЕМА: (Теорема Дарбу): Симплектическое многообразие локально симплектоморфно симплектическому шару (в окрестности каждой своей точки).

Симплектическая емкость

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, ω) – симплектическая емкость, а r – супремум радиусов всех симплектических шаров той же размерности, которые симплектоморфно вкладываются в M. Число $\operatorname{cap}_G(M, \omega) := \pi r^2$ называется **симплектической емкостью Громова** многообразия M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплектический цилиндр** есть $\mathbb{R}^{2n} \times B_r$, где $\mathbb{R}^{2n}$ снабжено обычной симплектической формой $dx \wedge dy$, а B_r – симплектический шар радиуса r в $\mathbb{R}^2$.

ТЕОРЕМА: **(Громов)**
Симплектическая емкость симплектического цилиндра равна πr^2

Будет доказана сегодня.

Комплексные структуры на векторном пространстве

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексной структурой** на вещественном векторном пространстве V называется эндоморфизм $I \in \operatorname{End}(V)$, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Продолжим I на тензоры формулой $I(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma ...) = I(\alpha) \otimes I(\beta) \otimes I(\gamma)...$ **Группа, порожденная I, изоморфна $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.** Поэтому, для любого тензора t, сумма $t + I(t) + I^2(t) + I^3(t)$ инвариантна относительно I.

СЛЕДСТВИЕ: Если g – положительно определенное скалярное произведение на V, то $g_I := g + I(g) + I^2(g) + I^3(g)$ тоже положительно определено и I-инвариантно: $I(g_I) = I$. Другими словами, **I – ортогональный оператор относительно g_I.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Положительно определенное скалярное произведение, в котором I ортогонально, называется **эрмитовой метрикой** на (V, I). Мы только что доказали, что она всегда существует.

Комплексные структуры (продолжение)

СЛЕДСТВИЕ: Все собственные значения I простые (то есть I **полупрост**, другими словами, диагонализуется). В самом деле, **любой ортогональный оператор полупрост.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть α – собственное значение I. Поскольку $\alpha^2 = -1$, имеем $\alpha = \pm\sqrt{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Собственное пространство I, соответствующее $\sqrt{-1}$, обозначается $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, а соответствующее $-\sqrt{-1}$ обозначается $V^{0,1}$. Очевидно, $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку, к тому же, I вещественный, получаем, что $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$. В частности, это пространства одинаковой размерности.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что естественная проекция $V^{1,0}$ на V вдоль $V^{0,1}$ задает изоморфизм вещественных пространств $V^{1,0} arrow V$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что оператор комплексной структуры **однозначно задается подпространством $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ половинной размерности,** которое не пересекается с $V \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Эрмитовы формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово пространство** (V, I, g) есть пространство, снабженное комплексной структурой I и эрмитовой метрикой g.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть I – оператор комплексной структуры на вещественном пространстве V, а g – эрмитова метрика. Рассмотрим билинейную форму $\omega(x, y) = g(x, Iy)$. Тогда $\omega(x, y) = g(x, Iy) = g(Ix, I^2y) = -g(Ix, y) = -\omega(y, x)$. Поэтому ω **кососимметрична**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Форма ω называется **эрмитовой формой** на эрмитовом пространстве (V, I, g)

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что в тройке I, g, ω, **каждый тензор выражается через остальные два.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Почти комплексная структура** на многообразии есть оператор $I \in \operatorname{End} TM$ в эндоморфизмах касательного расслоения, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_{TM}$.

Почти комплексные многообразия

ПРИМЕР: Возьмем $\mathbb{C}^n$, с комплексными координатами $z_i = x_i + \sqrt{-1}\, y_i$. **Тогда $I(dx_i) = dy_i$, $I(dy_i) = -dx_i$ – почти комплексная структура.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексная структура **интегрируема**, если каждая точка M имеет окрестность U и вложение $U \hookrightarrow \mathbb{C}^n$, совместимое с комплексной структурой. Многообразие, снабженное интегрируемой почти комплексной структурой, называется **комплексным многообразием**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитова метрика** на почти комплексном многообразии M есть риманова структура $g \in \mathsf{Sym}^2 T^*M$, такая, что I ортогонален относительно g в каждой точке M.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для каждого I, **пространство эрмитовых метрик выпукло** в $\Gamma(Sym^2 T^*M)$.

СЛЕДСТВИЕ: Пространство почти комплексных структур на M **гомотопически эквивалентно пространству почти комплексных эрмитовых структур.**

Подмногообразия почти комплексных многообразий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,I) – почти комплексное многообразие, а $Z \subset M$ замкнутое подмногообразие (возможно, особое, но особенности должны иметь коразмерность $\geqslant 2$). Z называется **псевдоголоморфным**, или **почти комплексным**, если для каждой гладкой точки $z \in Z$, пространство $T_zZ \subset T_zM$ сохраняется комплексной структурой. Псевдоголоморфное подмногообразие комплексной размерности 1 называется **псевдоголоморфной кривой**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Подмногообразие комплексного многообразия является псевдогломорфным тогда и только тогда, когда его можно локально задать как множество общих нулей системы комплексно-аналитических уравнений. **В частности, их очень много**.

ФАКТ. У общего (неинтегрируемого) почти комплексного многообразия **нет никаких псевдоголоморфных подмногообразий, кроме кривых (даже локально).**

ФАКТ. Рассмотрим множество $\mathfrak{S}$ компактных почти комплексных подмногообразий (M,I), с топологией, заданной метрикой Хаусдорфа. **Тогда каждая компонента связности $\mathfrak{S}$ – локально конечномерное стратифицированное (особое) многообразие.**

Почти комплексные симплектические многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, ω) – симплектическое многообразие, а I – почти комплексная структура. Она **совместима с с симплектической структурой**, если $g(x, y) := \omega(Ix, y)$, для какой-то римановой формы g.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплектическое почти комплексное многообразие** есть многообразие (M, ω, I), снабженное симплектической формой и совместимой с ней комплексной структурой.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M, ω) многообразие, снабженное невырожденной кососимметрической 2-формой. **Тогда пространство C совместимых с ω почти комплексных структур стягиваемо.**

Пространство почти комплексных структур, совместимых с ω

УТВЕРЖДЕНИЕ 1: Пусть (M,ω) многообразие, снабженное невырожденной кососимметрической 2-формой. **Тогда пространство C совместимых с ω почти комплексных структур стягиваемо.**

Доказательство. Шаг 1: Отождествим C с пространством метрик g таких, что $g^{-1}\omega$ – почти комплексная структура, совместимая с ω. Пространство R римановых метрик выпукло, следовательно, стягиваемо. Для доказательства стягиваемости $C \subset R$ **достаточно убедиться, что C – деформационный ретракт R.**

Шаг 2: Пусть $A := g^{-1}\omega$, то есть $g(Ax,y) = \omega(x,y)$. **Матрица A кососимметрична: $g(Ax,y) = \omega(x,y) = -\omega(y,x) = -g(Ay,x) = -g(x,Ay)$.** Кососимметричная матрица имеет в каком-то ортонормированном базисе вид

$$\omega = \begin{pmatrix} A = \begin{matrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & \alpha_n \\ -\alpha_n & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Пространство почти комплексных структур, совместимых с ω (окончание)

Шаг 2: Пусть $A := g^{-1}\omega$, то есть $g(Ax,y) = \omega(x,y)$. **Матрица A кососимметрична: $g(Ax,y) = \omega(x,y) = -\omega(y,x) = -g(Ay,x) = -g(x,Ay)$.** Значит, $g(A^2x,y) = g(x,A^2y)$, то есть A^2 симметрична. Поскольку $g(A^2x,x) = -g(Ax,Ax)$, **эта матрица отрицательно определена. Мы получили, что матрица $B_t := e^{-\frac{t}{2}\log(-A^2)}$ корректно определена, симметрична, и непрерывно зависит от t и A.**

Шаг 3: Оператор AB_1 записывается в тех же координатах в виде

$$\begin{pmatrix} \omega = \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

то есть задает почти комплексную структуру. Поскольку $\omega(AB_1x,y) = g(B_1x,y)$, а B_1 симметрична, **эта почти комплексная структура совместима с ω.**

Шаг 4: $g,t \longrightarrow g(B_tx,y)$ при $t=1$ дает метрику $g(B_1\cdot,\cdot) \in C$, а при $t=0$ дает g. **Таким образом C получается как деформационный ретракт R.** ■

Калибрации на многообразии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – риманово многообразие, а $\eta \in \Lambda^k M$ – замкнутая форма. Она называется **калибрацией**, если для любого ортонормированного набора векторов $v_1, ..., v_k \in T_x M$, имеем $|\eta(v_1, v_2, ..., v_k)| \leqslant 1$. k-мерное подпространство $W \subset T_x M$ называется **фасадом** калибрации, если для какого-то ортонормального базиса $v_1, ..., v_k \in W \subset T_x$, имеем $\eta(v_1, v_2, ..., v_k) = 1$.

ПРИМЕР: Пусть (M, I, ω) – почти комплексное симплектическое многообразие. Для любых ортонормальных векторов $x, y \in T_x M$, имеем $\omega(x, y) = g(Ix, y)$. Поскольку матрица I унитарна, имеем $|g(Ix, y)| = |\cos(\alpha)|$, где α есть угол между Ix и y. **Значит, ω это калибрация.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Плоскость $W \subset T_x M$ является фасадом тогда и только тогда, когда для какого-то ортонормированного базиса $v, w \in W$, имеем $I(v) = \pm w$. Это равносильно тому, что W – комплексное подпространство. Мы получили, что **фасады калибрации ω суть комплексные подпространства**.

Калиброванные подмногообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, g) – риманово многообразие, $\eta \in \Lambda^k M$ калибрация, а $Z \subset M$ ориентированное подмногообразие. Оно называется **калиброванным**, если $T_z Z \subset T_z M$ – фасад калибрации для любой точки $z \in Z$.

ПРИМЕР: Поскольку фасады симплектической калибрации суть комплексные порпространства, **калиброванные подмногообразия в (M, I, ω) это псевдоголоморфные кривые**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Зафиксируем гладкие многообразия Z, M. **Пространство $\operatorname{Imm}(Z, M)$ иммерсий $Z \longrightarrow M$ является бесконечным многообразием ("многообразием Фреше").**

Минимальные подмногообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\varphi(Z) \subset M$ – гладкое, компактное подмногообразие, которое получается как образ вложения $\varphi: Z \longrightarrow M$. Рассмотрим риманов объем $\operatorname{Vol}(\varphi(Z))$ как функцию на $\operatorname{Imm}(Z, M)$. Подмногообразие $\varphi(Z) \subset M$ называется **минимальным**, если φ – точка локального минимума для $\operatorname{Vol}: \operatorname{Imm}(Z, M) \longrightarrow \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА: **Калиброванные подмногообразия минимальны.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть Z_t – семейство подмногообразий, параметризованное $t \in \mathbb{R}$, а $Z = Z_0$ – калиброванное. Обозначим за Vol форму риманова объема на Z_t. Тогда $\int_{Z_t} \eta \leqslant \int_{Z_t} \operatorname{Vol}$, причем равенство имеет место только если Z_t калиброванное.

Из замкнутости η следует, что $\int_{Z_t} \eta = \mathrm{const}$ (теорема Стокса). С другой стороны,

$$\int_Z \operatorname{Vol} = \int_Z \eta = \int_{Z_t} \eta \leqslant \operatorname{Vol}(Z_t).$$

Поэтому Z минимально. ■

Симплектическая емкость и псевдоголоморфные кривые

ТЕОРЕМА 2: Пусть $M = \mathbb{C}P^1 \times T^{2n}$ – произведение $\mathbb{C}P^1$ и тора, снабженное стандартной симплектической структурой, а J – согласованная почти комплексная структура. **Тогда для каждой точки $x \in M$ найдется псевдоголоморфная кривая S, гомологичная $\mathbb{C}P^1 \times \{m\}$, и проходящая через x.**

Из этой теоремы выводится теорема Громова.

ТЕОРЕМА: (Громов)
Симплектическая емкость симплектического цилиндра Cyl_1 радиуса 1 равна π.

Доказательство теоремы Громова

ТЕОРЕМА: (Громов)
Симплектическая емкость симплектического цилиндра Cyl_1 радиуса 1 равна π.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $f_1: B_r \longrightarrow \mathrm{Cyl}_1$ – симплектическое вложение, $r > 1$, а I – обычная (плоская) почти комплексная структура на $B_r \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Рассмотрим $M = \mathbb{C}P^1 \times T^{2n}$ – произведение $\mathbb{C}P^1$ и тора, снабженное стандартной симплектической структурой, и пусть $f_2: \mathrm{Cyl}_1 \longrightarrow \mathbb{C}P^1 \times T^{2n}$ симплектическое отображение, которое переводит $\mathrm{Cyl}_1 = \Delta \times \mathbb{R}^{2n}$ в $\mathbb{C}P^1 \times T^{2n}$, факторизуя по $\mathbb{Z}^{2n}$, и симплектоморфно отображая диск Δ в $\mathbb{C} = \mathbb{C}P^1 \backslash \infty$.

Шаг 2: Выберем решетку $\mathbb{Z}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$ таким образом, что ее фундаментальная область содержит $f_1(B_r)$. Тогда помпозиция $f_1 \circ f_2$ дает симплектическое вложение $B_r \longrightarrow M = \mathbb{C}P^1 \times T^{2n}$. Значит, **теорема Громова о симплектической емкости выводится из следующего результата.**

ТЕОРЕМА: Пусть $M = \mathbb{C}P^1 \times T^{2n}$ – произведение $\mathbb{C}P^1$ и тора, снабженное стандартной симплектической структурой, с симплектическим объемом $\mathbb{C}P^1$, равным π, а $\varphi: B_r \longrightarrow M$ – симплектическое вложение. Тогда $r \leqslant 1$.

Доказательство теоремы Громова (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть $M = \mathbb{C}P^1 \times T^{2n}$ – произведение $\mathbb{C}P^1$ и тора, снабженное стандартной симплектической структурой, с симплектическим объемом $\mathbb{C}P^1$, равным π, а $\varphi: \ B_r \longrightarrow M$ – симплектическое отображение. Тогда $r \leqslant 1$.

Доказательство. Шаг 1: Выберем плоскую комплексную структуру и эрмитову метрику на B_r. Обозначим за g_0 соответствующую эрмитову метрику на $\varphi(B_r)$. Тогда g_0 можно продолжить до римановой метрики g_1 на M такой, что $g_0 = g_1$ в шаре $\varphi(B_{r-\varepsilon})$, где $r - \varepsilon > 1$. Операция $g_1(\cdot,\cdot) \longrightarrow g_1(B_1\cdot,\cdot)$, построенная при доказательстве Утверждения 1, дает метрику g, совместимую с симплектической структурой на M, и совпадающую с g_0 в шаре $\varphi(B_{r-\varepsilon})$ Заменив шар B_r на $B_{r-\varepsilon}$, мы получаем следующее утверждение. **Достаточно доказать утверждение теоремы в следующем предположении. Существует совместимая почти комплексная структура на M такая, что ее ограничение на $\varphi(B_r)$ дает обычную комплексную структуру на $B_r \subset \mathbb{C}^{n+1}$.**

Доказательство теоремы Громова (окончание)

ТЕОРЕМА: (в предположениях Шага 1)
Пусть $M = \mathbb{C}P^1 \times T^{2n}$ – произведение $\mathbb{C}P^1$ и тора, снабженное стандартной симплектической структурой, с симплектическим объемом $\mathbb{C}P^1$, равным π, а $\varphi: B_r \longrightarrow M$ – симплектическое отображение. **Пусть существует совместимая почти комплексная структура на M такая, что ее ограничение на $\varphi(B_r)$ дает обычную комплексную структуру на $B_r \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Тогда $r \leqslant 1$.**

Шаг 2: Пусть $x \in M$ образ центра B_r, а $S \subset M$ псевдоголоморфная кривая, существование которой утверждается в теореме 2, $S \ni x$. Тогда $\pi = \int_S \omega_M \geqslant \int_{\varphi^{-1}(S)} \omega$, где ω_M есть симплектическая форма на M, а ω – симплектическая форма на B_r. Поскольку S псевдоголоморфно, $\int_{\varphi^{-1}(S)} \omega_{B_r}$ – риманов объем ее пересечения с $\varphi(B_r)$.

Шаг 3: Мы получили замкнутую комплексную кривую $D := \varphi^{-1}(S)$ в шаре B_r с плоской метрикой и комплексной структурой, проходящую через 0, риманов объем которой $\leqslant \pi$. **Применив гомотетию, получим собственный диск в шаре B радиуса 1, проходящий через 0, и площади $< \pi$.** Несуществование такого диска для $r > 1$ выводится из следующего утверждения.

Комплексные кривые в единичном шаре

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $D \subset B_1$ – замкнутый комплексный диск в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$, проходящий через 0, и гладкий на его границе. Тогда $\int_D \omega \geqslant \pi$.

Выведем его из "формулы монотонности".

ЛЕММА: (формула монотонности) Пусть (B_1, η) – единичный шар в $\mathbb{R}^n$, снабженный плоской метрикой и калибрацией, а $\Delta \subset B$ – калиброванный диск, проходящий через 0, и замкнутый в B (вложенный с границей таким образом, что $\partial\Delta$ попадает в ∂B_1). **Обозначим за Δ_t пересечение Δ с шаром радиуса t. Тогда функция $t \longrightarrow t^{-2}\operatorname{Vol}(\Delta_t)$ неубывающая.**

Очевидно, $\lim\limits_{t\to 0}\operatorname{Vol}(\Delta_t) = \pi t^2$ (в очень большом увеличении, гладкий диск становится плоским). **Лемма о монотонности дает $\operatorname{Vol}\Delta \geqslant \pi$.**

Доказательство формулы монотонности. Шаг 1: Пусть $C(\partial\Delta) \subset B_1$ – конус, натянутый на границу Δ. Тогда

$$\operatorname{Vol} C(\partial\Delta) \geqslant \int_{C(\partial\Delta)} \eta = \int_\Delta \eta = \operatorname{Vol}\Delta$$

(первое из равенств следует из теоремы Стокса, ибо граница Δ совпадает с границей $C(\partial\Delta)$.)

Формула монотонности

ЛЕММА: (формула монотонности) Пусть (B_1, η) – единичный шар в $\mathbb{R}^n$, снабженный плоской метрикой и калибрацией, а $\Delta \subset B$ – калиброванный диск, проходящий через 0, и замкнутый в B (вложенный с границей таким образом, что $\partial\Delta$ попадает в ∂B_1). **Обозначим за Δ_t пересечение Δ с шаром радиуса t. Тогда функция $t \longrightarrow t^{-2}\operatorname{Vol}(\Delta_t)$ неубывающая.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $C(\partial\Delta) \subset B_1$ – конус, натянутый на границу Δ. Тогда

$$\operatorname{Vol} C(\partial\Delta) \geqslant \int_{C(\partial\Delta)} \eta = \int_\Delta \eta = \operatorname{Vol}\Delta$$

(первое из равенств следует из теоремы Стокса, ибо граница Δ совпадает с границей $C(\partial\Delta)$.)

Шаг 2: Формула для площади конуса дает $\operatorname{Vol} C(\partial\Delta) = \frac{1}{2} l(\partial\Delta)$, где $l(\partial\Delta)$ – длина границы $\partial\Delta$. Значит, $\operatorname{Vol}\Delta \leqslant \frac{1}{2} l(\partial\Delta)$.

Шаг 3: То же рассуждение, примененное к Δ_t, дает $t^{-2}\operatorname{Vol}\Delta_t \leqslant \frac{1}{2t} l(\partial\Delta_t)$. С другой стороны, $\frac{d}{dt}\operatorname{Vol}\Delta_t \geqslant l(\partial\Delta_t)$.

Шаг 4: Обозначим за $f(t)$ функцию $t \longrightarrow \operatorname{Vol}\Delta_t$. Утверждение шага 3 дает $f(t) \leqslant \frac{t}{2} f'(t)$. Тогда

$$\frac{d}{dt} t^{-2} f(t) = t^{-2} f'(t) - 2t^{-3} f(t) \geqslant t^{-2} f'(t) - t^{-2} f'(t) = 0.$$

■