Теорема Ратнер

лекция 1: решетки в группах Ли

Миша Вербицкий

26 июля 2014

Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия IV"
24 - 31 июля, 2014, ЯГПУ, Ярославль, Россия

Группы Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа Ли** есть гладкое многообразие, снабженное групповой структурой, таким образом, что групповые операции $x, y \longrightarrow xy$ и $x \longrightarrow x^{-1}$ суть гладкие отображения.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Непрерывная группа** есть топологическое многообразие, снабженное групповой структурой таким образом, что групповые операции $x, y \longrightarrow xy$ и $x \longrightarrow x^{-1}$ непрерывны. Непрерывные группы допускают гладкую структуру (5-я проблема Гильберта, решенная Глизоном, Монтгомери, Зиппиным и Ямабе, 1952-1953; **очень трудная**).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Левая **мера Хаара** есть гладкая мера на группе Ли, инвариантная относительно левых сдвигов $L_x(g) = xg$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Правые сдвиги коммутируют с левыми,** соответственно, переводят меру Хаара в меру Хаара (возможно, другую).

Унимодулярные группы

ТЕОРЕМА: **Мера Хаара существует, и единственна с точностью до постоянного множителя.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Гладкие меры суть формы объема на касательном расслоении. Если задана форма объема ν на T_eG, то **форма объема ν_x на T_xG получается из формулы $\nu_x = L^*_{x^{-1}}\nu$.** Это дает существование левоинвариантной меры. Единственность следует из того, что выбор ν однозначен с точностью до константы: $\nu \in \Lambda^{\dim G} T_eG = \mathbb{R}$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа Ли называется **унимодулярной**, если ее левая мера Хаара μ инвариантна относительно правых сдвигов.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть μ есть левая мера Хаара. Отображение $x \xrightarrow{\chi} \frac{R_x^*\mu}{\mu}$ задает гомоморфизм из G в мультипликативную группу $\mathbb{R}^{>0}$. В частности, **любая группа G такая, что $G = [G, G]$ унимодулярна.**

ПРИМЕР: **Группа аффинных преобразований $\mathbb{R}^2$ не унимодулярна (докажите это)!**

Решетки в группах Ли

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть G – группа Ли, $\Gamma \subset G$ – дискретная подгруппа, а $\Gamma\backslash G$ – фактор по левому действию Γ. **Докажите, что $\Gamma\backslash G$ есть гладкое, хаусдорфово многообразие.**

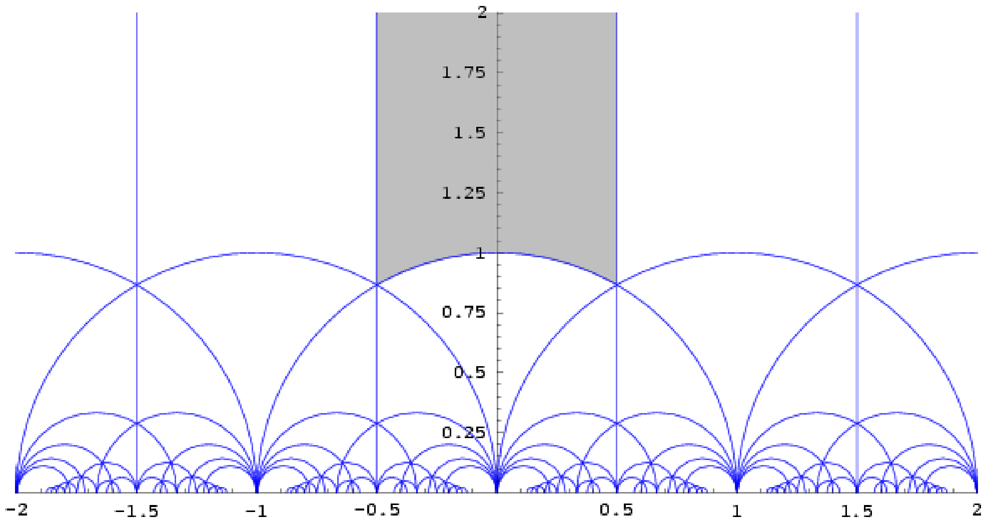
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: В этих условиях, возьмем левую меру Хаара μ на G. Поскольку отображение $\pi: \ G \longrightarrow \Gamma\backslash G$ – накрытие, у каждой точки есть окрестность U, диффеоморфная шару, такая, что $\pi^{-1}(U) = \Gamma \cdot U$ есть объединение $|\Gamma|$ шаров, диффеоморфных U. Определим **меру Хаара** μ_Γ на $\Gamma\backslash G$ формулой $\mu_\Gamma(U) = \mu(U_1)$, где U_1 есть любой из связных прообразов U, при условии, что U_1 диффеоморфен U.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это то же самое, что **определить μ_Γ дифференциальной формой η такой, что $\pi^*\eta$ есть форма объема меры Хаара.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\Gamma \subset G$ – дискретная подгруппа группы G. Она называется **решеткой**, если $\mu_\Gamma(\Gamma\backslash G) < \infty$, то есть фактор G по Γ имеет конечную меру Хаара.

Фундаментальная область

ЗАМЕЧАНИЕ: $\Gamma\subset G$ **является решеткой** $\Leftrightarrow$ **фундаментальная область ее действия на** G **имеет конечный объем.**



Фундаментальная область группы $SL(2,\mathbb{Z})$ действующей на верхней полуплоскости дробно-линейными преобразованиями.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из этой картинки следует, что $SL(2,\mathbb{Z})$ **есть решетка в** $SL(2,\mathbb{R})$**.** Действительно, фундаментальная область Ω действия $\Gamma := SL(2,\mathbb{Z})$ в плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2 = SL(2,\mathbb{R})/S^1$, нарисованная на картинке, имеет конечный объем. Из этого следует, что фундаментальная область Γ на $SL(2,\mathbb{R})$ (расслоенная над Ω со слоем S^1) тоже имеет конечный объем.

Теорема Бореля и Хариш-Чандры

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть G – группа Ли, содержащая решетку. **Тогда G унимодулярна.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: **$x \in G$ действует справа на $\Gamma\backslash G$ и умножает меру Хаара на константу $\chi(x)$.** С другой стороны, $(R_x\mu_\Gamma)(\Gamma\backslash G) = \chi(x)\mu_\Gamma(\Gamma\backslash G)$. Поскольку объем многообразия инвариантен относительно диффеоморфизмов, $\chi(x) = 1$. ∎

ТЕОРЕМА: **(Борель и Хариш-Чандра)**
Пусть $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ группа Ли, заданная набором полиномиальных уравнений с рациональными коэффициентами. Предположим, что не существует нетривиальных гомоморфизмов из G в $GL(1,\mathbb{R})$, определенных полиномами с рациональными коэффициентами. **Тогда группа $G_{\mathbb{Z}} = G \cap SL(n,\mathbb{Z})$ является решеткой в G.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Я не буду доказывать теорему Бореля и Хариш-Чандры, но все ее применения, полученные в этих лекциях, вытекают из одного частного случая $SL(2,\mathbb{Z}) \subset SL(2,\mathbb{R})$, и конечность объема в этом случае можно проверить непосредственно.

Арифметические решетки и теорема Маргулиса об арифметизации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $G \subset GL(n)$ – подгруппа, заданная системой полиномиальных уравнений над $k = \mathbb{R}$ или $k = \mathbb{C}$. Тогда G называется **алгебраической группой**. Дискретные подгруппы $\Gamma, \Gamma' \subset G$ называются **соизмеримыми**, если $\Gamma \cap \Gamma'$ имеет конечный индекс в Γ и в Γ'. **Арифметическая решетка** в алгебраической группе G есть решетка, которая соизмерима с $G \cap GL(n, \mathbb{Z})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – полупростая группа Ли. Ее **подгруппа Картана** есть максимальная абелева подгруппа H, нормализатор которой имеет размерность $\dim H$. Ее **вещественный ранг** есть размерность фактора H по максимальному компактному подтору.

ТЕОРЕМА: (теорема Маргулиса об арифметизации) Пусть $\Gamma \subset G$ – решетка в простой алгебраической группе Ли G, с вещественным рангом > 2. **Тогда Γ сопряжена арифметической решетке.**

Гиперболическое пространство

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $p, q > 0$. **Докажите, что $SO(p,q)$ имеет ровно две компоненты связности.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связная компонента $SO(p,q)$ обозначается $SO^+(p,q)$.

ПРИМЕР: Группа $SO^+(1,n)$ имеет ранг 1. Группа $SU(1,n)$ имеет ранг 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гиперболическое пространство**, или же **пространство постоянной отрицательной кривизны** $\mathbb{H}^n$ есть $SO^+(1,n)/SO(n)$, снабженное $SO^+(1,n)$-инвариантной римановой метрикой.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $x \in G/H$. Тогда G-инвариантные метрики на G/H находятся в биективном соответствии с H-инвариантными метриками на T_xG/H. В частности, **для компактного H, G-инвариантные метрики на G/H всегда существуют.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **$SO(n)$-инвариантная метрика на $\mathbb{R}^n$ единственна с точностью до константы.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **группа ориентированных изометрий $\mathbb{H}^n$ есть $SO^+(1,n)$.**

Гиперболические многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Гиперболическое многообразие есть фактор $\mathbb{H}^n$ по дискретной подгруппе Γ, действующей на $\mathbb{H}^n$ ориентированными изометриями, и с фундаментальной областью Ω конечного объема.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это **равносильно существованию полной метрики постоянной, отрицательной секционной кривизны и конечного объема.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Фундаментальная группа Γ гиперболического многообразия $\mathbb{H}^n/\Gamma$ является решеткой в $\operatorname{Iso}(\mathbb{H}^n) = SO^+(1,n)$. Действительно, **фундаментальная область для Γ в $SO^+(1,n)$ расслоена над Ω со слоем $SO(n)$, и имеет конечный объем по теореме Фубини.**

Неарифметические решетки

ПРИМЕР: Каждое 2-мерное ориентированное многообразие рода $g>1$ допускает гиперболическую метрику, которая единственна в каждом конформном классе. Размерность пространства таких метрик равна $6g-6$. Соответствующие подгруппы в $SO^+(1,2)=PSL(2,\mathbb{R})$ называются **фуксовыми**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Фуксовы подгруппы, вообще говоря, **не сопряжены арифметическим.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Действительно, подгруппа в G, сопряженная арифметическим, имеет (максимум) $\dim G$-мерное семейство непрерывных деформаций, а фуксовы группы деформируются в $6g-6$-мерном семействе. ■

ТЕОРЕМА: (Перельман: геометризация многообразий Хакена) 3-мерное, компакное многообразие M **допускает гиперболическую метрику тогда и только тогда, когда $\pi_1(M)$ бесконечно, $\pi_2(M)=0$, и для любого двумерного тора $T^2\subset M$, соответствующее отображение фундаментальных групп $\pi_1(T^2)\longrightarrow\pi_1(M)$ не инъективно.**

Разложение Жордана-Шевалле

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Матрица $g \in GL(n)$ называется **унипотентной**, если все ее собственные значения равны 1, и **полупростой**, если она диагонализуема.

УПРАЖНЕНИЕ: (Жорданова нормальная форма)
Докажите, что **любая матрица $g \in GL(n)$ допускает разложение вида $g = su$, где s полупроста, u унипотентна, а $su = us$.** Докажите, что такое разложение единственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Это разложение называется **разложением Жордана-Шевалле**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $G \subset GL(n)$ – алгебраическая группа. Ее элемент называется **полупростым**, если его образ в $GL(n)$ полупрост, и **унипотентнным**, если он унипотентен.

ТЕОРЕМА: (Шевалле)
Пусть $G \subset GL(n)$ – алгебраическая группа, $g \in G$, а $g = su$ – разложение Жордана-Шевалле. **Тогда s, u лежат в G, и это разложение функториально относительно гомоморфизмов алгебраических групп.** ■

Группы, порожденные унипотентами

ПРИМЕР: Компактная группа не содержит нетривиальных унипотентов, потому что каждый элемент компактной группы полупрост.

ПРИМЕР: Группа $GL(1,k)$ не содержит нетривиальных унипотентов, для $k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. В частности, группа $SO^+(1,1) = GL(1,\mathbb{R})$ не содержит унипотентов

ПРИМЕР: $SL(2,\mathbb{R})$ порождена унипотентами **(проверьте это)**.

ПРИМЕР: $SO^+(2,1) = PSL(2,\mathbb{R})$ порождена унипотентами в силу функториальности.

ПРИМЕР: Группы $SL(n,\mathbb{R})$ и $SO^+(p,q)$, $p > q > 0$ порождены своими подгруппами вида $SL(2,\mathbb{R})$ и $SO^+(2,1)$, поэтому порождены унипотентами.

ТЕОРЕМА: Пусть G – простая алгебраическая группа, содержащая унипотент. **Тогда G порождена унипотентами.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Подгруппа G, порожденная унипотентами, всегда нормальна. ■

Теорема Ратнер о замыкании орбит

ТЕОРЕМА: (гипотеза Рагунатана)
Пусть G – группа Ли, $H \subset G$ – подгруппа, порожденная унипотентами, а $\Gamma \subset G$ – решетка. Рассмотрим действие H на G/Γ левыми сдвигами. и пусть $H \cdot x$ – орбита H в G/Γ. **Тогда существует подгруппа S в G, содержащая H, и такая, что замыкание орбиты $H \cdot x$ равно $S \cdot x$.** Более того, S порождена унипотентами, а группа

$$\Gamma_S := \mathrm{St}_\Gamma(S \cdot x) = \{\gamma \in \Gamma \ \mid \ (S \cdot x)\gamma = S \cdot x\} = S \cap \Gamma^x$$

это решетка в S (здесь $\mathrm{St}_\Gamma(S \cdot x)$ обозначает стабилизатор орбиты $S \cdot x$ в Γ при правом действии Γ на G).

Марина Ратнер (1979).

Квадратичные формы и представимость

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V – векторное пространство, а $q \in \mathrm{Sym}^2(V^*)$ – билинейная симметрическая форма на V. Тогда отображение $v \longrightarrow q(v,v)$ называется **квадратичной формой** на V.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Квадратичная форма q на $\mathbb{R}^n$ **представляет число λ**, если $q(v)=\lambda$ для какого-то $v \in \mathbb{Z}^n$.

ТЕОРЕМА: (Лагранж) **Любое положительное целое число представлено формой $x^2+y^2+z^2+t^2$.**

ТЕОРЕМА: (290-theorem; Bhargava, Hanke)
Пусть q – квадратичная форма с целыми коэффициентами, представляющая числа 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 34, 35, 37, 42, 58, 93, 110, 145, 203, 290. **Тогда q представляет все положительные целые числа.**

Гипотеза Оппенхейма

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Мы говорим, что квадратичная форма q на $\mathbb{R}^n$ **иррациональна**, если q не пропорциональна форма с рациональными коэффициентами.

ТЕОРЕМА: (Оппенхейм, 1929; доказана Г. Маргулисом, 1987) Пусть q – иррациональная квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, сигнатуры (m, n), где $m, n > 0$, а S – множество чисел, представленных q. **Тогда S плотно в $\mathbb{R}$.**

Доказательство в лекции 2.