Теорема Ратнер

лекция 2: гипотеза Оппенхейма

Миша Вербицкий

28 июля 2014

Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия IV"
24 - 31 июля, 2014, ЯГПУ, Ярославль, Россия

Группы Ли (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа Ли** есть гладкое многообразие, снабженное групповой структурой, таким образом, что групповые операции $x, y \longrightarrow xy$ и $x \longrightarrow x^{-1}$ суть гладкие отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Левая **мера Хаара** есть гладкая мера на группе Ли, инвариантная относительно левых сдвигов $L_x(g) = xg$.

ТЕОРЕМА: **Мера Хаара существует, и единственна с точностью до постоянного множителя.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\Gamma \subset G$ – дискретная подгруппа группы G. Она называется **решеткой**, если $\mu_\Gamma(\Gamma \backslash G) < \infty$, то есть фактор G по Γ имеет конечную меру Хаара.

Теорема Бореля и Хариш-Чандры (повторение)

ТЕОРЕМА: (Борель и Хариш-Чандра)
Пусть $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ группа Ли, заданная набором полиномиальных уравнений с рациональными коэффициентами. Предположим, что не существует нетривиальных гомоморфизмов из G в $GL(1, \mathbb{R})$, определенных полиномами с рациональными коэффициентами. **Тогда группа $G_{\mathbb{Z}} = G \cap SL(n, \mathbb{Z})$ является решеткой в G.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Я не буду доказывать теорему Бореля и Хариш-Чандры, но все ее применения, полученные в этих лекциях, вытекают из одного частного случая $SL(2, \mathbb{Z}) \subset SL(2, \mathbb{R})$, и конечность объема в этом случае можно проверить непосредственно.

Разложение Жордана-Шевалле (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $G \subset GL(n)$ – подгруппа, заданная системой полиномиальных уравнений над $k = \mathbb{R}$ или $k = \mathbb{C}$. Тогда G называется **алгебраической группой**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Матрица $g \in GL(n)$ называется **унипотентной**, если все ее собственные значения равны 1, и **полупростой**, если она диагонализуема над алгебраическим замыканием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Любая матрица $g \in GL(n)$ допускает разложение вида $g = su$, где s полупроста, u унипотентна, а $su = us$.** Это разложение называется **разложением Жордана-Шевалле**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $G \subset GL(n)$ – алгебраическая группа. Ее элемент называется **полупростым**, если его образ в $GL(n)$ полупрост, и **унипотентнным**, если он унипотентен.

ТЕОРЕМА: **(Шевалле)**
Пусть $G \subset GL(n)$ – алгебраическая группа, $g \in G$, а $g = su$ – разложение Жордана-Шевалле. **Тогда s, u лежат в G, и это разложение единственно и функториально относительно гомоморфизмов алгебраических групп.** ■

Теорема Ратнер о замыкании орбит (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть G – простая алгебраическая группа, содержащая унипотент. **Тогда G порождена унипотентами.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Подгруппа G, порожденная унипотентами, всегда нормальна. ■

ТЕОРЕМА: **(теорема Ратнер о замыкании орбит)**
Пусть G – группа Ли, $H \subset G$ – подгруппа, порожденная унипотентами, а $\Gamma \subset G$ – решетка. Рассмотрим действие H на G/Γ левыми сдвигами. и пусть $H \cdot x$ – орбита H в G/Γ. **Тогда существует подгруппа S в G, содержащая H, и такая, что замыкание орбиты $H \cdot x$ равно $S \cdot x$.** Более того, S порождена унипотентами, а группа

$$\Gamma_S := \operatorname{St}_\Gamma(S \cdot x) = \{\gamma \in \Gamma \ \mid \ (S \cdot x)\gamma = S \cdot x\} = S \cap \Gamma^x$$

это решетка в S (здесь $\operatorname{St}_\Gamma(S \cdot x)$ обозначает стабилизатор орбиты $S \cdot x$ в Γ при правом действии Γ на G).

Гипотеза Оппенхейма (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V – векторное пространство, а $q \in \operatorname{Sym}^2(V^*)$ – билинейная симметрическая форма на V. Тогда отображение $v \longrightarrow q(v,v)$ называется **квадратичной формой** на V.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Квадратичная форма q на $\mathbb{R}^n$ **представляет число** λ, если $q(v) = \lambda$ для какого-то $v \in \mathbb{Z}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Мы говорим, что квадратичная форма q на $\mathbb{R}^n$ **иррациональна**, если q не пропорциональна форма с рациональными коэффициентами.

ТЕОРЕМА: (Оппенхейм, 1929; доказана Г. Маргулисом, 1987) Пусть q – иррациональная квадратичная форма на $\mathbb{R}^{m+n}$, $m+n > 2$, сигнатуры (m,n), где $m,n > 0$, а S – множество чисел, представленных q. **Тогда S плотно в $\mathbb{R}$.**

Доказательство в середине лекции.

Подгруппы между $SO^+(p,q)$ и $SL(p+q)$

Теорема 1: Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$, снабженное невырожденной квадратичной формой, а $\mathrm{Sym}^2_0(V)$ – пространство бесследовых симметрических матриц. **Тогда $\mathrm{Sym}^2_0(V)$ неприводимо как представление $SO(V)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Fulton W., Harris J. Теория представлений. Первый курс. ■

Лемма 1: Пусть $H = SO^+(p,q)$, $G = SL(p+q,\mathbb{R})$, а $S \subset G$ – связная группа, содержащая H. **Тогда $S = H$ либо $S = G$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ – соответствующие алгебры Ли. Достаточно доказать, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{s}$ либо $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}$. Пусть $v \in \mathfrak{s}$ – вектор, ортогональный $\mathfrak{h}$ относительно скалярного произведения $x, y \longrightarrow \mathrm{Tr}(xy)$. Отождествляя $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(V)$ с $\Lambda^2(V)$, мы получаем, что ортогональное дополнение в $\mathfrak{sl}(V)$ k $\mathfrak{so}(V)$ есть пространство бесследовых симметрических матриц: $v \in \mathrm{Sym}^2_0(V)$. По теореме 1, **$\mathrm{Sym}^2_0(V)$ – неприводимое представление $\mathfrak{h}$.** Значит, $\mathfrak{h}(v) + \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. ■

Топология Зариского

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть k – поле. **Алгебраическое подмногообразие** в k^n есть множество общих нулей полиномиальной системы уравнений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Топология Зариского** на алгебраическом подмногообразии в k^n – такая топология, где открытые множества суть дополнения к алгебраическим подмногообразиям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z \subset M$ – подмножество алгебраического многообразие. **Замыкание Зариского** $\overline{Z}_{\mathsf{Zar}}$ есть пересечение всех алгебраических подмногообразий в M, содержащих Z.

ЗАМЕЧАНИЕ: Замыкание Зариского есть множестви общих нулей всех полиномов, зануляющихся на Z.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть G – алгебраическая группа, $\Gamma \subset G$ ее подгруппа. Тогда **замыкание Зариского $\overline{\Gamma}_{\mathsf{Zar}}$ – тоже подгруппа.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Групповые операции непрерывны в топологии Зариского, а замыкание подгруппы в топологической группе – всегда подгруппа. Действительно, замыкание подгруппы есть множество всех ее предельных точек, но непрерывное отображение переводит предельные точки в предельные точки. ■

Теорема Бореля о плотности

ТЕОРЕМА: (Теорема Бореля о плотности)
Пусть $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ – связная алгебраическая подгруппа, $\Gamma \subset G$ – решетка в G, а $\overline{\Gamma}_{\mathsf{Zar}}$ ее замыкание Зариского. **Тогда $\overline{\Gamma}_{\mathsf{Zar}}$ – подгруппа, содержащая все унипотентные элементы G.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. лекция 3.

СЛЕДСТВИЕ: Если G порождена унипотентами, $\Gamma \subset G$ – решетка в ней, то Γ Зариски плотна в G. ■

Решетки и иррациональные квадратичные формы

Лемма 2: Пусть $V=\mathbb{R}^n, n\geqslant 3$ – пространство, снабженное квадратичной формой h сигнатуры $(p,q), q>0, p>0$, $p+q>2$, а $\Gamma := G\cap GL(n,\mathbb{Z})$ – решетка в $G=SO^+(h)$. **Тогда q не иррациональна.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку h имеет сигнатуру $(p,q), q>0, p>0$, $p+q>2$, она порождена унипотентами. По теореме Бореля о плотности, $\overline{\Gamma}_{\mathsf{Zar}}=G$.

Шаг 2: По теореме 1, $(\mathsf{Sym}^2 V^*)^G = \mathbb{R}h$ (инварианты ортогональной группы $SO^+(h)$ на симметрических 2-формах порождены h). Поскольку Γ Зариски плотна в G, **прямая $\mathbb{R}\cdot h$ задается системой линейных уравнений $g(v)=v$, $g\in\Gamma$ с целыми коэффициентами.** Значит, эта прямая рациональна. ■

Теорема Ратнер и иррациональные квадратичные формы

Лемма 3: Пусть q – квадратичная форма на $\mathbb{R}^{m+n}$, сигнатуры (m, n), где $m, n > 0$, $m + n > 2$, $G = SL(n + m)$, $\Gamma = SL(m + n, \mathbb{Z})$, а $H = SO^+(q) \subset G$. **Если q иррациональна, то орбита $H \cdot e$ плотна в G/Γ, в противном случае – замкнута.**

Доказательство. Шаг 1: По теореме Ратнер, $\overline{H \cdot e} = S \cdot e$, где S есть группа Ли, $H \subset S \subset G$.

Шаг 2: Любая связная подгруппа S, такая, что $H \subset S \subset G$, равна H либо G (Лемма 1).

Шаг 3: Получаем, что **замкнутые орбиты соответствуют подгруппам $H \subset G$ таким, что $H \cap \Gamma$ есть решетка в H, а незамкнутые плотны.**

Шаг 4: Если q иррациональна, $H \cap \Gamma$ не может быть решеткой (Лемма 2). Значит, **$H \cdot x$ плотно $\Leftrightarrow$ q иррациональна.** ■

Доказательство гипотезы Оппенхейма

ТЕОРЕМА: (гипотеза Оппенхейма, 1929)
Пусть q – иррациональная квадратичная форма на $V = \mathbb{R}^{m+n}$, $m+n > 2$, сигнатуры (m,n), где $m,n > 0$, а S – множество чисел, представленных q. **Тогда S плотно в $\mathbb{R}$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $G = SL(n+m)$, а $H = SO^+(q) \subset G$. В силу Леммы 3, левая орбита $H \cdot e$ плотна в G/Γ. Легко видеть, что это равносильно плотности правой орбиты $e \cdot \Gamma$ в левом факторе $H\backslash G$.

Шаг 2: Рассмотрим функцию $\mu: \ H\backslash G \longrightarrow \mathbb{R}$, переводящую g в $q(g(e_0))$, где $e_0 = (1,0,0,...,0)$. **Тогда $\mu(e \cdot \Gamma)$ есть множество всех чисел, которые представляются квадратичной формой q.**

Шаг 3: Поскольку $e \cdot \Gamma$ плотно в $H\backslash G$, $\mu(e \cdot \Gamma)$ плотно в $\mathbb{R}$. ■

Теория меры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебра подмножеств** пространства M есть набор подмножеств $\mathfrak{W} \subset 2^M$, замкнутый относительно объединений, пересечений и дополнений.

ПРИМЕР: Подмножество топологического пространства называется **борелевским**, если оно получено счетными объединениями, пересечениями и дополнениями из открытых множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathfrak{W} \subset 2^M$ – алгебра подмножеств пространства M. $\mathfrak{W}$ называется **σ-алгеброй**, если она замкнута относительно счетных объединений.

ПРИМЕР: Борелевские множества образуют сигма-алгебру.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Мера** на сигма-алгебре A есть счетно-аддитивная функция $\mu : A \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$. **Мера** на топологическом пространстве есть мера на его борелевской алгебре.

Теорема Пуанкаре о возвращении

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Мера μ на пространстве M называется **вероятностной**, если $\mu(M) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Подмножество $M_0 \subset M$ пространства (M, μ) с мерой называется **подмножеством полной меры**, если $\mu(M \backslash M_0) = 0$.

ТЕОРЕМА: (Пуанкаре о возвращении)
Пусть (M, μ) – топологическое пространство (метризуемое, со счетной базой) с вероятностной мерой, а $\varphi : \ M \longrightarrow M$ – гомеоморфизм, сохраняющий μ. Рассмотрим **множество возврата (recurrence set)** R точек $x \in M$ таких, что для какой-то последовательности $\{m_i\}$ натуральных чисел, стремящихся к бесконечности, имеем $\lim_i \varphi^{m_i}(x) = x$. **Тогда R – подмножество полной меры.**

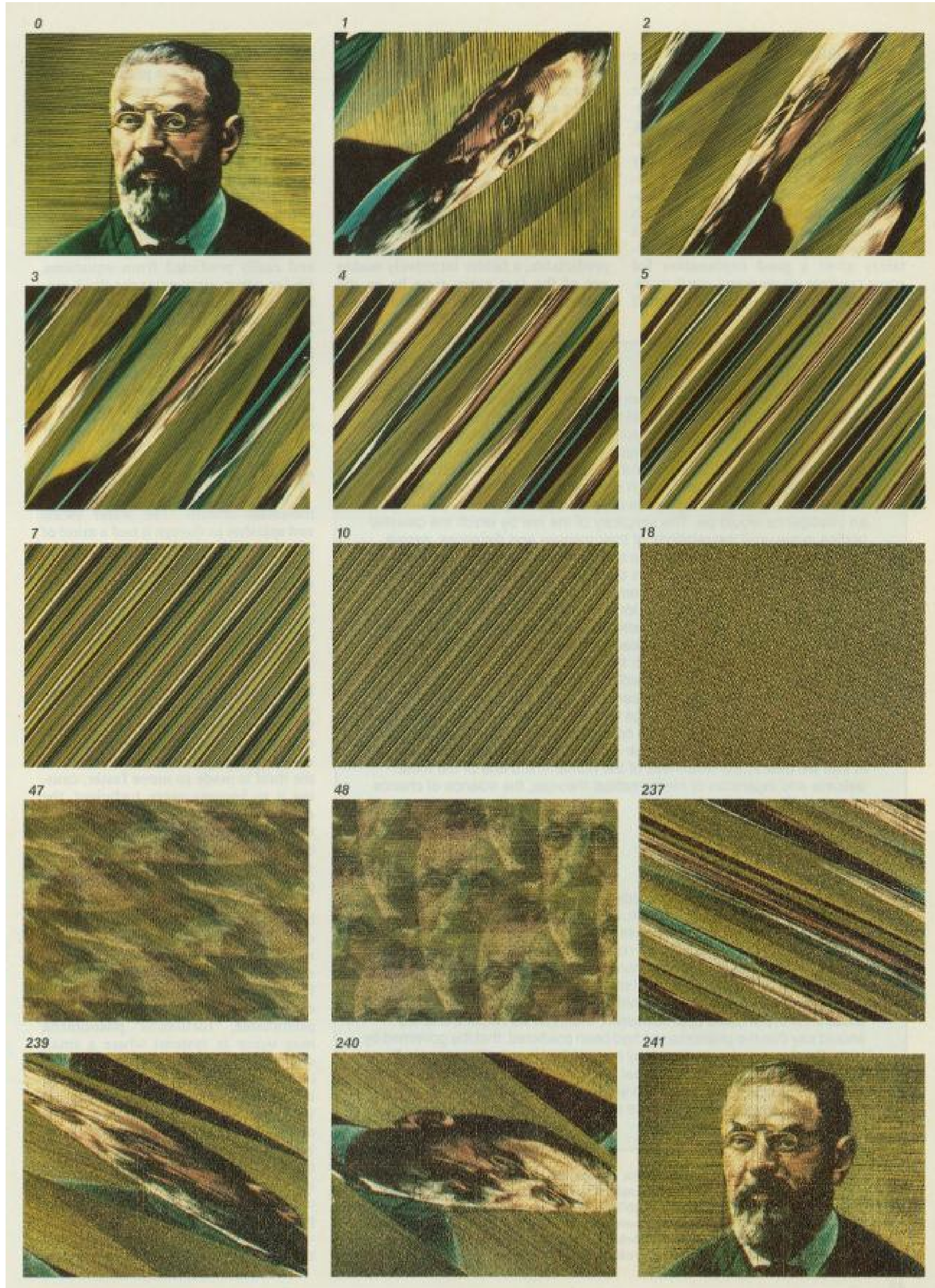
Теорема Пуанкаре о возвращении (доказательство)

ТЕОРЕМА: (Пуанкаре о возвращении)
Пусть (M, μ) – топологическое пространство (метризуемое, со счетной базой) с вероятностной мерой, а $\varphi : M \longrightarrow M$ – гомеоморфизм, сохраняющий μ. Рассмотрим **множество возврата (recurrence set)** R точек $x \in M$ таких, что для какой-то последовательности $\{m_i\}$ натуральных чисел, стремящихся к бесконечности, имеем $\lim_i \varphi^{m_i}(x) = x$. **Тогда R – подмножество полной меры.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть A_ε – множество всех x таких, что пересечение ε-шара с центром в x с орбитой $\{\varphi(x), \varphi^2(x), \varphi^3(x), ...\}$ пусто ("множество ε-невозвращения"). Поскольку $M \backslash R = \bigcup A_\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, **достаточно убедиться, что A_ε — множество меры нуль для всех $\varepsilon > 0$.**

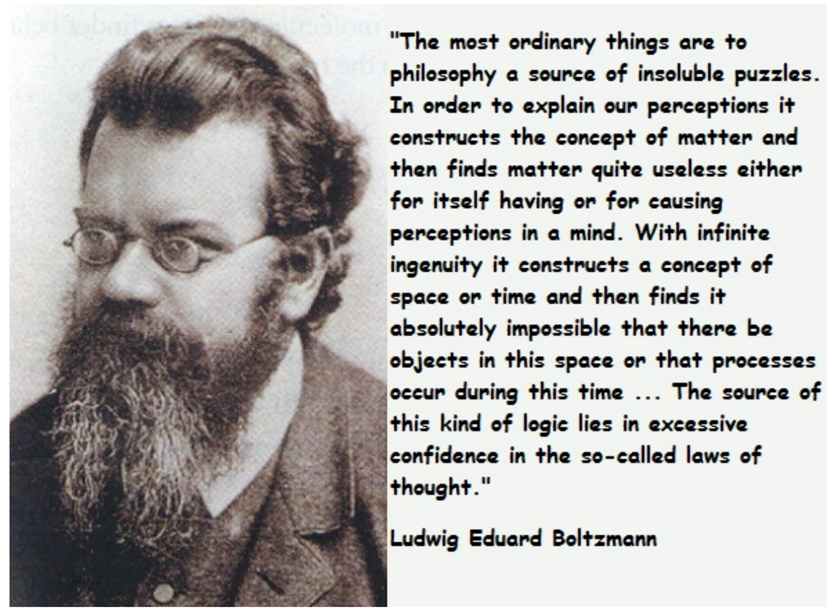
Шаг 2: Пусть A_ε – множество положительной меры. Возьмем $B \subset A_\varepsilon$ – множество диаметра ε и положительной меры. Поскольку $M \supset \bigcup_i \varphi^i(B)$ – множество конечной меры, **для каких-то $i \neq j$, имеем $\varphi^i(B) \cap \varphi^j(B) \neq 0$.**

Шаг 3: Коль скоро $\varphi^i(B) \cap \varphi^j(B)$ непусто, существует какой-то $x \in \varphi^{i-j}(B) \cap B$, а значит, **$x$ и $\varphi^{j-i}(x)$ лежат в множестве B диаметра ε.** Это влечет $d(x, \varphi^{i-j}(x)) < \varepsilon$, что невозможно, потому что $x \in A_\varepsilon$. ■


0
1
2
3
4
5
7
10
18
47
48
237
239
240
241

Тепловая смерть вселенной!

Jules Henri Poincaré
(1854 - 1912)



Ludwig Eduard Boltzmann
(1844 - 1906)

...I do not know if it has been remarked that the English kinetic theories can extricate themselves from this contradiction. The world, according to them, tends at first toward a state where it remains for a long time without apparent change; and this is consistent with experience; but it does not remain that way forever, if the theorem cited above is not violated; it merely stays there for an enormously long time, a time which is longer the more numerous are the molecules. This state will not be the final death of the universe, but a sort of slumber, from which it will awake after millions of millions of centuries. According to this theory, to see heat pass from a cold body to a warm one, it will not be necessary to have the acute vision, the intelligence, and dexterity of Maxwell's demon; it will suffice to have a little patience.

H. Poincare (1893) Le mécanisme et l'expérience.

Revue de Metaphysique et de Morale, 4, 534.

Тепловая смерть!

...One has the choice between two kinds of pictures. One can assume that the entire universe finds itself at present in a very improbable state. However, one may suppose that the aeons during which this improbable state lasts, and the distance from here to Sirius, are minute compared to the age and size of the universe. There must then be in the universe, which is in thermal equilibrium as a whole and therefore dead, here and there relatively small regions of the size of our galaxy (which we call worlds), which during the relatively short time of aeons deviate significantly from thermal equilibrium. Among these worlds the state probability increases as often as it decreases. For the universe as a whole the two directions of time are indistinguishable, just as in space there is no up and down. However, just as at a certain place on the earth we can call "down" the direction toward the centre of the earth, so a living being that finds itself in such a world at a certain period of time can define the time direction as going from less probable to more probable states (the former will be the "past", the latter the "future") and by virtue of this definition he will find that this small region, isolated from the rest of the universe, is "initially" always in an improbable state. This viewpoint seems to me the only way in which one can understand the validity of the Second Law and the heat death of each individual world, without invoking an unidirectional change of the entire universe from a definite initial state to final state...

L. Boltzmann (1897). Zu Hrn. Zermelo Abhandlung fiber die mechanische Erklarungen irreversible!' Vorgange. Wiedemann's Annalen, 60, 392-8.