Теорема Ратнер

лекция 3: эргодическая теория

Миша Вербицкий

31 июля 2014

Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия IV"
24 - 31 июля, 2014, ЯГПУ, Ярославль, Россия

Группы Ли (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа Ли** есть гладкое многообразие, снабженное групповой структурой, таким образом, что групповые операции $x, y \longrightarrow xy$ и $x \longrightarrow x^{-1}$ суть гладкие отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Левая **мера Хаара** есть гладкая мера на группе Ли, инвариантная относительно левых сдвигов $L_x(g) = xg$.

ТЕОРЕМА: **Мера Хаара существует, и единственна с точностью до постоянного множителя.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\Gamma \subset G$ – дискретная подгруппа группы G. Она называется **решеткой**, если $\mu_\Gamma(\Gamma\backslash G) < \infty$, то есть фактор G по Γ имеет конечную меру Хаара.

Разложение Жордана-Шевалле (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $G \subset GL(n)$ – подгруппа, заданная системой полиномиальных уравнений над $k = \mathbb{R}$ или $k = \mathbb{C}$. Тогда G называется **алгебраической группой**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Матрица $g \in GL(n)$ называется **унипотентной**, если все ее собственные значения равны 1, и **полупростой**, если она диагонализуема над алгебраическим замыканием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Любая матрица $g \in GL(n)$ допускает разложение вида $g = su$, где s полупроста, u унипотентна, а $su = us$.** Это разложение называется **разложением Жордана-Шевалле**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $G \subset GL(n)$ – алгебраическая группа. Ее элемент называется **полупростым**, если его образ в $GL(n)$ полупрост, и **унипотентнным**, если он унипотентен.

ТЕОРЕМА: **(Шевалле)**
Пусть $G \subset GL(n)$ – алгебраическая группа, $g \in G$, а $g = su$ – разложение Жордана-Шевалле. **Тогда s, u лежат в G, и это разложение единственно и функториально относительно гомоморфизмов алгебраических групп.** ■

Топология Зариского (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть k – поле. **Алгебраическое подмногообразие** в k^n есть множество общих нулей полиномиальной системы уравнений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Топология Зариского** на алгебраическом подмногообразии в k^n – такая топология, где открытые множества суть дополнения к алгебраическим подмногообразиям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z \subset M$ – подмножество алгебраического многообразие. **Замыкание Зариского** $\overline{Z}_{\mathsf{Zar}}$ есть пересечение всех алгебраических подмногообразий в M, содержащих Z.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Замыкание Зариского есть множестви общих нулей всех полиномов, зануляющихся на Z.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть G – алгебраическая группа, $\Gamma \subset G$ ее подгруппа. Тогда **замыкание Зариского $\overline{\Gamma}_{\mathsf{Zar}}$ – тоже подгруппа.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Групповые операции непрерывны в топологии Зариского, а замыкание подгруппы в топологической группе – всегда подгруппа. Действительно, замыкание подгруппы есть множество всех ее предельных точек, но непрерывное отображение переводит предельные точки в предельные точки. ■

Теория меры (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебра подмножеств** пространства M есть набор подмножеств $\mathfrak{W} \subset 2^M$, замкнутый относительно объединений, пересечений и дополнений.

ПРИМЕР: Подмножество топологического пространства называется **борелевским**, если оно получено счетными объединениями, пересечениями и дополнениями из открытых множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathfrak{W} \subset 2^M$ – алгебра подмножеств пространства M. $\mathfrak{W}$ называется **σ-алгеброй**, если она замкнута относительно счетных объединений.

ПРИМЕР: Борелевские множества образуют сигма-алгебру.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Мера** на сигма-алгебре A есть счетно-аддитивная функция $\mu: A \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$. **Мера** на топологическом пространстве есть мера на его борелевской алгебре.

Теорема Пуанкаре о возвращении (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Мера μ на пространстве M называется **вероятностной**, если $\mu(M) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Подмножество $M_0 \subset M$ пространства (M, μ) с мерой называется **подмножеством полной меры**, если $\mu(M \backslash M_0) = 0$.

ТЕОРЕМА: (Пуанкаре о возвращении)
Пусть (M, μ) – топологическое пространство (метризуемое, со счетной базой) с вероятностной мерой, а $\varphi: \ M \longrightarrow M$ – гомеоморфизм, сохраняющий μ. Рассмотрим **множество возврата (recurrence set)** R точек $x \in M$ таких, что для какой-то последовательности $\{m_i\}$ натуральных чисел, стремящихся к бесконечности, имеем $\lim_i \varphi^{m_i}(x) = x$. **Тогда R – подмножество полной меры.**

Меры, инвариантные относительно унипотентов

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $A \in GL(V)$ – унипотент. Рассмотрим его действие на проективизации $\mathbb{P}V$. **Докажите, что для любого $x \in \mathbb{P}V$, предел $\lim_i A^i(x)$ существует, и A-инвариантен.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Носитель** $\operatorname{supp}(\mu)$ меры μ на топологическом пространстве есть дополнение к объединению всех открытых множеств меры 0.

Следствие 1: Пусть $G \subset GL(V)$ – группа, порожденная унипотентами, а $\mu - G$-инвариантная мера на $\mathbb{P}V$. **Тогда носитель μ лежит в множестве G-инвариантных точек $\mathbb{P}V$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\varphi \in G$ – унипотент. В силу предыдущего упражнения, все точки в множестве возврата φ φ-инварианты. По теореме Пуанкаре, $\operatorname{supp}(\mu)$ содержится в множестве возврата φ.

Шаг 2: Поскольку G порождена унипотентами, а все точки $\operatorname{supp}(\mu)$ инвариантны относительно унипотентов, они G-инвариантны. ■

Теорема Шевалле

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Тензорное представление** $GL(V)$ есть прямая сумма нескольких копий $V^{\otimes i} \otimes (V^*)^{\otimes j}$ для какого-то набора i, j.

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Шевалле утверждает, что **алгебраическая группа целиком определяется своими проективными тензорными инвариантами.**

ТЕОРЕМА: **(теорема Шевалле)**
Пусть $G \subset GL(V)$ – алгебраическая группа. **Тогда существует тензорное представление W такое, что G равно стабилизатору какой-то точки $l \in \mathbb{P}W$.**

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим алгебру $\operatorname{Sym}^*(V \otimes V^*)$ полиномиальных функций на группе $GL(V)$, действующей на себе левыми сдвигами. Группа G задается общими нулями системы полиномиальных уравнений $P_1, P_2, ..., P_n \in \operatorname{Sym}^*(V \otimes V^*)$. Пусть $W_1 = \oplus_{i=0}^{d} \operatorname{Sym}^i(V \otimes V^*)$ – конечномерное подпространство, содержащее полиномы P_i, а $W_2 \subset W_1$ – все полиномы степени $\leqslant d$, зануляющиеся в G. **Тогда G есть максимальная подгруппа $GL(V)$, сохраняющая W_2.** Действительно, элемент $x \in GL(V)$, действующий на $GL(V)$ левыми сдвигами, сохраняет W_2 тогда и только тогда, когда его действие сохраняет общие нули W_2, то есть G, что равносильно $x \in G$.

Теорема Шевалле (продолжение)

ТЕОРЕМА: (теорема Шевалле)
Пусть $G \subset GL(V)$ – алгебраическая группа. **Тогда существует тензорное представление W такое, что G равно стабилизатору какой-то точки $l \in \mathbb{P}W$.**

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим алгебру $\operatorname{Sym}^*(V \otimes V^*)$ полиномиальных функций на группе $GL(V)$, действующей на себе левыми сдвигами. Группа G задается общими нулями системы полиномиальных уравнений $P_1, P_2, ..., P_n \in \operatorname{Sym}^*(V \otimes V^*)$. Пусть $W_1 = \oplus_{i=0}^d \operatorname{Sym}^i(V \otimes V^*)$ – конечномерное подпространство, содержащее полиномы P_i, а $W_2 \subset W_1$ – все полиномы степени $\leqslant d$, зануляющиеся в G. **Тогда G есть максимальная подгруппа $GL(V)$, сохраняющая W_2.**

Шаг 2: Пусть $W = \Lambda^r W_1$ – внешнее произведение степени $r = \dim W_2$, а $L \in \Lambda^r W_1$ – прямая $\Lambda^r W_2$. Легко видеть, что $W_2 = \{v \in W_1 \mid v \wedge L = 0\}$. Поэтому **$x \in GL(V)$ сохраняет L тогда и только тогда, когда x сохраняет W_2.**

Шаг 3: Рассмотрим проективизацию $\mathbb{P}W$. Элемент $x \in GL(V)$ сохраняет точку $\mathbb{P}L \Leftrightarrow x$ сохраняет W_2 (Шаг 2) $\Leftrightarrow x$ лежит в G (Шаг 1). ■

Теорема Бореля о плотности

ТЕОРЕМА: (Теорема Бореля о плотности)
Пусть $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ – связная алгебраическая подгруппа, $\Gamma \subset G$ – решетка в G, а $\overline{\Gamma}_{\mathsf{Zar}}$ ее замыкание Зариского. **Тогда $\overline{\Gamma}_{\mathsf{Zar}}$ – подгруппа, содержащая все унипотентные элементы G.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку Γ – решетка, на G/Γ существует вероятностная G-инвариантная мера Хаара μ_Γ.

Шаг 2: По теореме Шевалле, существует тензорное представление W группы $GL(n,\mathbb{R})$ такое, что $\overline{\Gamma}_{\mathsf{Zar}}$ равно стабилизатору точки $l \in \mathbb{P}W$. Рассмотрим отображение $\rho: \ G \longrightarrow \mathbb{P}W$, переводящее x в $x(l)$. Поскольку $\rho|_\Gamma(l) = l$, можно считать ρ отображением $G/\Gamma \longrightarrow \mathbb{P}W$. Рассмотрим меру $\rho_*(\mu_\Gamma)$ на $\mathbb{P}W$. По построению, **эта мера G-инвариантна.**

Шаг 3: Применяя Следствие 1, получаем, что носитель меры $\rho_*(\mu_\Gamma)$ инвариантен относительно всех унипотентов $u \in G$. Поскольку l содержится в носителе $\rho_*(\mu_\Gamma)$, точка l инвариантна относительно u. Но множество элементов G, сохраняющих l, совпадает с $\overline{\Gamma}_{\mathsf{Zar}}$. ∎

Интеграл

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, μ) есть пространство с заданной на нем мерой. Функция $M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется **измеримой**, если прообраз каждого борелевского множества измерим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Рассмотрим пространство V всех ограниченных измеримых функций на (M, μ) со значениями в $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Предположим, что $\mu(M) < \infty$. **Интеграл Лебега**, есть линейный функционал $\int_\mu : V \longrightarrow [0, \infty]$, обладающий следующими свойствами.

1. Неотрицательность: $\int_\mu f \geqslant 0$ для каждой функции $f \geqslant 0$, причем равенство имеет место только если $f = 0$ вне множества меры 0.

2. Совместимость с мерой: если χ – характеристическая функция измеримого множества Z с конечной мерой, то $\int_\mu \chi = \mu(Z)$.

3. σ-аддитивность: если $f = \sum_{i=0}^\infty f_i$ – разложение функции в бесконечную сумму неотрицательных функций, то $\int_\mu f = \sum_i \int_\mu f_i$.

ТЕОРЕМА: **Интеграл существует, и определен однозначно, исходя из этих аксиом.** Для любого функционала на пространстве измеримых функций, удовлетворяющего условиям 1 и 3, **формула $\int_\mu \chi = \mu(Z)$ задает меру на M.** ■

Слабая топология на пространстве мер

В дальнейшем, мы будем обозначать $\int_\mu f$ за $\mu(f)$, не проводя различий между мерой и интегралом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство с вероятностной мерой, а $C^0_b(M)$ – пространство непрерывных, ограниченных функций на M с топологией, которая задана нормой $\|f-g\| = \sup_M |f-g|$. Вероятностную меру удобно рассматривать как непрерывный функционал на $C^0_b(M)$. Определим **слабую топологию** на пространстве мер таким образом: последовательность $\{\mu_i\}$ мер сходится к μ, если для каждой $f \in C^0_b(M)$, имеем $\lim_i \mu_i(f) = \mu(f)$ (эта топология еще называется **"weak *-topology"**).

ТЕОРЕМА: **Пространство $\mathfrak{S}$ вероятностных мер на компактном топологическом пространстве компактно в слабой топологии.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим вложение из $\mathfrak{S}$ в произведение отрезков, $\Psi: \mathfrak{S} \longrightarrow \prod_{f\in C^0_b(M)}[\inf f, \sup f]$, где $\mu \longrightarrow \prod_f \int_\mu f$. Образ этого вложения замкнут в силу компактности M **(проверьте это)**, а произведение $\prod_{f\in C^0_b(M)}[\inf f, \sup f]$ компактно по теореме Тихонова. ■

Эргодические меры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – пространство с заданной на нем сигма-алгеброй A а G – группа, действующая на M, сохраняя A. Мера μ на (M, A) называется **эргодической**, если каждое G-инвариантное измеримое подмножество $M' \subset M$ удовлетворяет $\mu(M') = 0$ либо $\mu(M \backslash M') = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **G-инвариантная мера на M эргодична тогда и только тогда, когда любая измеримая G-инвариантная функция постоянна почти всюду.**

Эргодические меры и экстремальные точки

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим пространство W всех функционалов, переводящих измеримые подмножества M в числа. **Тогда пространство всех вероятностных мер на M есть выпуклое подмножество в W.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Экстремальная точка** x выпуклого множества K есть $x \in K$ такая, что для любого отрезка $[a, b] \subset K$, содержащего x, $x \notin]a, b[$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим множество $\mathfrak{S}$ всех вероятностных, G-инвариантных мер на M, и пусть $\mu \in \mathfrak{S}$ – какая-то мера. Тогда μ **эргодична тогда и только тогда, когда она является экстремальной точкой $\mathfrak{S}$.**

ТЕОРЕМА: **(Крейн-Мильман)**
Пусть S – замкнутое, выпуклое подмножество в топологическом векторном пространстве. **Тогда S есть замыкание выпуклой оболочки своих экстремальных точек.**

СЛЕДСТВИЕ: **Эргодические меры существуют.**

Эргодические меры и плотность орбит

ЗАМЕЧАНИЕ: Следующая теорема утверждает, что **почти все орбиты группы, которая действует эргодически, плотны.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть Γ – группа, эргодически действующая на топологическом пространстве (M,μ) с мерой и счетной базой, сохраняя меру, а $\operatorname{supp}(\mu)$ – ее носитель. Рассмотрим множество R всех $x \in M$ таких, что орбита $\Gamma \cdot x$ не плотна в $\operatorname{supp}(\mu)$. **Тогда $\mu(R) = 0$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $U \subset M$ открыто и пересекает $\operatorname{supp}(\mu)$. По определению носителя, $\mu(U) > 0$, значит, множество $\Gamma{\cdot}U$ – Γ-инвариантно и измеримо. **В силу эргодичности, это множество полной меры.** Обозначим за Z_U множество $x \in M$ таких, что орбита x не пересекает U. Тогда $Z_U = M\backslash\Gamma \cdot U$ – множество меры 0.

Шаг 2: Пусть $\{U_i\}$ – база топологии в M. Выкинем из U_i все открытые множества, не пересекающие $\operatorname{supp}(\mu)$. Тогда $R = M\backslash\bigcup Z_{U_i}$, это счетное объединение множеств меры 0. ∎

Алгебраические меры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть счетная группа Γ действует на пространстве M с мерой, сохраняя сигма-алгебру измеримых множеств. **Фундаментальная область** действия Γ на M есть измеримое подмножество $D \subset M$, такое, что $\gamma(D) \cap \gamma'(D)$ имеет меру нуль для любых $\gamma \neq \gamma' \in \Gamma$, а $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(D) = M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $S \subset G$ – алгебраическая подгруппа, $\Gamma \subset G$ решетка, $x \in G$, $\Gamma_{S\cdot x}$ – стабилизатор орбиты S в G/Γ, а $D \subset S$ – фундаментальная область действия $\Gamma_{S\cdot x}$. Предположим, что объем D конечен в мере Хаара на S. Определим на $S \cdot x = S/\Gamma_{S\cdot x}$ меру $\mu_{S\cdot x}$ как $\frac{1}{\mu_S(D)}\mu_S|_D$. Ее прямой образ на G/Γ называется **алгебраической**, или же **однородной** мерой.

ЗАМЕЧАНИЕ: Алгебраическая мера есть S-инвариантная вероятностная мера на орбите $S \cdot x$; **она единственна, с точностью до множителя, потому что пропорциональна мере Хаара.**

Теорема Ратнер о классификации мер

ТЕОРЕМА: (теорема Ратнер о классификации эргодических мер) Пусть $H \subset G$ – алгебраическая подгруппа, порожденная унипотентами, $\Gamma \subset G$ решетка, а μ есть мера на G/Γ, эргодичная относительно левого действия H. **Тогда $\mu = \mu_{S \cdot x}$ – алгебраическая мера,** для S – подгруппы, порожденной унипотентами, $H \subset S \subset G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. напр. Morris, Dave Witte, *Ratner's Theorems on Unipotent Flows*, `http://people.uleth.ca/~dave.morris/books/Ratner.pdf`

Теорема Ратнер о замыкании орбит (повторение)

ТЕОРЕМА: (теорема Ратнер о замыкании орбит)
Пусть G – группа Ли, $H \subset G$ – подгруппа, порожденная унипотентами, а $\Gamma \subset G$ – решетка. Рассмотрим действие H на G/Γ левыми сдвигами. и пусть $H \cdot x$ – орбита H в G/Γ. **Тогда существует подгруппа S в G, содержащая H, и такая, что замыкание орбиты $H \cdot x$ равно $S \cdot x$.** Более того, S порождена унипотентами, а группа

$$\Gamma_S := \operatorname{St}_\Gamma(S \cdot x) = \{\gamma \in \Gamma \ \ | \ \ (S \cdot x)\gamma = S \cdot x\} = S \cap \Gamma^x$$

это решетка в S (здесь $\operatorname{St}_\Gamma(S \cdot x)$ обозначает стабилизатор орбиты $S \cdot x$ в Γ при правом действии Γ на G).

Мы выведем теорему Ратнер о замыкании орбит из теоремы Ратнер о классификации мер.

Эргодическая теорема Биркхоффа

ТЕОРЕМА:
(эргодическая теорема Биркгоффа, она же "теорема о среднем")
Пусть M – компакт, $\rho_t: M\times\mathbb{R} \longrightarrow M$ – действие $\mathbb{R}$ на M гомеоморфизмами, $x \in M$ точка, а f – ограниченная, непрерывная функция на M. Определим вероятностную меру на M по формуле

$$\mu_{a,x}(f) := \frac{1}{a}\int_0^a f(\rho_t(x))dt$$

Тогда предел $\lim\limits_{a\longrightarrow\infty} \mu_{a,x}(f)$ существует и равен ρ_t-инвариантной вероятностной мере $f \longrightarrow \operatorname{Av}_{\rho_t\cdot x}(f)$.

Набросок доказательства: Сходимость следует из компактности, а ρ_t-инвариантность – из формулы

$$|\mu_{a,x}(f) - \mu_{a,x}(\rho_C^* f)| = \left|\frac{1}{a}\int_0^a f(\rho_t(x))dt - \frac{1}{a}\int_C^{a+C} f(\rho_t(x))dt\right| \leqslant \frac{2CF}{a},$$

где $F = \sup_M |f|$. ■

Среднее по времени, среднее по пространству

ЗАМЕЧАНИЕ: Слово "эргодический" было изобретено Больцманом, от греческих корней, обозначающих "работу" и "путь". Первоначально эргодичность относилась к системам, зависящим от времени, которое исполняло роль группы $\mathbb{R}$, действующей диффеоморфизмами. **Для таких систем эргодичность означает "среднее по времени равно среднему по пространству".**

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу предыдущего замечания, **усредняющая мера $f \longrightarrow \mathsf{Av}_{\rho_t \cdot x}(f)$ всегда эргодична.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Чтобы применить теорему Бирхоффа в ситуации, когда M некомпактно, достаточно заменить M на одноточечную компактификацию.

Теорема Ратнер о плотности орбит для $H = e^{tu}$

ТЕОРЕМА:
(теорема Ратнер для однопараметрической подгруппы)
Пусть G – группа Ли, $H \subset G$ – **однопараметрическая унипотентная подгруппа,** а $\Gamma \subset G$ – решетка. Рассмотрим действие H на G/Γ левыми сдвигами. и пусть $H \cdot x$ – орбита H в G/Γ. **Тогда существует подгруппа S в G, содержащая H, и такая, что замыкание орбиты $H \cdot x$ равно $S \cdot x$.** Более того, S порождена унипотентами, а группа

$$\Gamma_S := \mathsf{St}_\Gamma(S \cdot x) = \{\gamma \in \Gamma \ \mid \ (S \cdot x)\gamma = S \cdot x\} = S \cap \Gamma^x$$

это решетка в S (здесь $\mathsf{St}_\Gamma(S \cdot x)$ обозначает стабилизатор орбиты $S \cdot x$ в Γ при правом действии Γ на G).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: (для компактного HG/Γ). Мера $\mathsf{Av}_{H \cdot x}$ по построению эргодична, а по теореме Ратнер о классификации мер она является алгебраической мерой. Из этого следует, что $\operatorname{supp}(\mathsf{Av}_{H \cdot x}) = \overline{H \cdot x}$ – орбита подгруппы $S \supset H$, порожденной унипотентами и конечного объема. ∎

Теорема Ратнер о плотности орбит и полунепрерывность

Теорема Ратнер об орбитах выводится из доказанного выше частного случая, теоремы о классификации мер, и следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $H \subset G$ – алгебраическая подгруппа, порожденная унипотентами, $\mathfrak{h}$ ее алгебра Ли, $\Gamma \subset G$ – решетка, $u_t := e^{tu}$ – однопараметрическая подгруппа, порожденная унипотентами, а $x \in G/\Gamma$. Тогда **для общего нильпотента $u \in \mathfrak{h}$, имеем $\overline{u_t \cdot x} = \overline{H \cdot x}$.**

Доказательство. Шаг 1: Теорема Ратнер для однопараметрической подгруппы и теорема Бореля о плотности доказывает, что $\overline{u_t \cdot x}$ равно замыканию Зариского минимальной подгруппы $\Gamma_u \subset \Gamma^x$, такой, что $\overline{\Gamma_u}_{\mathsf{Zar}} \supset u_t$.

Шаг 2: Возьмем последовательность нильпотентов $\{u_i\} \subset \mathfrak{h}$, сходящуюся к $u \in \mathfrak{h}$. Поскольку предел замыканий орбит содержит замыкание предела орбит, имеем $\lim_i \Gamma_{u_i} \supset \Gamma_u$. Другими словами, **отображение $u \longrightarrow \Gamma_u$ полунепрерывно вверх (уменьшается в специальных точках).**

Шаг 3: Поскольку $u \longrightarrow \Gamma_u$ полунепрерывно, полуалгебраично и может принимать не более чем счетное множество значений, для общего u группа Γ_u не зависит от u, и содержит $\Gamma_{u'}$ для всех $u' \in \mathfrak{h}$. ■