Введение в геометрию Александрова

дополнительная лекция

Миша Вербицкий

27 июля 2016

Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия VI"
24 - 31 июля, 2016, ЯГПУ, Ярославль, Россия

Метрические пространства.

Определение: Пусть M - множество. **Метрикой** на M называется функция $d: \ M\times M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}\cup\infty$, удовлетворяющая следующим условиям
* **[Невырожденность:]** $d(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$.
* **[Симметричность:]** $d(x,y)=d(y,x)$
* **[Неравенство треугольника:]** $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$
для любых точек $x,y,z\in M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если $x\in X$ – точка, а ε – вещественное число, множество $B_\varepsilon(x)=\{y\in X \ \ | \ \ d(x,y)<\varepsilon\}$ называется **(открытый) шар радиуса ε с центром в x**, или **ε-шар**. **Замкнутый шар** это $\overline{B}_\varepsilon(x)=\{y\in X \ \ | \ \ d(x,y)\leqslant\varepsilon\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Открытое множество** в метрическом пространстве M есть объединение открытых шаров.

УПРАЖНЕНИЕ: **Докажите, что это задает топологию на M.**

Допустимые пути.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство. Говорится, что на M **задан класс допустимых путей**, если задано множество путей $[a,b] \longrightarrow M$ такое, что

1. Для любых двух путей $[a,b] \xrightarrow{\gamma_1} M$ и $[b,c] \xrightarrow{\gamma_2} M$, удовлетворяющих $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, путь $\gamma: [a,c] \longrightarrow M$, равный γ_1 на $[a,b]$ и γ_2 на $[b,c]$, тоже допустим. Такая операция называется **"склейка путей".**

2. **(замена параметра)** Если $\varphi: [a,b] \longrightarrow [c,d]$ – линейное отображение, а путь $\gamma: [c,d] \longrightarrow M$ допустим, путь $\varphi \circ \gamma$ тоже допустим.

3. **Ограничение:** Для каждого пути $[a,b] \xrightarrow{\gamma} M$, и отрезка $[c,d] \subset [a,b]$, ограничение $\gamma|_{[c,d]}$ – тоже допустимый путь.

Допустимые пути (примеры).

ПРИМЕР: **Кусочно-линейные пути** (ломаные) в $\mathbb{R}^n$ образуют допустимый класс путей.

ПРИМЕР: **Кусочно-полиномиальный путь** получен склейкой конечного числа путей $\gamma_i: \ [x_i, x_{i+1}]$, заданных полиномиальными отображениями. **Кусочно-полиномиальные пути в $\mathbb{R}^n$ образуют допустимый класс путей.**

ПРИМЕР: **Кусочно-гладкий путь** получен склейкой конечного числа путей $\gamma_i: \ [x_i, x_{i+1}]$, заданных гладкими отображениями. **Кусочно-гладкие пути в $\mathbb{R}^n$ образуют допустимый класс путей.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **C-Липшицево отображение** есть отображение метрических пространств $\varphi: \ M \longrightarrow M'$, удовлетворяющее $Cd(x,y) \geqslant d(\varphi(x), \varphi(y))$. **Липшицево отображение** есть C-липшицево с какой-то константой C.

ПРИМЕР: **Липшицевы пути** образуют допустимый класс.

Функционал длины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство, снабженное допустимым классом путей. Функционал $L(\gamma)$, отображающий допустимые пути в числа, называется **функционалом длины**, если он удовлетворяет следующим условиям.

1. **(аддитивность длины)** Для любого пути $\gamma: [a,c] \longrightarrow M$, и любого $b \in [a,c]$, $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,b]}) + L(\gamma|_{[b,c]})$, где $\gamma|_{[c,d]}$ обозначает **ограничение пути,** то есть функции $\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ на отрезок $[c,d] \subset [a,b]$.

2. **(непрерывность длины пути как функции от координат концов)** Для любого пути $\gamma: [a,c] \longrightarrow M$, **функция $L(\gamma\Big|_{[a,b]})$ непрерывно зависит от $b \in [a,c]$.**

3. **Замена параметра:** Если $\varphi: [a,b] \longrightarrow [c,d]$ – гомеоморфизм отрезков, а $\gamma: [c,d] \longrightarrow M$ и $\varphi \circ \gamma: [a,b] \longrightarrow M$ – допустимые пути, то $L(\gamma) = L(\varphi \circ \gamma)$.

4. **(длина пути согласована с топологией)** Пусть Z – замкнутое подмножество M, а $x \notin Z$ точка, не лежащая на Z. Тогда **существует число $\varepsilon > 0$ такое, что любой путь, соединяющий x с какой-то точкой Z, имеет длину $\geqslant \varepsilon$.**

Метрика, построенная по функционалу длины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины. **Метрика путей**, или же **внутренняя метрика, $d_L : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ построенная по функционалу L,** определяется как $d_L(x,y) := \inf_\gamma L(\gamma)$, где инфимум берется по всем путям, соединяющим x и y.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Это метрика.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Симметричность d_L следует из замены параметра $t \longrightarrow (b-t)+a$ в пути $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ (из пути, соединяющего a и b, получаем путь, соединяющий b и a, той же длины).

Положительность $d_L(x,y)$, $x \neq y$ следует из условия 4, примененного к $Z = y$. В самом деле, существует такое $\varepsilon > 0$, что любой путь, соединяющий x и Z, имеет длину $\geqslant \varepsilon$.

Неравенство треугольника доказывается через склейку путей. Пусть γ_1 – путь, соединяющий x и y, длины $d_L(x,y)+\varepsilon$, а γ_2 – путь, соединяющий y и z, длины $d_L(y,z)+\varepsilon$. Склеив γ_1 и γ_2, получим путь γ, соединяющий x и z, длины $d_L(x,y)+d_L(y,z)+2\varepsilon$, что дает $d_L(x,y)+d_L(y,z) \geqslant d_L(x,z)+2\varepsilon$.
■

Примеры функционала длины.

ПРИМЕР: $M = \mathbb{R}^n$ с обычной топологией, класс допустимых путей - кусочно-линейные пути (то есть ломаные), со звеньями $[x_i, x_{i+1}]$, а длина пути определяется формулой $L(\gamma) = \sum |d(x_i, x_{i+1})|$ **("длина ломаной").**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Построенная по этому функционалу метрика d_L равна обычной метрике.

Действительно, **самая короткая ломаная, соединяющая две точки – это отрезок прямой.**

ПРИМЕР: **Длина кусочно-гладкого пути** $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой вычисляется по формуле $L(\gamma(t)) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что это функционал длины, и **соответствующая метрика L_d – обычная, плоская.**

Финслерова метрика.

ПРИМЕР: "Финслерова метрика" Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открытое подмножество, а $\nu_x : Tx\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ – норма на касательном пространстве, непрерывно зависящая от x. Для кусочно-гладкого пути $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$, определим

$$L_\nu(\gamma(t)) := \int_a^b \nu_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Это функционал длины.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Аддитивность и **непрерывность** L очевидны.

Чтобы доказать согласованность с топологией, выберем такую константу δ, что $\nu_x(v) \geqslant \delta|v|$ в замкнутом $V \ni x$, не пересекающем Z. **Тогда каждый путь γ, соединяющий x и границу ∂V, удовлетворяет $L_\nu(\gamma) \geqslant \delta L(\gamma)$,** где L – длина γ в евклидовой метрике. Но $L(\gamma) \geqslant d(x, \partial V)$, а это число положительно, так как ∂V замкнуто.

Финслерова метрика и риманова метрика.

Инвариантность L_ν при репараметризации следует из формулы

$$L_\nu(\varphi\circ\gamma) = \int_a^b \nu_{\gamma(\varphi(t))}(\varphi\circ\gamma)'(t)dt =$$
$$= \int_a^b \nu_{\gamma(\varphi(t))}(\varphi'(t)\gamma'(\varphi(t))dt = \int_a^b \varphi'(t)\nu_{\gamma(\varphi(t))}(\gamma'(\varphi(t))dt =$$
$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \nu_{\gamma(\varphi(t))}(\gamma'(\varphi(t))d\varphi(t) = L_\nu(\gamma)$$

■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Финслерова метрика** на U определяется как внутренняя метрика, определенная функционалом длины L_ν.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $U\subset\mathbb{R}^n$ – открытое подмножество, а норма $\nu_x: T_x\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ задается формулой $\nu_x(v)=\sqrt{g_x(v,v)}$, где $g_x\in \operatorname{Sym}^2 T_x^*\mathbb{R}^n$ – положительно определенное скалярное произведение, заданное гладким отображением $U\longrightarrow \operatorname{Sym}^2\mathbb{R}^n = \operatorname{Sym}^2 T_x^*\mathbb{R}^n$. В такой ситуации g_x называется **римановой формой** на U, а соответствующая метрика оутей **римановой метрикой** на U.

Спрямляемые пути.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, d) – метрическое пространство, а $\gamma : [a, b] \to M$ – путь. Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b] = [a, {}_1] \cup [x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, b]$. Обозначим $x_0 := a, x_n := b$. Положим $L_\gamma(x_1, ... x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$. Определим **длину пути** γ формулой

$$L_d(\gamma) := \sup_{a<x_1<...<x_{n-1}<b} L_\gamma(x_1, ... x_{n-1}).$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка. Путь γ называется **спрямляемым**, если $L_d(\gamma) < \infty$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M – произвольное метрическое пространство. **Тогда спрямляемые пути образуют допустимый класс, а L_d является функционалом длины.**

УПРАЖНЕНИЕ: **Докажите это.**

Внутренняя метрика.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство, а L_d – функционал длины на спрямляемых путях. Обозначим соответствующую внутреннюю метрику d_{L_d} за $\hat{d}$. Она называется **внутренней метрикой, индуцированной d.**

ТЕОРЕМА: Для любого метрического пространства, $\hat{\hat{d}} = \hat{d}$.

Доказательство. Шаг 1: Длина пути, соединяющего x и y, не меньше, чем $d(x,y)$, в силу неравенства треугольника. Поэтому $\hat{d} \geqslant d$.

Шаг 2: Поскольку $\hat{d} \geqslant d$, имеем $L_d(\gamma) \leqslant L_{\hat{d}}(\gamma)$ **для любого пути.**

Шаг 3: Пусть $\gamma: [a,b] \to M$ – спрямляемый путь. Выберем такое разбиение отрезка $[a,b]$, что $L_{\hat{d}}(\gamma) - \sum \hat{d}(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1})) < \varepsilon$. Тогда

$$L_{\hat{d}}(\gamma) - \varepsilon \leqslant \sum_i \hat{d}\left(\gamma\Big|_{[x_i,x_{i+1}]}\right) \leqslant \sum_i L_d\left(\gamma\Big|_{[x_i,x_{i+1}]}\right) = L_d(\gamma).$$

Устремляя ε к нулю, получаем $L_{\hat{d}}(\gamma) \leqslant L_d(\gamma)$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика d на M называется **внутренней**, если $\hat{d} = d$.

Внутренние метрики и функционалы длины

ТЕОРЕМА: Пусть (M,d) – пространство с метрикой путей, построенной по функционалу длины L. **Тогда d внутренняя.**

Доказательство. Шаг 1: Для каждого допустимого пути γ, соединяющего a и b в M, имеем $d(a,b) \leqslant L(\gamma)$. С другой стороны, $L_d(\gamma)$ есть супремум $\sum_i d(\gamma(x_i),\gamma(x_{i+1}))$ по всем разбиениям пути. Значит, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение пути γ такое, что

$$L_d(\gamma) \leqslant \sum_i d(\gamma(x_i),\gamma(x_{i+1})) + \varepsilon \leqslant \sum_i L(\gamma_{[x_i,x_{i+1}]}) + \varepsilon = L(\gamma) + \varepsilon$$

Это дает $L_d(\gamma) \leqslant L(\gamma)$, то есть $\hat{d} \leqslant d$.

Шаг 2: По определению, $\hat{d}(x,y)$ есть инфимум L_d-длин всех спрямляемых путей, соединяющих x и y. Значит, для любого заданного $\varepsilon > 0$. найдется спрямляемый путь γ, соединяющий x и y, и его разбиение $\gamma = \bigcup \gamma_{[x_i,x_{i+1}]}$ такое, что

$$\hat{d}(x,y) \geqslant L_d(\gamma) - \varepsilon \geqslant \sum_i d(\gamma(x_i),\gamma(x_{i+1})) - 2\varepsilon \geqslant d(x,y) - 2\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем $\hat{d} \geqslant d$. ■

Теорема Хопфа-Ринова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – метрическое пространство. Говорят, что M **локально компактно**, если для любой точки $x \in M$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ компактен.

ТЕОРЕМА: Пусть M – полное, локально компактное пространство с внутренней метрикой. **Тогда каждый замкнутый шар в M компактен.**

Stefan Cohn-Vossen, 28 May 1902 - 25 June 1936

Кратчайшие в метрическом пространстве

Определение: Непрерывное отображение $\gamma : [0, \alpha] \longrightarrow M$ называется **кратчайшей**, если его длина равна $d(\gamma(0), \gamma(\alpha))$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Любой отрезок кратчайшей - снова кратчайшая.

Определение: Если $\varphi : [0, \alpha] \longrightarrow [0, \alpha]$ – гомеоморфизм, а γ - путь из x в y, композиция $\varphi \circ \gamma$ - тоже путь из x в y. Такой путь называется **репараметризацией** γ.

Параметризация γ – выбор пути в классе путей, эквивалентных с точностью до репараметризации.

Определение: Пусть $\gamma : [0, \alpha] \longrightarrow M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|.$$

Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Геодезическая кратчайшая задается изометрическим вложением из отрезка в M.

Существование кратчайших

ТЕОРЕМА: Пусть M - локально компактное, полное пространство с внутренней метрикой а $x_0, x_1 \in M$. **Тогда существует кратчайшая геодезическая, соединяющая x_0 и x_1.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $d(x_0, x_1) = \alpha$. В силу компактности, **в шаре $\overline{B}_{\alpha/2}(x_1)$ есть точка $x_{1/2}$ такая, что $d(x_0, x_{1/2}) = d(x_{1/2}, x_1) = \alpha/2$.** В самом деле, функция $d(\cdot, x_0) : \overline{B}_{\alpha/2}(x_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывная на компакте, значит, достигает минимума, который равен $d(x_0, \overline{B}_{\alpha/2}(x_1)) = \alpha/2$ потому, что метрика внутренняя.

Шаг 2: Воспользовавшись индукцией, для каждого двоично-рационального числа $\lambda = \frac{n}{2^k}$ в $[0, 1]$ **найдем точку x_λ, такую, что $d(x_\lambda, x_\mu) = \alpha|\lambda - \mu|$.**

Шаг 3: Мы получили **изометрическое вложение множества двоично-рациональных чисел в M. Продолжим на пополнение, получим геодезическую.** ■

Непрерывность длины как функции параметра

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство, $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ спрямляемый путь, а L_d функционал длины. **Тогда $L_d(\gamma\big|_{[a,b_1]})$ непрерывно зависит от $b_1 \in [a,b]$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно доказать, что

$$\lim_{b_1 \to b} L\left(\gamma\Big|_{[b_1,b]}\right) = 0.$$

Пусть $a = x_1, ..., x_n = b$ – такое разбиение отрезка $[a,b]$, что

$$\sum d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1})) \geqslant L(\gamma) - \varepsilon,$$

причем последний отрезок имеет длину не больше ε:

$$d(\gamma(x_{n-1}), \gamma(x_n)) \leqslant \varepsilon.$$

Тогда для каждого $b_1 \in [x_{n-1}, x_n]$, длина $L\left(\gamma\Big|_{[b_1,b]}\right)$ не больше, чем ε плюс длина отрезка $\gamma(x_{n-1}), \gamma(x_n))$, то есть не больше, чем 2ε. Это значит, что для каждого $\varepsilon > 0$, имеем $L\left(\gamma\Big|_{[b_1,b]}\right) \leqslant 2\varepsilon$ для b_1, достаточно близких к b.

■

Существование геодезической параметризации

Определение: Пусть $\gamma: [0,\alpha] \longrightarrow M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем

$$d(\gamma(x),\gamma(y)) = |x-y|.$$

Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

СЛЕДСТВИЕ: **Любая кратчайшая допускает геодезическую параметризацию.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть γ – кратчайшая длины d, соединяющая x и y, а $\gamma_1: [0,d] \longrightarrow M$ переводит t в точку $\gamma_1(t)$ такую, что $d(x,\gamma_1(t)) = t$. Такая точка существует, потому что длина отрезка пути является непрерывной функцией параметра. Отображение $t \longrightarrow \gamma_1(t)$ непрерывно, ибо расстояние между $\gamma_1(t)$ и $\gamma_1(t')$ равно $|t-t'|$, так как это отрезки кратчайшей. Наконец, γ_1 получена из γ репараметризацией, ибо отображение $t \longrightarrow d(x,\gamma(t))$ непрерывно и монотонно. ■

Теорема Хопфа-Ринова-Кон-Фоссена

УТВЕРЖДЕНИЕ: В пространстве с внутренней метрикой выполнено условие Кон-Фоссена: $d(x, B_r(y)) = d(x,y) - r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим путь γ, соединяющий x и y, длины $L(\gamma) < d(x,y) + \varepsilon$. Пусть $r' = d(x,y) - r$. Если шары $B_r(y)$ и $B_{r'+\varepsilon}(x)$ пересекаются в точке z, мы получаем, что $d(x, B_r(y)) \leqslant d(x,z) \leqslant d(x,y) - r + \varepsilon$. Если же они не пересекаются, получаем точку $z \in \gamma$, которая не принадлежит ни одному из шаров, и она удовлетворяет

$$d(x,z) + d(y,z) > r + r' + \varepsilon = d(x,y) + \varepsilon$$

что невозможно, потому что длина пути γ меньше, чем $d(x,y) + \varepsilon$. ■

ТЕОРЕМА: (Хопфа-Ринова-Кон-Фоссена)
Пусть M – полное, локально компактное пространство, в котором выполнено условие Кон-Фоссена. **Тогда каждый замкнутый шар в M компактен.**

Существование кратчайших

ТЕОРЕМА: Пусть M - локально компактное, полное пространство с внутренней метрикой а $x_0, x_1 \in M$. **Тогда существует кратчайшая геодезическая, соединяющая x_0 и x_1.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $d(x_0, x_1) = \alpha$. Из теоремы Хопфа-Ринова следует, что шары $\overline{B}_r(x)$ компактны. **в шаре $\overline{B}_{\alpha/2}(x_1)$ есть точка $x_{1/2}$ такая, что $d(x_0, x_{1/2}) = d(x_{1/2}, x_1) = \alpha/2$.** В самом деле, функция $d(\cdot, x_0): \overline{B}_{\alpha/2}(x_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывная на компакте, значит, достигает минимума, который равен $d(x_0, \overline{B}_{\alpha/2}(x_1)) = \alpha/2$ потому, что метрика внутренняя.

Шаг 2: Воспользовавшись индукцией, для каждого двоично-рационального числа $\lambda = \frac{n}{2^k}$ в $[0,1]$ **найдем точку x_λ, такую, что $d(x_\lambda, x_\mu) = \alpha|\lambda - \mu|$.**

Шаг 3: Мы получили **изометрическое вложение множества двоично-рациональных чисел в M. Продолжим на пополнение, получим геодезическую.** ■

Полуметрики

Определение:
Пусть $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция, такая, что выполнены:
Рефлексивность: $d(x,x) = 0$
Симметричность: $d(x,y) = d(y,x)$
Неравенство треугольника: $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Тогда d называется **полуметрикой**

От определения метрики это отличается только отсутствием условия невырожденности: $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Определение:
Открытым шаром в полуметрике d называется множество

$$B_{r,d}(x) = \{y \in M \quad | \quad d(x,y) < r\}.$$

Открытые шары задают на M топологию, **нехаусдорфову если M не метрика.**

Замечание:
Условие $d(x,y) = 0$ задает на M отношение эквивалентности.

Полуметрики и метрики

Если $d(x,y)=0$, то

$$d(z,x)+d(x,y)\geqslant d(y,z), \quad d(z,y)+d(y,x)\geqslant d(z,x),$$

поэтому $d(z,x)=d(y,z)$. **Следовательно, функция d корректно определена на множестве $\underline{M}$ классов эквивалентности по отношению $d(x,y)=0$. Она задает метрику на $\underline{M}$.**

Утверждение: Каждое пространство (M,d) с полуметрикой **наделено сюрьективным отображением $\pi: M \longrightarrow \underline{M}$** в метрическое пространство $(\underline{M},\underline{d})$, при этом

$$d(x,y)=\underline{d}(\pi(x),\pi(y)). \qquad (*)$$

Замечание: Если задано отображение $\pi: M\longrightarrow \underline{M}$ в метрическое пространство, то формула (*) определяет на M полуметрику.

Полуметрика на факторпространстве

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\sim$ – отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X, d). **Определим функцию** $d_\sim : X/\sim \times X/\sim \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ **на факторе** $X/\sim$ по формуле

$$d_\sim(x, y) = \inf \sum_{i=0}^{n-1} d(p_i, q_{i+1}),$$

где инфимум берется по всем наборам точек $p_i, q_i \in X$ таким, что $p_0 \sim x, q_n \sim y$, и $p_i \sim q_i$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Эта функция – полуметрика.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Нетривиально только неравенство треугольника. Но $d(x, y)$ есть инфимум длины "ломаных" $p_0, p_1, q_1, p_2, q_2, ...$ соединяющих x с y, где расстояние между $p_i \sim q_i$ положено равным 0. **Но если x соединен с y, y с z подобными ломаными, то x соединен с z объединением этих ломаных,** что дает $d_\sim(x, z) \leqslant d_\sim(x, y) + d_\sim(y, z)$. ■

Метрический фактор

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\sim$ – отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X,d). Определенная выше полуметрика $d_\sim$ на $X/\!\sim$ называется **полуметрикой факторпространства**. **Метрическое факторпространство** получается из $X/\!\sim$ дополнительным отождествлением всех точек x,y таких, что $d_\sim(x,y)=0$, с метрикой, которая индуцирована с $d_\sim$.

ПРИМЕР: Пусть G – группа, действующая на метрическом пространстве (X,d) изометриями, а $x\sim y$, если x и y лежат в одной орбите G. **Тогда $d_\sim(a,b)$ есть инфимум расстояний между представителями a,b в X** (докажите это).

Метрические графы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Несвязное объединение** метрических пространств (X_α, d_α) есть $\coprod X_\alpha$ с метрикой $d(x,y)$ которая равна $d_\alpha(x,y)$, когда x и y лежат в X_α, и ∞ в противном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть I_α – набор отрезков, изометричных $[0, x_\alpha]$, а $\sim$ – отношение эквивалентности, полученное склейкой некоторых вершин. Метрический фактор $\coprod_\alpha I_\alpha$ называется **метрическим графом**. Он называется **локально конечным**, если каждая точка отождествляется с конечным числом точек.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Метрика на метрическом графе - всегда внутренняя.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Каждую "ломаную" $p_0, p_1, q_1, p_2, q_2, ...$, соединяющую x и y, можно реализовать объединением отрезков в графе, такой же длины. ■

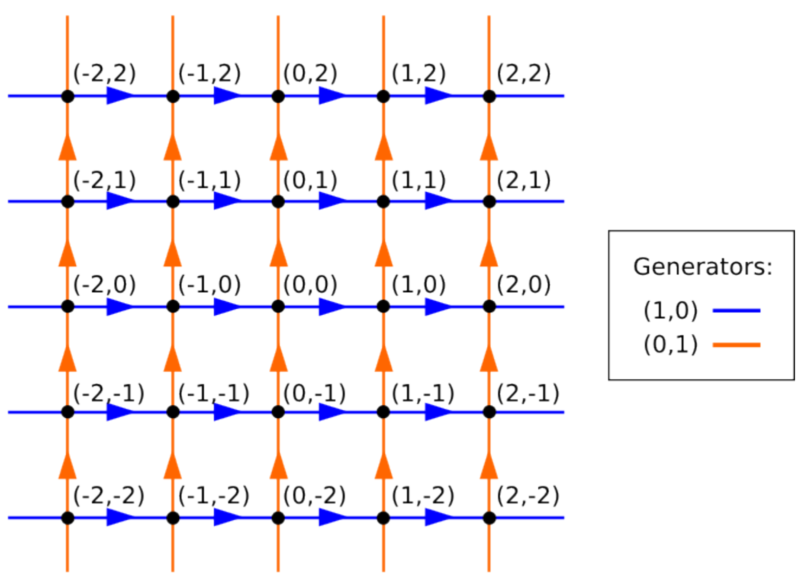
ЗАМЕЧАНИЕ: Естественое отображение из топологического пространства графа в метрический граф – **гомеоморфизм для локально конечного графа**. Для не локально конечных графов **это может быть не биекция,** или **биекция, но не гомеоморфизм.**

Граф Кэли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Набор образующих** группы G есть множество элементов S, мультипликативно порождающих G. **В дальнейшем, мы будем всегда предполагать, что $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$.**

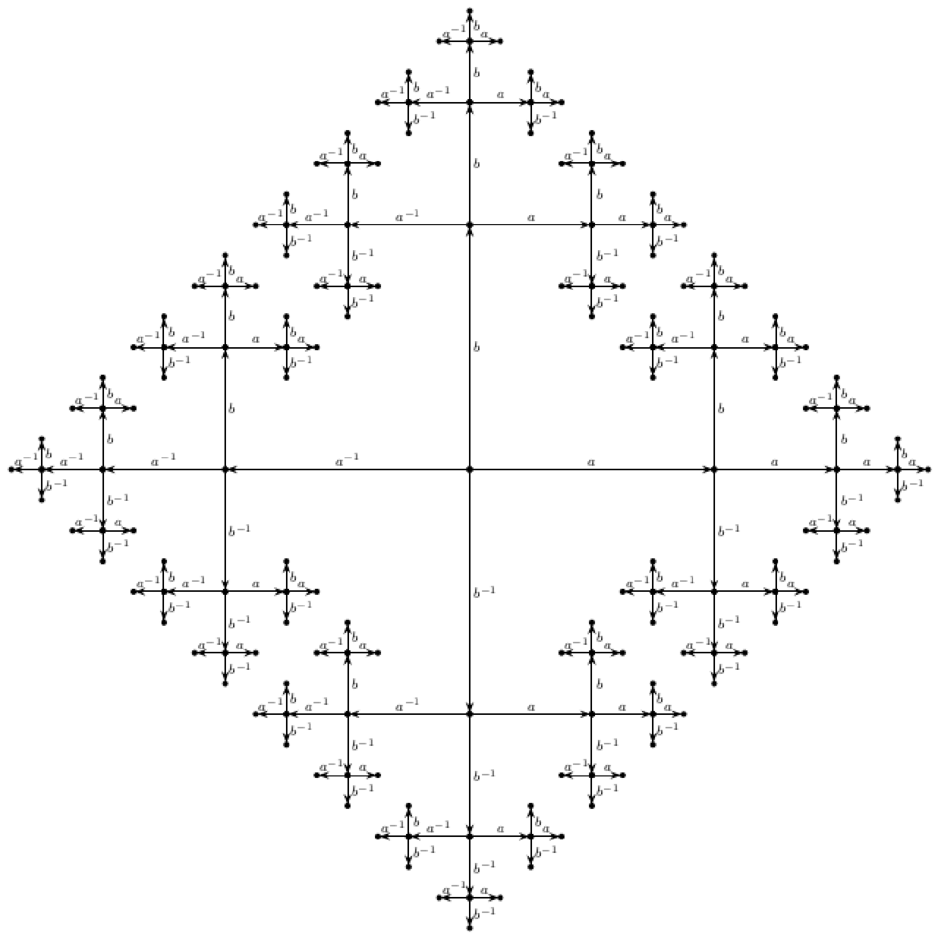
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $\{s_i\}$ – набор образующих. **Граф Кэли** пары $(G, \{s_i\})$ есть граф, вершины которого – элементы G, а ребра соединяют точки вида g и gs_i. Полагая длину ребер графа равной 1, мы **определяем граф Кэли как метрическое пространство с внутренней метрикой.**

ПРИМЕР: Граф Кэли для $\mathbb{Z}^n$ с обычным набором образующих есть кубическая решетка.



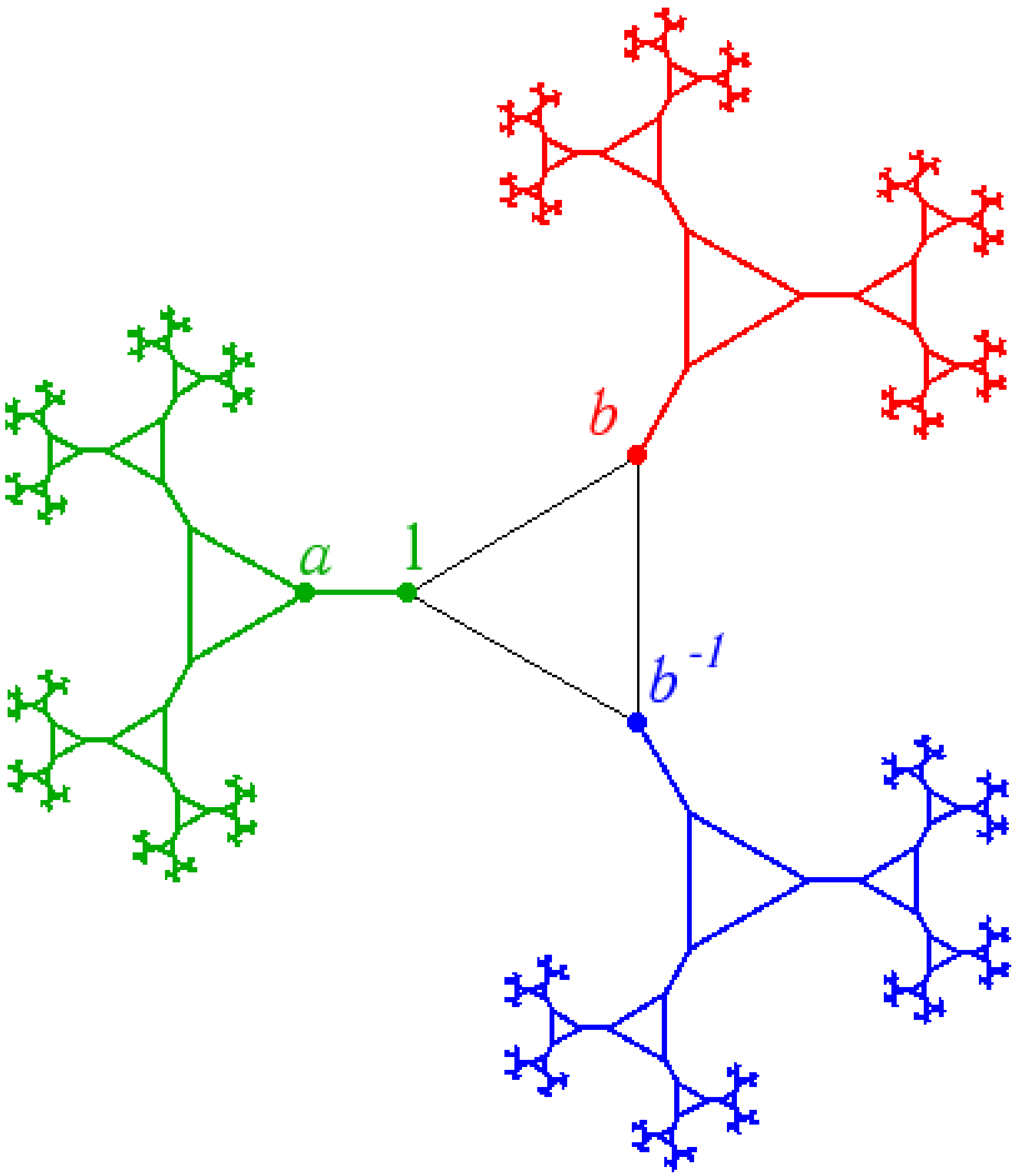
Граф Кэли для свободной группы

ПРИМЕР: Граф Кэли для свободной группы – регулярное дерево



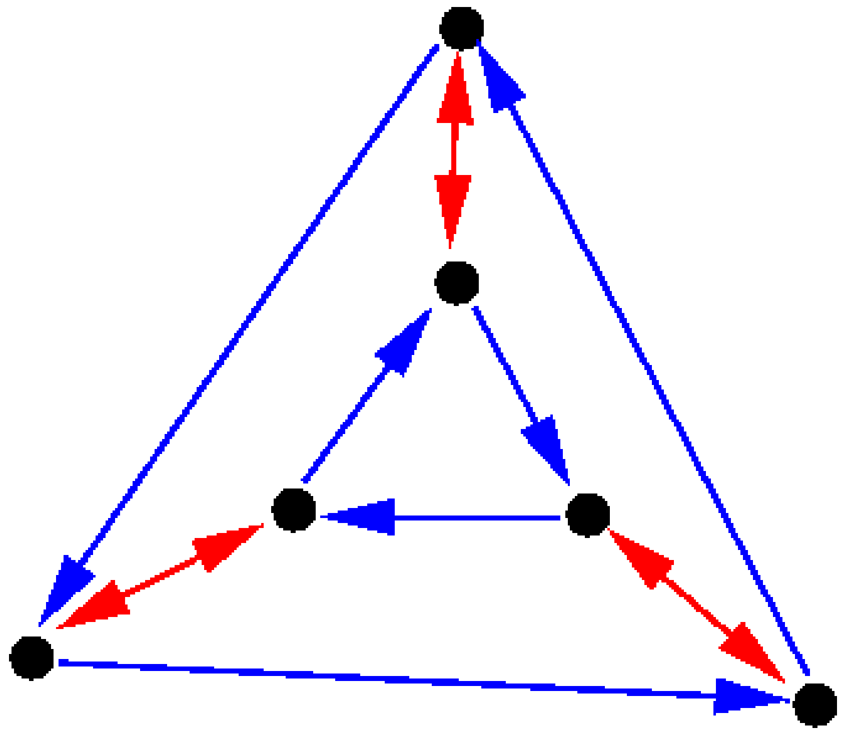
Граф Кэли свободной группы $\mathbb{F}_2$ с образующими a, b, a^{-1}, b^{-1}.

Граф Кэли для $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$



Граф Кэли для $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$**.**

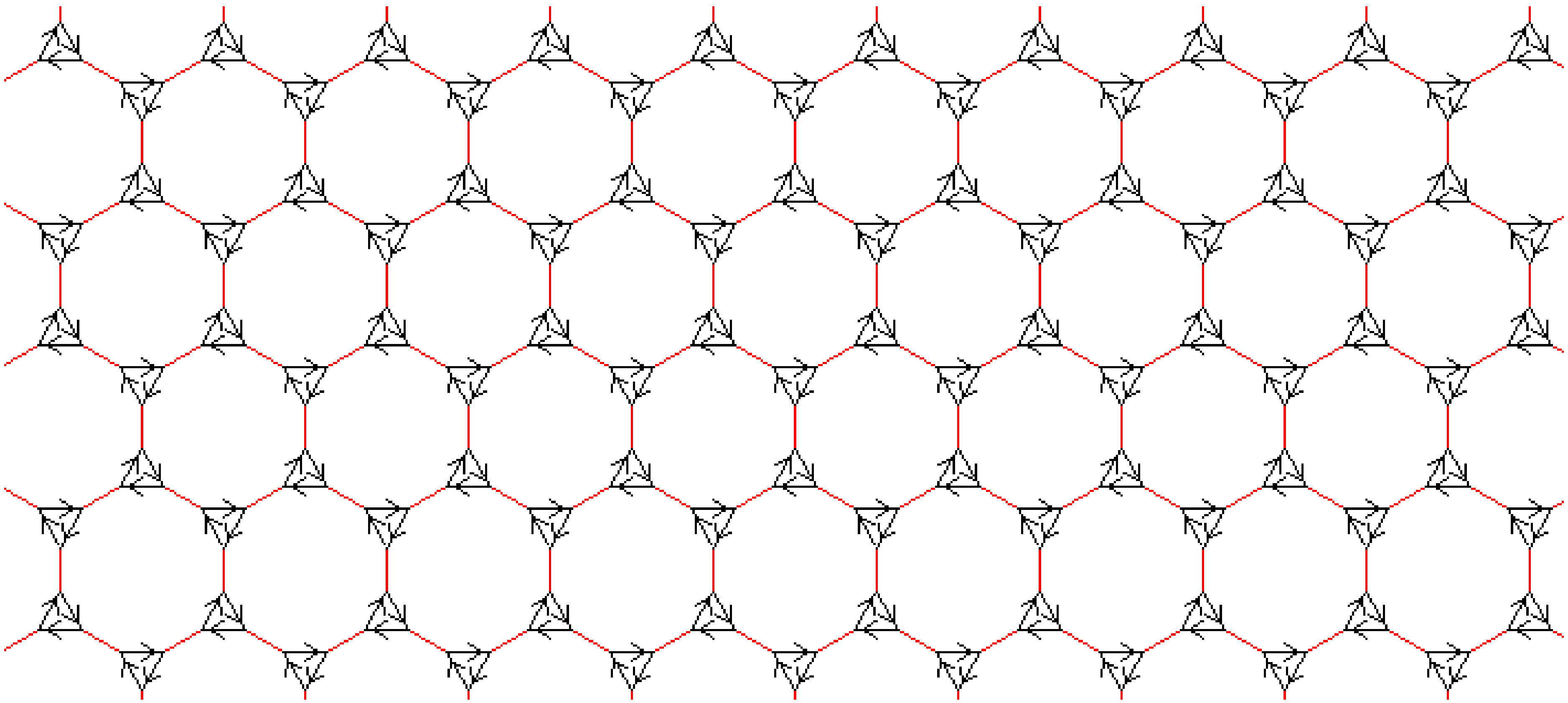
Граф Кэли для группы S^3



Граф Кэли для S^3.

Группа $S^3 = \langle k, r \mid k^2 = r^3 = (kr)^3 = 1\rangle$ задается образующими k (красная), r (черная), и соотношениями $k^2 = r^3 = (kr)^3 = 1$.

Граф Кэли для группы $\langle k, r \mid k^2 = r^3 = (kr)^6 = 1\rangle$



Граф Кэли для группы, заданной образующими k (красная), r (черная), и соотношениями $k^2 = r^3 = (kr)^6 = 1$.

Полиэдральные метрические пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Полиэдральное метрическое пространство размерности 1 есть метрический граф.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Полиэдральное метрическое пространство размерности k определяется по индукции. Каждое k-мерное полиэдральное метрическое пространство получено объединением своих l-скелетов K_l, $l = 1, 2, 3, ..., k$, причем $K_k = K$, а каждое из K_l есть полиэдральное метрическое пространство размерности l. Каждое K_k получено из K_{k-1} приклеиванием выпуклых евклидовых многогранников, следующим образом.

Пусть задано полиэдральное метрическое пространство K размерности $k-1$ и набор выпуклых многоогранников V_i в k-мерном евклидовом пространстве. Пусть для каждого из V_i задано изометрическое вложение $\tau_i : \partial V_i \longrightarrow_{k-1}$ границы V_i в K_{k-1}, переводящее l-мерные грани V_i в K_l. Метрический фактор $K_{k-1} \coprod_i V_i$ по соотношению, заданному таким склеиванием, называется **полиэдральным метрическим пространством размерности k.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **метрика на полиэдральном метрическом пространстве - внутренняя.**

Углы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть a, b, c – точки в метрическом пространстве (M, d). **Здесь и в дальнейшем $\mathbb{R}^2$ предполагается метрическим пространством, с обычной (евклидовой) метрикой.** **Треугольник сравнения** $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ есть треугольник в $\mathbb{R}^2$, с вершинами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, и сторонами $|\bar{a}, \bar{b}| = d(a, b)$, $|\bar{a}, \bar{c}| = d(a, c)$, и $|\bar{b}, \bar{c}| = d(b, c)$ (такой треугольник, очевидно, существует, и определен единственно с точностью до конгруэнтности). Угол $\measuredangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ в треугольнике $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ обозначается $\theta(a, b, c)$; он называется **углом сравнения**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\gamma_1 : [0, a] \longrightarrow M$, $\gamma_2 : [0, b] \longrightarrow M$ два пути в метрическом пространстве M, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. **Угол** между путями γ_1, γ_2 в p есть число

$$\measuredangle(\gamma_1, p, \gamma_2) := \lim_{t,s\to 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

если такой предел существует (в противном случае, говорится, что **угол между γ_1 и γ_2 не существует**). **Верхний угол** есть

$$\measuredangle_{\sup}(\gamma_1, p, \gamma_2) := \limsup_{t,s\to 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

где $\limsup$ **обозначает супремум всех предельных точек последовательностей $\theta(\gamma_1(t_i), p, \gamma_2(s_j))$, для всех t_i, s_j сходящихся к 0.**

Неравенство треугольника для углов

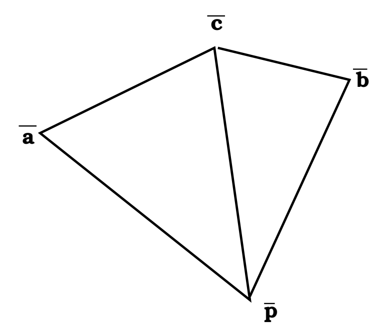
УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что **угол между гладкими путями в $\mathbb{R}^n$ существует и равен углу между их касательными.**

УПРАЖНЕНИЕ: $\gamma : : [0,a] \longrightarrow M$ – кратчайшая, наделенная геодезической параметризацией, а $\gamma(0) = p$. **Тогда угол $\measuredangle_{\sup}(\gamma, p, \gamma)$ существует и равен нулю.**

ТЕОРЕМА: Пусть $\gamma_i : [0,a] \longrightarrow M$ – пути в M, Тогда верно **неравенство треугольника для верхних углов:**

$$\measuredangle_{\sup}(\gamma_1, p, \gamma_2) + \measuredangle_{\sup}(\gamma_2, p, \gamma_3) \geqslant \measuredangle_{\sup}(\gamma_1, p, \gamma_3).$$

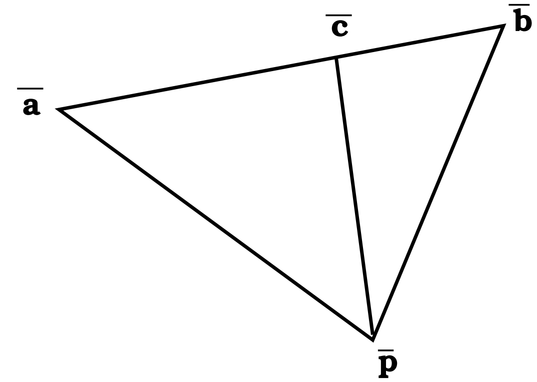
Доказательство. Шаг 1: Пусть $\gamma_i(0) = p$, $a = \gamma_1(s), b = \gamma_3(t)$, $c = \gamma_2(u)$. Рассмотрим треугольники сравнения $\triangle(\overline{p}, \overline{a}, \overline{c})$ и $\triangle(\overline{p}, \overline{c}, \overline{b})$, и нарисуем их на плоскости, с общей стороной $|\overline{p}, \overline{c}|$, чтобы они лежали по разные стороны от прямой $(\overline{p}, \overline{c})$.



В силу непрерывности $d(p, \gamma_2(u))$, **для любых заданных s, t, можно подобрать u таким образом, что $\overline{c}$ лежит на отрезке $[\overline{a}, \overline{b}]$.**

Неравенство треугольника для углов (продолжение)

Шаг 2: Из рассмотрения треугольников сравнения



убеждаемся, что

$$\theta(a,p,b)+\theta(b,p,c)=\measuredangle(\overline{a},\overline{p},\overline{c})=\operatorname{arccos}\left(\frac{s^2+t^2-|\overline{a},\overline{c}|^2}{2st}\right)$$

где $s=d(p,a)$ и $t=d(p,c)$.

Шаг 3: По определению, $|\overline{a},\overline{c}|=|\overline{a},\overline{b}|+|\overline{b},\overline{c}|=d(a,b)+d(b,c)\geqslant d(a,c)$. В силу монотонности арккосинуса, получаем

$$\measuredangle(\overline{a},\overline{p},\overline{c})=\operatorname{arccos}\left(\frac{s^2+t^2-|\overline{a},\overline{c}|^2}{2st}\right)\geqslant\operatorname{arccos}\left(\frac{s^2+t^2-d(a,c)^2}{2st}\right)=\theta(a,p,c).$$

Шаг 4: Сравнивая формулы, полученные в шаге 2 и шаге 3, получаем $\theta(a,p,b)+\theta(b,p,c)\geqslant\theta(a,p,c)$; неравенство для $\measuredangle_{\sup}$ следует немедленно. ■

Пространство направлений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Путь $\gamma: [0,a] \longrightarrow M$ **имеет направление**, если угол $\measuredangle(\gamma, \gamma(0), \gamma)$ существует. Пути $\alpha, \beta: [0,a] \longrightarrow M$, $\alpha(0) = \beta(0) = p$ **имеют одинаковое направление**, если $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\alpha, p, \beta) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу неравенства треугольника для углов, отношение «$\alpha \sim \beta$, если $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\alpha, p, \beta) = 0$» **задает отношение эквивалентности на множестве всех путей $\gamma: [0,a] \longrightarrow M$, $\gamma(0) = p$, имеющих направление.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство направлений** в точке p есть множество классов эквивалентности путей $\gamma: [0,a] \longrightarrow M$, $\gamma(0) = p$, имеющих направление, по отношению $\sim$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\alpha, p, \beta)$ **задает метрику на пространстве направлений.** ■

Конус

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Диаметр** метрического пространства M есть число $\sup_{x,y\in M} d(x,y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (X,d) – метрическое пространство, $\operatorname{diam} X \leqslant \pi$. Рассмотрим топологическое пространство $C(X)$ с топологией фактора, полученное из $X\times[0,\infty[$ склеиванием $X\times\{0\}$ в точку. Определим функцию $d_C:\ C(X)\times C(X) \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ по формуле

$$d(p,q) = \sqrt{t^2+s^2-2ts\cos(d(x,y))},$$

где $p=(x,t), q=(y,s)$. **В скором времени будет доказано, что d_C есть метрика.** Пространство $C(X)$ с вышеописанной метрикой называется **метрическим конусом**, или просто **конусом** над X.

ТЕОРЕМА: **Функция d_C удовлетворяет неравенству треугольника.**

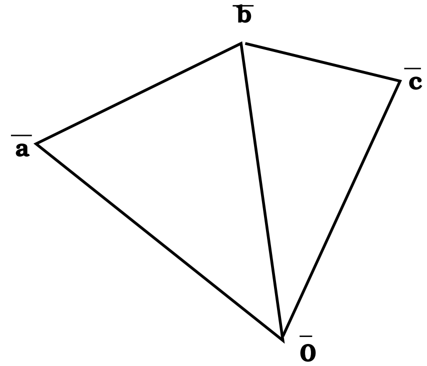
Доказательство. Шаг 1: Пусть $(\alpha,t),(\beta,s)$ – точки в конусе $C(X)$, а $\triangle(\overline{0},\overline{a},\overline{b})$ – треугольник сравнения со сторонами t,s и углом $\measuredangle(\overline{a},\overline{0},\overline{b}) = d(\alpha,\beta)$. **Тогда $d_C(a,b)=|\overline{a},\overline{b}|$.**

Конус (продолжение)

ТЕОРЕМА: Функция d_C удовлетворяет неравенству треугольника.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $(\alpha, t), (\beta, s)$ – точки в конусе $C(X)$, а $\triangle(\overline{0}, \overline{a}, \overline{b})$ – треугольник сравнения со сторонами t, s и углом $\measuredangle(\overline{a}, \overline{0}, \overline{b}) = d(\alpha, \beta)$. **Тогда $d_C(a, b) = |\overline{a}, \overline{b}|$.**

Шаг 2: Пусть $a = (\alpha, r), b = (\beta, s), c = (\gamma, t)$ – три точки на $C(X)$, а $\triangle(\overline{0}, \overline{a}, \overline{b})$, $\triangle(\overline{0}, \overline{b}, \overline{c})$ соответствующие треугольники сравнения, с общей стороной $[\overline{0}, \overline{b}]$, и отложенные по разные стороны от $(\overline{0}, \overline{b})$.



Тогда $d_C(a, c) \leqslant |\overline{a}, \overline{c}| \leqslant |\overline{a}, \overline{b}| + |\overline{b}, \overline{c}| = d_C(a, b) + d_C(b, c)$. ■

Свойства конуса

СВОЙСТВА КОНУСА: 1. Для каждого $x \in X$, **путь $\gamma : [0,a] \longrightarrow C(X)$, переводящий a в (x,a) – кратчайшая.**

2. $x,y \in X$, а $\gamma_1 := (x,[0,a])$, $\gamma_2 := (y,[0,b]) \subset C(X)$ – соответствующие кратчайшие в конусе. **Тогда $\measuredangle(\gamma_1,0,\gamma_2) = d(x,y)$.**

3. **Конус над отрезком длины α изометричен плоскому углу в $\mathbb{R}^2$ величины α.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Предположим, что X – пространство с внутренней метрикой и кратчайшими. **Тогда метрика на $C(X)$ – тоже внутренняя и с кратчайшими.**

Доказательство. Шаг 1: Для каждой кратчайшей $\gamma \in X$, конус $C(\gamma)$ изометричен плоскому углу, значит, **метрика на $C(\gamma)$ внутренняя и с кратчайшими.**

Шаг 2: Любые две точки на конусе лежат на $C(\gamma)$ для подходящей кратчайшей γ. ■

Конус пространства с $\operatorname{diam} > \pi$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть (X,d) – метрическое пространство, $a > 0$, а $d_a(x,y) = \min(d(x,y), a)$. **Тогда d_a – тоже метрика.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (X,d) – метрическое пространство, d_π – метрика на X, определенная выше. Определим **конус** $(C(X), d_C)$ как конус над (X, d_π).

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (X,d) – пространство с внутренней метрикой и кратчайшими. **Тогда метрика d_C на $C(X)$ тоже внутренняя и с кратчайшими.**

Доказательство. Шаг 1: Для каждой кратчайшей $\gamma \in X$ длины $\alpha \leqslant \pi$, конус $C(\gamma)$ изометричен плоскому углу величины α. **Поэтому любые две точки (a,s) и (b,t) с $d(a,b) \leqslant \pi$ можно соединить кратчайшей.**

Шаг 2: Если (a,s) и (b,t) точки, для которых $d_\pi(a,b) = \pi$, расстояние между ними есть $s+t$, а соответствующая кратчайшая – отображение $\gamma: [-s,t] \longrightarrow C(X)$, полученное объединением сегментов

$$\lambda \mapsto (a,\lambda), \lambda \in [-s,0]$$
$$\lambda \mapsto (b,\lambda), \lambda \in [0,t].$$

■

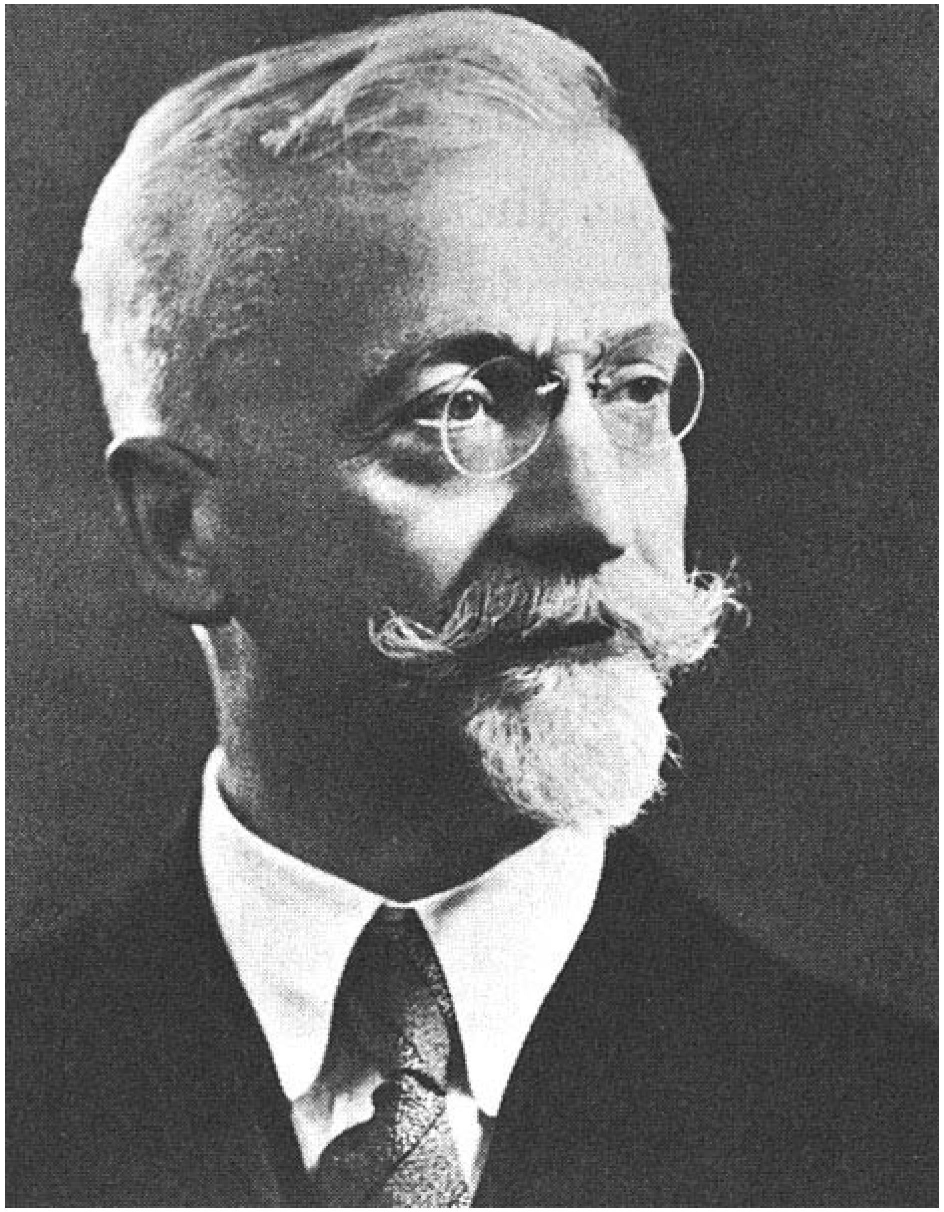
Пространства Александрова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть a, b, c – точки на пространстве (M, d) со строго внутренней метрикой, $r = d(a, b)$, а $\gamma: [0, r] \longrightarrow M$ – кратчайшая с геодезической параметризацией, соединяющая точки (a, b). Рассмотрим функцию $d_c: [0, r] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, переводящую t в $d(c, \gamma(t))$. Пусть $\triangle(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \subset \mathbb{R}^2$ – треугольник сравнения, а $d_{\overline{c}}: [0, r] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ – функция, переводящая t в $d(\overline{c}, \overline{\gamma}(t))$, где $\overline{\gamma}: [0, r] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ обозначает сторону треугольника сравнения с нормальной параметризацией. Функция $d_{\overline{c}}$ называется **функцией сравнения**.

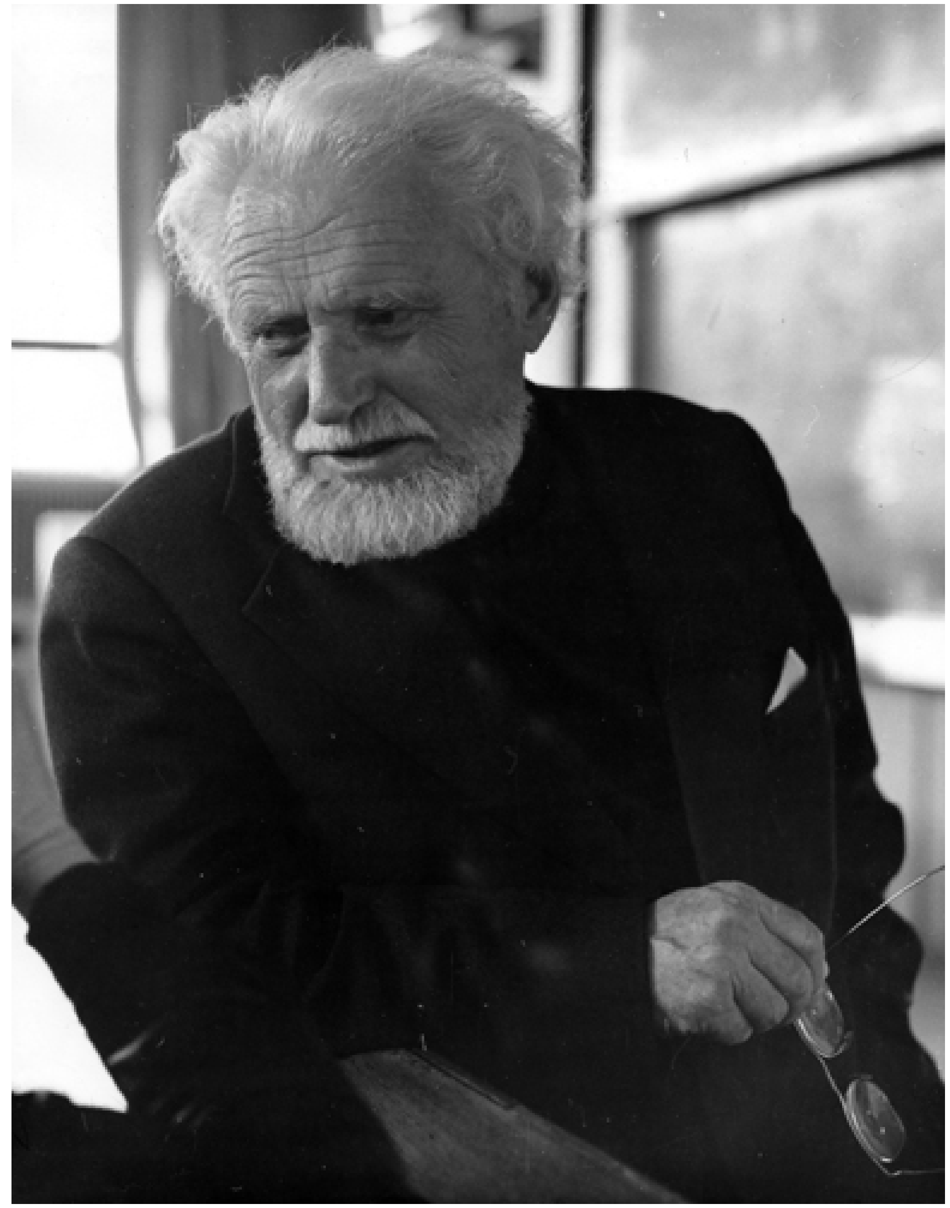
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство M называется **пространством неотрицательной/неположительной кривизны в целом**, если для любых a, b, c, функция сравнения удовлетворяет неравенству $d_c \geqslant d_{\overline{c}}$ (соответственно, $d_c \leqslant d_{\overline{c}}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство M называется **пространством Александрова неотрицательной/неположительной кривизны**, если у каждой точки есть окрестность неотрицательной/неположительной кривизны в целом.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространства неположительной кривизны в целом также называются **CAT(0)-пространствами** (в честь Эли Картана, Д. А. Александрова и В. А. Топоногова).

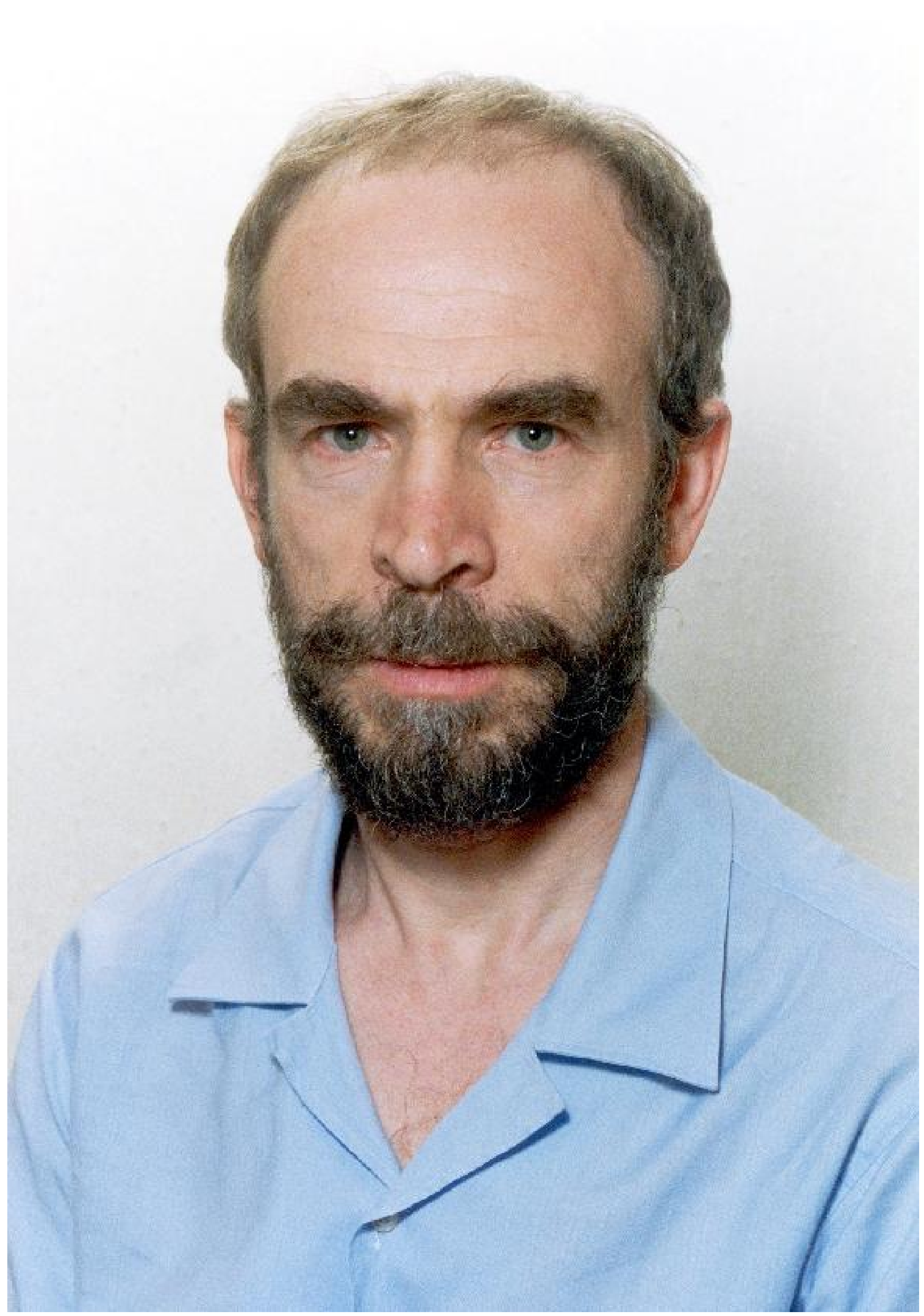


Élie Cartan,
1869-1951



Александр Данилович Александров,
1912-1999

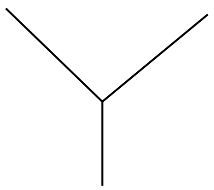
Виктор Андреевич Топоногов,
1930-2004



Михаил Громов
(р. 23 декабря 1943)

Примеры пространств Александрова

ПРИМЕР: Пусть Z – метрический граф, полученный склеиванием трех ребер в точке.



Тогда Z – пространство неположительной кривизны.

ПРИМЕР: Пусть L – окружность длины d с внутренней метрикой, а $C(L)$ – ее конус. Тогда $C(L)$ – **пространство Александрова неположительной кривизны** для $d \leqslant 2\pi$ и **пространство Александрова неотрицательной кривизны для $d \geqslant 2\pi$.**

ПРИМЕР: **Блокнот** есть полиэдральное пространство размерности 2, с метрикой фактора, полученное из нескольких полуплоскостей склейкой по граничной прямой. **Блокнот – пространство неположительной кривизны в целом.**

ПРИМЕР: **Метрический букет** пространств M_i с отмеченной точкой x_i получается из этих пространств склейкой точек x_i в одну (с метрикой фактора). **Метрический букет пространств неположительной кривизны - пространство неположительной кривизны.**

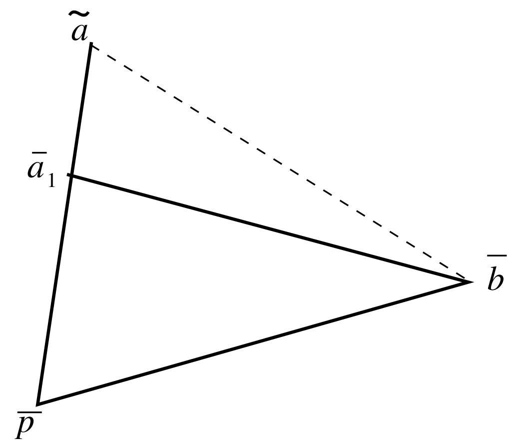
Условие монотонности углов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : [0, a] \longrightarrow M$ – кратчайшие в M, $\gamma_i(0) = p$. Говорится, что **в M выполнено условие монотонности углов (для неположительной/неотрицательной кривизны)**, если угол $\theta(\gamma_1(s), p, \gamma_2(t))$ монотонно возрастает/убывает как функция от s, t.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Условие монотонности углов для неположительной/неотрицательной кривизны **равносильно неположительности/неотрицательности кривизны в целом.**

Условие монотонности углов (продолжение)

Доказательство. Шаг 1: Пусть p, a, b – три точки на метрическом пространстве, а a_1 – точка на кратчайшей, соединяющей a и p. Рассмотрим треугольник сравнения $\triangle(\overline{a}_1, \overline{p}, \overline{b})$ для a_1, p, b, и обозначим на прямой $(\overline{p}, \overline{a}_1)$ точку $\tilde{a}$ таким образом, что $|\overline{p}, \tilde{a}| = d(p, a)$.



Тогда $\theta(a_1, p, b) \leqslant \theta(a, p, b) \Leftrightarrow |\tilde{a}, \overline{b}| \leqslant d(a, b)$, ибо $|\tilde{a}, \overline{b}|$ и $d(a, b)$ - противолежащие стороны треугольников с соседними сторонами $d(p, a)$ и $d(p, b)$ и углом $\theta(a_1, p, b)$ для треугольника $\triangle(\tilde{a}, \overline{p}, \overline{b})$ и $\theta(a, p, b)$ для треугольника $\triangle(\overline{a}, \overline{p}, \overline{b})$.

Шаг 2: Ограничения на кривизну, в свою очередь, равносильны $|\tilde{a}, \overline{b}| \leqslant d(a, b)$ для неположительной кривизны, и $|\tilde{a}, \overline{b}| \geqslant d(a, b)$ для неотрицательной. ■

Углы в пространствах Александрова

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M – пространство Александрова. **Тогда углы между геодезическими кратчайшими в M всегда определены.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Углы $\theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s))$ монотонно растут либо убывают, значит, **соответствующие пределы существуют.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть p – внутренняя точка на краытчайшей γ. Обозначим два сегмента γ, начинающиеся от p, за γ_+ и γ_-. **Смежные углы** суть углы $\measuredangle(\gamma_+, p, \mu)$ и $\measuredangle(\gamma_-, p, \mu)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Сумма смежных углов $\geqslant \pi$ в силу неравенства треугольника для углов.**

Условие сравнения углов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть a, b, c – три точки в метрическом пространстве, а $\triangle(\bar a, \bar b, \bar c)$ – треугольник сравнения. Рассмотрим кратчайшие γ_1, γ_2, соединяющие a с b и a с c. **Условие сравнения углов для неположительной кривизны** есть неравенство $\measuredangle(\gamma_1, a, \gamma_2) \leqslant \measuredangle(\overline{ca}\bar b)$. **Условие сравнения углов для неотрицательной кривизны** есть неравенство $\measuredangle(\gamma_1, a, \gamma_2) \geqslant \measuredangle(\overline{ca}\bar b)$ плюс равенство $\measuredangle(\gamma_+, p, \mu) + \measuredangle(\gamma_-, p, \mu) = \pi$ для любых смежных углов $\measuredangle(\gamma_+, p, \mu)$ и $\measuredangle(\gamma_-, p, \mu)$.

ТЕОРЕМА: **Условие сравнения углов равносильно ограничению на кривизну с тем же знаком.**

Выпуклые функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Подмножество $U \subset M$ метрического пространства называется **выпуклым**, если для любых точек $x, y \in U$, любая кратчайшая, соединяющая x и y, содержится в U. **Граница** U есть множество $\overline{U} \cap \overline{(M \backslash U)}$, полученное как пересечение замыкания U и его дополнения. Выпуклое подмножество **строго выпукло**, если его граница не содержит нетривиальных кратчайших.

ПРИМЕР: Функция $\varphi : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ **выпукла тогда и только тогда, когда $\{(x, y) \mid y \geqslant \varphi(x)\}$ – выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^2$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция на метрическом пространстве называется **выпуклой**, если ее ограничение на любой отрезок кратчайшей выпукло, и **строго выпуклой**, если ее ограничение на любой отрезок кратчайшей $I = [0, a]$ не линейно ни на каком открытом подмножестве $I_1 \subset T$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для любой (строго) выпуклой функции $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$, **множество $\varphi^{-1}(]-\infty, c])$ выпуклое (строго выпуклое)**

■

Выпуклые функции в CAT(0)-пространствах

УТВЕРЖДЕНИЕ: Определим функцию $d_z: M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ на метрическом пространстве формулой $d_z(x) := d(z,x)$. **Пусть M – CAT(0)-пространство. Тогда d_z выпукла,** и она строго выпукла на каждой геодезической, не проходящей через z.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $\gamma: [0,t] \longrightarrow M$ – кратчайшая, соединяющая a и b, а $\triangle(\overline{a}, \overline{b}, \overline{z})$ – треугольник сравнения. Тогда $d_z \leqslant d_{\overline{z}}$, но последняя функция выпукла, что дает

$$d_z(\lambda t) \leqslant d_{\overline{z}}(\lambda t) < \lambda d_{\overline{z}}(0) + (1-\lambda) d_{\overline{z}}(t) = \lambda d_z(0) + (1-\lambda) d_z(t). \quad \blacksquare$$

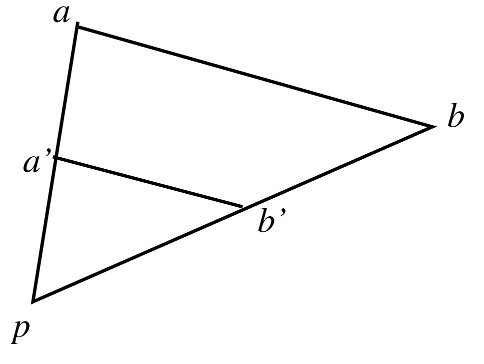
УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть d_z строго выпукла на каждой геодезической, не приходящей через z. Тогда **z соединяется с любой точкой M не более чем одной кратчайшей.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть существуют две кратчайшие A и B, соединяющие z и y, а a и b – середины этих кратчайших. Если a и b всегда совпадают, доказывать нечего. Если же они не совпадают, рассмотрим кратчайшую C, соединяющую a и b. Функция d_z строго выпукла на C, из чего следует, что для любой $c \in C$, $d(z,c) < 1/2d(z,y)$. По той же причине, $d(y,c) < 1/2d(z,y)$. Это противоречит неравенству треугольника: $d(y,c) + d(z,c) < 1/2d(z,y) + 1/2d(z,y) = d(z,y)$. $\blacksquare$

Расстояние до геодезической в CAT(0)-пространстве

ЛЕММА: (лемма о выпуклости) Пусть $\gamma_i: [0, t_i] \longrightarrow M$ – кратчайшие геодезические в CAT(0)-пространстве, а $\kappa: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ переводит $u \in [0,1]$ в $d(\gamma_1(t_1 u), \gamma_2(t_2 u))$. **Тогда κ выпукла.**

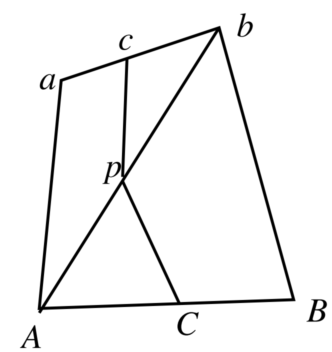
Доказательство. Шаг 1: Пусть $\gamma_i: [0, t_i] \longrightarrow M$ – кратчайшие геодезические в CAT(0)-пространстве, $\gamma_i(0) = p$, $\gamma_1(t_1) = a, \gamma_2(t_2) = b$. Выберем $0 < \lambda < 1$, и пусть $a' = \gamma_1(\lambda t_1), b' = \gamma_2(\lambda t_2)$. **Тогда $d(a', b') \leqslant \lambda d(a, b)$,**



в силу монотонности углов.

Расстояние до геодезической в CAT(0)-пространстве (продолжение)

Шаг 2: Пусть a, b, A, B – точки в CAT(0)-пространстве, c, C – середины кратчайших, соединяющих a, b и A, B, а p – середина кратчайшей, соединяющей A и b.



Применив шаг 1, получим, что $d(c,p) + d(p,C) \leqslant \frac{1}{2}(d(a,A) + d(b,B))$, а из неравенства треугольника следует $d(c,C) \leqslant d(c,p) + d(p,C)$. **Это дает неравенство $\kappa(1/2) < \frac{1}{2}(\kappa(0) + \kappa(1))$.**

Шаг 3: Получаем, что для любого отрезка $[a,b] \subset [0,1]$,

$$\kappa\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(\kappa(a) + \kappa(b)).$$

Шаг 4: Для любой непрерывной функции $\kappa: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, **неравенство $\kappa(\frac{a+b}{2}) \leqslant \frac{1}{2}(\kappa(a) + \kappa(b))$ влечет выпуклость** (проверьте). ■

Равномерная сходимость геодезических

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Определим **расстояние** между функциями $\gamma_i : [0, t_i] \longrightarrow M$ по формуле $d_\Gamma(\gamma_1, \gamma_2) := \sup_x d\left(\gamma_1(x/t_1), \gamma_2(x/t_2) f_2(x)\right).$

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что это метрика.

ТЕОРЕМА: Пусть M – CAT(0)-пространство, а $\gamma_i : [0, t_i] \longrightarrow M$ – последовательность кратчайших геодезических, такая, что концы $a_i := \gamma_i(0)$, $b_i := \gamma_i(t_i)$ сходятся к точкам a, b. Пусть $\gamma : [0, t] \longrightarrow M$ – кратчайшая геодезическая, соединяющая a и b. Тогда **последовательность γ_i равномерно сходится к γ.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В силу леммы о выпуклости,
$d_\Gamma(\gamma_i, \gamma) = \max(d(a_i, a), d(b_i, b))$, то есть **сходимость γ_i равносильна сходимости их концов.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: В доказательстве использовалось следующее полезное утверждение. Пусть γ, γ' – кратчайшие геодезические в CAT(0)-пространстве, а a, b и a', b' – их концы. Тогда $d_\Gamma(\gamma, \gamma') = \max(d(a, a'), d(b, b'))$

СЛЕДСТВИЕ: Обозначим за $\Gamma_p(M)$ пространство кратчайших геодезических с началом в p и метрикой d_Γ, и пусть $\pi : \Gamma_p(M) \longrightarrow M$ отображает геодезическую в ее второй конец. **Тогда π – изометрия.** ■

Гомотопии и пространство кратчайших геодезических

Зафиксируем точку p в CAT(0)-пространстве. Пусть $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, а $P_\lambda : M \longrightarrow M$ отображает геодезическую $\gamma : [0,t] \longrightarrow M$ в $\gamma\Big|_{[0,\lambda t]}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: На $M \cong \Gamma_p(M)$ это отображение определяется следующим образом. Для какой-то точки $x \in M$, рассмотрим кратчайшую $\gamma_x : [0, d(p,x)] \longrightarrow M$, соединяющую p с x. **Тогда $P_\lambda : M \longrightarrow M$ отображает x в $\gamma_x(\lambda d(p,x))$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу того, что M изометрично пространству геодезических с началом в p, **P_λ задает непрерывное отображение из $M \times [0,1]$ в M.**

СЛЕДСТВИЕ: **P_λ задает гомотопию между тождественным отображением из M в себя и отображением, переводящим M в $\{p\}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы доказали, что **все CAT(0)-пространства стягиваемы.**

Радиус выпуклости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – пространство Александрова неположительной кривизны. **Нормальный шар** в M есть шар $B_\varepsilon(x)$, который является CAT(0)-пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – пространство Александрова неположительной кривизны. **Радиус выпуклости** в точке $x \in M$ есть супремум всех ε таких, что шар $B_\varepsilon(x)$ – нормальный. Обозначим радиус выпуклости за $\rho(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Функция $x \longrightarrow \rho(x)$ 1-липшицева,** в силу стандартного аргумента.

ЗАМЕЧАНИЕ: Общая форма "стандартного аргумента". Пусть в множестве всех шаров есть подмножество $\mathfrak{S}$ такое, что для каждого шара $B_r(x) \in \mathfrak{S}$, все шары, содержащиеся в $B_r(x)$, тоже принадлежат $\mathfrak{S}$. **Тогда функция $\rho_{\mathfrak{S}}(x) := \sup_r \{r \mid B_r(x) \in \mathfrak{S}\}$ 1-липшицева.**

УПРАЖНЕНИЕ: **Докажите это**.

Кратчайшие и геодезические

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Геодезическая (не обязательно кратчайшая) есть путь $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ такой, что у каждой точки $x \in [0,t]$ есть связная окрестность U_x такая, что $\gamma\Big|_{U_x}$ – кратчайшая геодезическая. Обозначим за $\Gamma(M)$ пространство всех геодезических, с метрикой d_γ, и за $\Gamma_p(M)$ пространством геодезических с началом в p.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Радиус выпуклости для множества $Z \subset M$ есть $\inf_{z\in Z} \rho(z)$, где ρ есть радиус выпуклости в точке z.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\gamma : [0,t] \longrightarrow M$, $\gamma' : [0,t'] \longrightarrow M$ – геодезические в пространстве Александрова неположительной кривизны, радиус выпуклости γ равен ε, а $d_\Gamma(\gamma,\gamma') < \varepsilon$. Определим $\kappa : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ по формуле $\kappa(u) := d(\gamma(ut), \gamma'(ut'))$. **Тогда κ – выпуклая функция.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выпуклость – локальное свойство, а локально γ и γ' разбиваются в объединение сегментов кратчайших, которые лежат в нормальных шарах. ■

Кратчайшие и геодезические (продолжение)

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $\gamma: [0,t] \longrightarrow M$, $\gamma': [0,t'] \longrightarrow M$ – геодезические в пространстве Александрова неположительной кривизны, радиус выпуклости γ равен ε, а $d_\Gamma(\gamma,\gamma') < \varepsilon$. **Тогда расстояние между геодезическими есть максимум расстояния между концами.**

СЛЕДСТВИЕ: Рассмотрим отображение $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$, переводящее геодезическую в ее второй конец. Пусть ε – радиус выпуклости для γ. Тогда **для каждого ε-шара $B_\varepsilon(\gamma) \subset \Gamma_p(M)$, ограничение $\pi\big|_{B_\varepsilon(\gamma)}$ задает изометрию $B_\varepsilon(\gamma)$ и шара $B_\varepsilon(\pi(\gamma))$.**

Теорема Картана-Адамара

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Полное, односвязное пространство Александрова неположительной кривизны называется **пространством Адамара**

ТЕОРЕМА: (Картан-Адамар) Пусть M – пространство Адамара. Рассмотрим отображение $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$, переводящее геодезическую в ее второй конец. **Тогда π – гомеоморфизм.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. следующий слайд.

СЛЕДСТВИЕ: **Геодезическая, соединяющая две точки пространства Адамара, единственна.** ■

СЛЕДСТВИЕ: **Каждое пространство Адамара стягиваемо.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Аргумент, который доказывает стягиваемость CAT(0)-пространств, работает и в этой ситуации. ■

Нетривиальное следствие из теоремы Картана-Адамара:

ТЕОРЕМА: **Любое пространство Адамара является CAT(0)-пространством.**

Доказательство см. в листочках.

Доказательство теоремы Картана-Адамара

ТЕОРЕМА: (Картан-Адамар) Пусть M – полное пространство Александрова неположительной кривизны. Рассмотрим отображение $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$, переводящее геодезическую в ее второй конец. **Тогда π – накрытие.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $X \longrightarrow Y$ – локальная изометрия полных метрических пространств с внутренней метрикой, причем у каждой точки есть окрестность, в которой геодезические единственны. Мы говорим, что имеет место **принцип накрывающей гомотопии для геодезических:** для каждой геодезической γ в Y, поднятие γ в X существует, и единственным образом определяется значением $\gamma(t)$ для какого-то $t \in \mathbb{R}$.

Шаг 2: Пусть $X \longrightarrow Y$ – локальный гомеоморфизм, удовлетворяющий принципу накрывающей гомотопии для геодезических, а у каждой точки Y есть геодезически выпуклая окрестность. **Тогда $X \longrightarrow Y$ – накрытие.**

Шаг 3: Принцип накрывающей гомотопии для геодезических выполнен для $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$. Действительно, рассмотрим нормальный шар B в M, и пусть B_1 – связная компонента его прообраза. Рассмотрим геодезическую τ, замкнутую в B. Обозначим за $\tau_0 \subset B_1$ объединение всех связных сегментов поднятий геодезической τ, которые проходят через заданную точку $x \in B_1$. Геодезическая τ поднимается в B_1 локально, поскольку π это локальная изометрия, значит, $\pi(\tau_0)$ открыт в τ. предел геодезических это геодезическая, значит, $\pi(\tau_0)$ замкнут в B_1. Мы получили принцип накрывающей гомотопии для геодезических, лежащих в B. Склеивание геодезических из сегментов дает принцип накрывающей гомотопии для всех геодезических. ■