Свойство (T) Каждана

лекция 2: экспандеры

Миша Вербицкий

30 июля 2016

Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия VI"
24 - 31 июля, 2016, ЯГПУ, Ярославль, Россия

Решетки в группах Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа Ли** есть гладкое многообразие, снабженное групповой структурой, таким образом, что групповые операции $x, y \longrightarrow xy$ и $x \longrightarrow x^{-1}$ суть гладкие отображения.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть G – группа Ли, $\Gamma \subset G$ – дискретная подгруппа, а $\Gamma\backslash G$ – фактор по левому действию Γ. **Докажите, что $\Gamma\backslash G$ есть гладкое, хаусдорфово многообразие.**

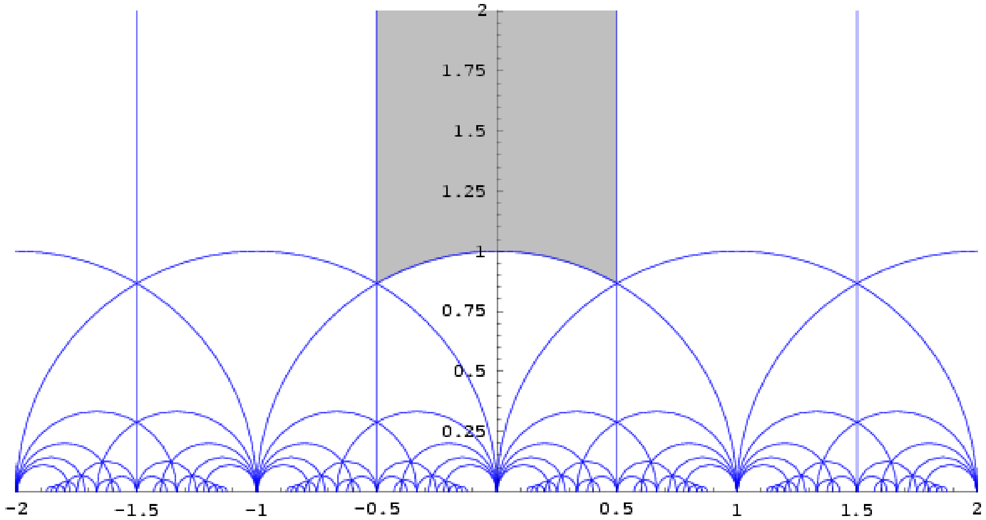
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: В этих условиях, возьмем левую меру Хаара μ на G. Поскольку отображение $\pi : \ G \longrightarrow \Gamma\backslash G$ – накрытие, у каждой точки есть окрестность U, диффеоморфная шару, такая, что $\pi^{-1}(U) = \Gamma \cdot U$ есть объединение $|\Gamma|$ шаров, диффеоморфных U. Определим **меру Хаара** μ_Γ на $\Gamma\backslash G$ формулой $\mu_\Gamma(U) = \mu(U_1)$, где U_1 есть любой из связных прообразов U, при условии, что U_1 диффеоморфен U.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это то же самое, что **определить μ_Γ дифференциальной формой η такой, что $\pi^*\eta$ есть форма объема меры Хаара.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\Gamma \subset G$ – дискретная подгруппа группы G. Она называется **решеткой**, если она имеет **конечный кообъем:** $\mu_\Gamma(\Gamma\backslash G) < \infty$, то есть фактор G по Γ имеет конечную меру Хаара.

Фундаментальная область

ЗАМЕЧАНИЕ: $\Gamma \subset G$ является решеткой $\Leftrightarrow$ фундаментальная область ее действия на G имеет конечный объем.



Фундаментальная область группы $SL(2,\mathbb{Z})$ действующей на верхней полуплоскости дробно-линейными преобразованиями.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из этой картинки следует, что **$SL(2,\mathbb{Z})$ есть решетка в $SL(2,\mathbb{R})$.** Действительно, фундаментальная область Ω действия $\Gamma := SL(2,\mathbb{Z})$ в плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2 = SL(2,\mathbb{R})/S^1$, нарисованная на картинке, имеет конечный объем. Из этого следует, что фундаментальная область Γ на $SL(2,\mathbb{R})$ (расслоенная над Ω со слоем S^1) тоже имеет конечный объем.

Теорема Бореля и Хариш-Чандры

ЗАМЕЧАНИЕ: Можно доказать, что $SL(n,\mathbb{Z})$ имеет конечный кообъем в $SL(n,\mathbb{R})$, пользуясь **теоремой Минковского:** каждое центрально-симметричное выпуклое тело объема 2^n содержит точку решетки $\mathbb{Z}^n\subset\mathbb{R}^n$ объема 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть G – группа Ли, содержащая решетку. **Тогда G унимодулярна.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $x\in G$ **действует справа на** $\Gamma\backslash G$ **и умножает меру Хаара на константу** $\chi(x)$. С другой стороны, $(R_x\mu_\Gamma)(\Gamma\backslash G)=\chi(x)\mu_\Gamma(\Gamma\backslash G)$. Поскольку объем многообразия инвариантен относительно диффеоморфизмов, $\chi(x)=1$. ■

ТЕОРЕМА: (Борель и Хариш-Чандра)
Пусть $G\subset GL(n,\mathbb{R})$ группа Ли, заданная набором полиномиальных уравнений с рациональными коэффициентами. Предположим, что не существует нетривиальных гомоморфизмов из G в $GL(1,\mathbb{R})$, определенных полиномами с рациональными коэффициентами. **Тогда группа $G_{\mathbb{Z}}=G\cap SL(n,\mathbb{Z})$ является решеткой в G.**

Арифметические решетки и теорема Маргулиса об арифметизации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $G \subset GL(n)$ – подгруппа, заданная системой полиномиальных уравнений над $k = \mathbb{R}$ или $k = \mathbb{C}$. Тогда G называется **алгебраической группой**. Дискретные подгруппы $\Gamma, \Gamma' \subset G$ называются **соизмеримыми**, если $\Gamma \cap \Gamma'$ имеет конечный индекс в Γ и в Γ'. **Арифметическая решетка** в алгебраической группе G есть решетка, которая соизмерима с $G \cap GL(n, \mathbb{Z})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – полупростая группа Ли. Ее **подгруппа Картана** есть максимальная абелева подгруппа H, нормализатор которой имеет размерность $\dim H$. Ее **вещественный ранг** есть размерность фактора H по максимальному компактному подтору.

ТЕОРЕМА: (теорема Маргулиса об арифметизации)
Пусть $\Gamma \subset G$ – решетка в простой алгебраической группе Ли G, с вещественным рангом > 2. **Тогда Γ сопряжена арифметической решетке.**

Унитарные представления

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Топологическая группа есть группа G, снабженная топологией, таким образом, что операции умножения и взятия обратного непрерывны. **Топология на G предполагается метризуемой,** в частности – хаусдорфовой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Унитарное представление группы G есть гомоморфизм из G в группу линейных изометрий гильбертова пространства H такой, что функция $h \longrightarrow g(h)$ непрерывна как функция g для любого $h \in H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Неприводимое представление есть представление G в гильбертовом пространстве H такое, что H не содержит **подпредставлений**, то есть замкнутых, G-инвариантных подпространств.

Свойство Каждана (Т)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Напомню, что **диаметр** метрического пространства M есть $\operatorname{diam}(M) := \sup_{x,y\in M} d(x,y)$ Пусть H есть унитарное представление локально компактной группы G, а $\{\xi_i\} \subset H$ – последовательность единичных векторов. Она называется **почти инвариантной**, если для каждого компакта $K \subset G$, имеем $\lim_i \operatorname{diam}(K\xi_i) = 0$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G **удовлетворяет свойству Каждана (Т)**, если любое унитарное представление G, содержащее почти инвариантные векторы, содержит G-инвариантный вектор.

Основные теоремы из работы Каждана 1967 года.

ТЕОРЕМА: Пусть G – группа Ли, а $\Gamma \subset G$ – решетка, то есть дискретная подгруппа конечного кообъема. Тогда **свойство Каждана (Т) для G равносильно свойству (Т) для Γ.**

(будет сегодня)

ТЕОРЕМА: Группа $SL(n,\mathbb{R})$ обладает свойством Каждана (Т) для каждого $n > 2$ и не обладает им для $n = 2$.

(завтра)

Свойство Каждана (T) и почти инвариантные векторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\tilde{G}$ – множество классов эквивалентности унитарных представлений G, $\rho: G \longrightarrow U(H)$ – ее унитарное представление а $K \subset G$ какой-то компакт. Обозначим за $W(H, K, \varepsilon)$ все представления $\rho: G \longrightarrow U(H')$ такие, что для каких-то единичных векторов $v \in H, v' \in H'$, имеем $\sup_{g\in K} ||g(v) - v| - |v' - g(v')|| < \varepsilon$. Топология на $\tilde{G}$, заданная предбазой из всех $W(H, K, \varepsilon)$, называется **топология Фелла**.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Эта топология нехаусдорфова.** Действительно, **каждое подпредставление $H_1 \subset H$ содержится в замыкании H.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Локально компактная группа G **обладает свойством Каждана (T)**, если любое представление G, в замыкании которого лежит тривиальное представление $\mathbb{I}_G$, содержит неподвижный вектор.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть G получена счетным объединением компактов **("σ-компактна")**. **Тогда это равносильно определению через почти инвариантные векторы.** Действительно, пусть в замыкании представления H лежит $\mathbb{I}_G$, а ... $\subset K_i \subset K_{i+1} \subset$ ... – последовательность компактов, исчерпывающая G, и содержащая 1. Обозначим за ξ_i единичный вектор из H такой, что $\operatorname{diam}(K_i \cdot \xi_i) < \frac{1}{2^i}$. Тогда $\{\xi_i\}$ – почти инвариантные векторы. Наоборот, если есть почти инвариантные векторы $\{\xi_i\} \subset H$, соответствующие им функции $g \longrightarrow |g(\xi_i) - \xi|$ сходятся к нулю на компактах.

Проекции почти инвариантных векторов

Предложение 1: Пусть G – группа со свойством (Т), H ее представление, а $\{\xi_i\} \subset H$ – почти инвариантная последовательность. Рассмотрим ортогональную проекцию $\Pi_{inv}: H \longrightarrow H^G$ на пространство G-инвариантов. **Тогда** $\lim_i |\xi_i - \Pi_{inv}(\xi_i)| = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Вектор $a_i := \xi_i - \Pi_{inv}(\xi_i)$ лежит в представлении, не имеющем почти инвариантных векторов, значит, существует $g \in G$ такой, что

$$\limsup_i |a_i|^{-1} |g(a_i) - a_i| > 0. \qquad (*)$$

В силу почти инвариантности,

$$\lim_i |g(\xi_i) - \xi_i| = 0, \qquad (**)$$

а $\xi_i = a_i + G$-инвариантный вектор. Сравнивая (*) и (**), получаем, что $\lim_i |a_i| = 0$.

Свойство Каждана (T) для решеток (1)

ТЕОРЕМА: Пусть G – группа Ли, а $\Gamma \subset G$ – решетка, то есть дискретная подгруппа конечного кообъема. Тогда **свойство Каждана (T) для G равносильно свойству (T) для Γ.**

Доказательство импликации "(T) для Γ" $\Rightarrow$ "(T) для G":
Пусть $\{\xi_i\}$ – почти инвариантные векторы в H. Обозначим за H^Γ пространство Γ-инвариантных векторов. В силу Предложения 1, проекция Π^Γ на H^Γ удовлетворяет $\lim_i |\xi_i - \Pi_{inv}(\xi_i)| = 0$: в H^Γ существуют почти инвариантные векторы. Значит, достаточно доказать, что H^Γ содержит G-инвариантные векторы, и **можно без ограничения общности предположить, что Γ действует на H тривиально.**

Шаг 2: Обозначим за μ вероятностную меру на G/Γ, согласованную с мерой Хаара на G. Пусть $K \subset G$ – компактное подмножество такое, что его образ в G/Γ имеет меру $1-\varepsilon$. Рассмотрим отображение $G/\Gamma \longrightarrow H$, переводящее g в $g(\xi_i)$. Это непрерывная, ограниченная единицей функция на G/Γ, причем $\lim\sup_{g\in K} |g(\xi_i) - \xi_i| = 0$. Из этого следует, что $\int_{g\in G/\Gamma} |g(\xi_i) - \xi_i|\mu < 2\varepsilon$ для $i \gg 0$. Обозначим за ξ' усредненный вектор $\int_{g\in G/\Gamma} g(\xi_i)$, и пусть $\Xi := \xi'|\xi'|^{-1}$. По построению, **Ξ – G-инвариантный вектор, который удовлетворяет $|\Xi| > 1-2\varepsilon$.** ■

Индуцированные представления

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\Gamma \subset G$ дискретная подгруппа в G, а V – представление Γ. Рассмотрим локальную систему (оно же: плоское векторное расслоение, оно же: локально тривиальный пучок) $\mathcal{B}$ на G/Γ со слоем V с монодромией, определенной Γ. Сечения $\mathcal{B}$ суть функции $f: G \longrightarrow V$ удовлетворяющие $f(\gamma g) = \gamma f(g)$ для любых $g \in G$, $\gamma \in \Gamma$. На таких функциях действует G по формуле $g_1(f)(g) := f(gg_1^{-1})$. Пространство L^2-интегрируемых сечений $f: G/\Gamma \longrightarrow \mathcal{B}$, удовлетворяющих $f(\gamma g) = \gamma f(g)$, называется **индуцированным представлением**, и обозначается как $\operatorname{Ind}_\Gamma^G(V)$.

ПРИМЕР: Если Γ тривиальна, а V одномерно, то $\operatorname{Ind}_\Gamma^G(V)$ есть регулярное представление.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\Gamma \subset G$ – решетка в G, μ – вероятностная мера на G/Γ, согласованная с мерой Хаара, а $v \in \operatorname{Ind}_\Gamma^G(V)$ – G-инвариантный вектор, заданный отображением $G \longrightarrow V$. Поскольку v Γ-инвариантный, его можно рассматривать как отображение $v: G/\Gamma \longrightarrow V$, которое инвариантно относительно действия G на V-значных функциях на G/Γ. Значит, $\int_{g\in G/\Gamma} v(g)$ есть Γ-инвариантный вектор в V. **Мы построили биекцию между Γ-инвариантными векторами в V и G-инвариантными векторами в $\operatorname{Ind}_\Gamma^G(V)$.**

Свойство Каждана (T) для решеток (2)

ТЕОРЕМА: Пусть G – группа Ли, а $\Gamma \subset G$ – решетка, то есть дискретная подгруппа конечного кообъема. Тогда **свойство Каждана (T) для G равносильно свойству (T) для Γ.**

Доказательство импликации "(T) для Γ" $\Leftarrow$ "(T) для G":

Шаг 1: Пусть $\{\xi_i\}$ – почти инвариантные векторы в унитарном представлении Γ, обозначенном как V, μ – вероятностная мера Хаара на G/Γ, а $O \subset G$ – фундаментальная область действия Γ. Зафиксируем отображение $\psi_i: \ G = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(O) \longrightarrow V$, переводящее $x \in \gamma(O)$ в $\gamma(\xi_i)$. По построению, $\psi_i \in \operatorname{Ind}_\Gamma^G(V)$,

Шаг 2: Докажем, что ψ_i – почти инвариантные векторы. Рассмотрим компакт $K \subset G$, лежащий в $\bigcup_{j=1}^n \gamma_j(O)$. Обозначим за K_0 множество $\bigcup_{j=1}^n \gamma_j \subset \Gamma$. Поскольку $\operatorname{diam} K \cdot \psi_i = \operatorname{diam} K_0 \cdot \xi_i$, **мы имеем $\lim_i(\operatorname{diam} K \cdot \psi_i) = 0$, то есть $\{\psi_i\}$ почти инвариантны.**

Шаг 3: Поскольку G обладает свойством (T), а $\operatorname{Ind}_\Gamma^G(V)$ содержит почти инвариантные векторы, $\operatorname{Ind}_\Gamma^G(V)$ содержит инвариантные векторы. **В силу предыдущего замечания, из этого следует, что V содержит инвариантные векторы.** ■

Константа Чигера

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть Γ это граф, а $K \subset \Gamma$ набор вершин. Обозначим за ∂K все вершины, соединенные с K, но не лежащие в K. Множество ∂K называется **границей K**. **Константа Чигера**, она же **изопериметрическая константа** графа Γ есть $h(\Gamma) := \min \frac{|\partial K|}{|K|}$ по всем подмножествам вершин $K \subset \Gamma$ с $|K| \leqslant \frac{1}{2}|\Gamma|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Граф называется **k-регулярным**, если с каждой вершиной соединено ровно k вершин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **ε-экспандер** есть регулярный граф, удовлетворяющий $h(\Gamma) \geqslant \varepsilon$.

A. N. Kolmogorov and Y. M. Barzdin, "On the realization of networks in three-dimensional space" in Selected Works of Kolmogorov, vol. 3, Kluwer, Dordrecht, 1993, 194-202.

M. S. Pinsker, "On the complexity of a concentrator", Proceedings of the Seventh International Teletraffic Congress (Stockholm, 1973), pp. 318/1-318/4, Paper No. 318.

M. S. Pinsker

Марк Семенович Пинскер
(24 апреля 1925 - 23 декабря 2003)

1976, Ленинград

Оператор смежности

Пусть Γ – граф, а $V(\Gamma)$ – векторное пространство, свободно порожденное его вершинами. Мы будем рассматривать $V(\Gamma)$ как пространство функций на вершинах. На $V(\Gamma)$ определено скалярное произведение (сумма квадратов значений на всех вершинах).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Оператор смежности** графа Γ переводит вектор $v \in V(\Gamma)$, соответствующий вершине v, в сумму всех вершин, связанных с v ребрами. Соответствующая матрица называется **матрицей смежности** графа.

ЗАМЕЧАНИЕ: Основное применение графа-экспандера в том, что его матрица смежности перемешивающая, то есть соответствующий оператор (который может быть представлен как случайное блуждание по графу) **"очень быстро" приводит каждую функцию к постоянной.**

Спектральный зазор графа-экспандера

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть Γ – k-регулярный граф, а $A: V(\Gamma) \longrightarrow V(\Gamma)$ его матрица смежности. Легко видеть, что A – самосопряженный оператор. Упорядочим его собственные значения по убыванию: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{|\Gamma|}$. **Тогда $\lambda_1 = k$, соответствующее собственное пространство – константы, а $\lambda_2 < k$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Спектральный зазор** графа есть число $k - \lambda_2$.

ТЕОРЕМА: **(неравенство Чигера для графа; Tanner, Alon, Milman)** Пусть Γ – k-регулярный граф, а h – его константа Чигера. **Тогда**

$$\frac{k-\lambda_2}{2} \leqslant h \leqslant \sqrt{2k(k-\lambda_2)}.$$

Оценка спектрального зазора

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку A самосопряжен, **собственные пространства, соответствующе $\lambda_i, i > 0$, ортогональны постоянным функциям,** то есть их среднее равно 0.

ЗАМЕЧАНИЕ: Довольно легко оценить константу Чигера графа в терминах спектрального зазора $k - \lambda_1$. Пусть $K \subset \Gamma$ – набор вершин, а f функция, принимающая на K значение $\frac{1}{|K|}$, а на его дополнении значение $-\frac{1}{|\Gamma|-|K|}$. Поскольку f ортогонально постоянной, $(A(f), f) \leqslant \lambda_2 |f|^2$. С другой стороны, вне $R := \partial K \cup \partial(\Gamma \backslash K)$, $A(f) = kf$, что дает

$$(A(f), f) \geqslant k|f|^2 - |R||K|^{-2}.$$

Деля на $|f|^2 = |K|^{-1} + (|\Gamma| - |K|)^{-1}$, получаем

$$\lambda_2 = \sup_{f \perp \mathrm{const}} (A(f), f)|f|^{-2} \geqslant k - |R||K|^{-2}|f|^{-2} \geqslant k - 2|R||K|^{-1} \geqslant k - 2h(\Gamma)$$

Это дает первое из неравенств. Второе остается в качестве (трудного) упражнения.

Случайные графы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть Γ – множество из n элементов. Мы соединяем каждую точку γ с k вершинами случайным образом (выбор каждой из точек Γ равновероятен). Полученный граф называется **случайный регулярный граф с n вершинами и k ребрами**.

Посчитаем вероятность того, что Γ ε-экспандер.

Пусть $K \subset \Gamma$ множество вершин с $|K| < 1/2|\Gamma|$. Граф не является экспандером, если все соседи K лежат в множестве T, состоящем из $\leqslant (1+\varepsilon)|K|$ вершин. Вероятность того, что для всех вершин из K концы всех ребер лежат в T, равна $\left(\frac{|T|}{n}\right)^{|K|}$. Мы получили такое

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Вероятность $\nu(n,k,\varepsilon)$ того, что случайный граф с n вершинами валентности k не ε-экспандер, есть $\sum_{K,T}\left(\frac{|T|}{n}\right)^{k|K|}$,** где суммирование происходит по всем $K \subset \Gamma$ с $|K| < 1/2|\Gamma|$ и $T \subset \Gamma$ с $|T| \leqslant (1+\varepsilon)|K|$.

Случайные графы (2)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Вероятность $\nu(n,k,\varepsilon)$ того, что случайный граф не экспандер, есть $\sum_{K,T}\left(\frac{|T|}{n}\right)^{k|K|}$, где суммирование происходит по всем $K\subset\Gamma$ с $|K|<1/2|\Gamma|$ и $T\subset\Gamma$ с $|T|\leqslant(1+\varepsilon)|K|$.

Это дает

$$\nu(n,k,\varepsilon)\leqslant\sum_{i=1}^{n/2}C_n^s C_n^{(1+\varepsilon)s}\left(\frac{(1+\varepsilon)s}{n}\right)^{ks}$$

оценим по формуле Стирлинга $C_n^s<\left(\frac{ne}{s}\right)^s$. Получим

$$\nu(n,k,\varepsilon)<\sum_{s=1}^{n/2}\left(\frac{ne}{s}\right)^s\left(\frac{ne}{(1+\varepsilon)s}\right)^{(1+\varepsilon)s}\left(\frac{(1+\varepsilon)s}{n}\right)^{ks}=$$

$$=\sum_{s=1}^{n/2}\left[\left(\frac{ne}{s}\right)\left(\frac{ne}{(1+\varepsilon)s}\right)^{(1+\varepsilon)}\left(\frac{(1+\varepsilon)s}{n}\right)^{k}\right]^s=$$

$$=\sum_{s=1}^{n/2}\left[\frac{e^{(2+\varepsilon)}}{(1+\varepsilon)^{1+\varepsilon}}(1+\varepsilon)^k\left(\frac{s}{n}\right)^{k-(2+\varepsilon)}\right]^s=\sum_{s=1}^{n/2}\left[e^{(2+\varepsilon)}(1+\varepsilon)^{k-1-\varepsilon}\left(\frac{s}{n}\right)^{k-2-\varepsilon}\right]^s$$

Случайные графы (3)

Вероятность $\nu(n,k,\varepsilon)$ того, что случайный граф не экспандер:

$$\nu(n,k,\varepsilon) \leqslant \sum_{s=1}^{n/2} \left[e^{(2+\varepsilon)}(1+\varepsilon)^{k-1-\varepsilon} \left(\frac{s}{n}\right)^{k-2-\varepsilon} \right]^s$$

Поскольку $n \geqslant 2s$, выражение в квадратных скобках оценивается как

$$e^{(2+\varepsilon)}(1+\varepsilon)^{k-1-\varepsilon} \left(\frac{s}{n}\right)^{k-2-\varepsilon} \leqslant 2e^{(2+\varepsilon)} \left(\frac{(1+\varepsilon)}{2}\right)^k$$

Для любого $\varepsilon < 1$ и $k \gg 0$ это число меньше $1/2$, соответственно сумма в выражении для $\nu(n,k,\varepsilon)$ меньше 1.

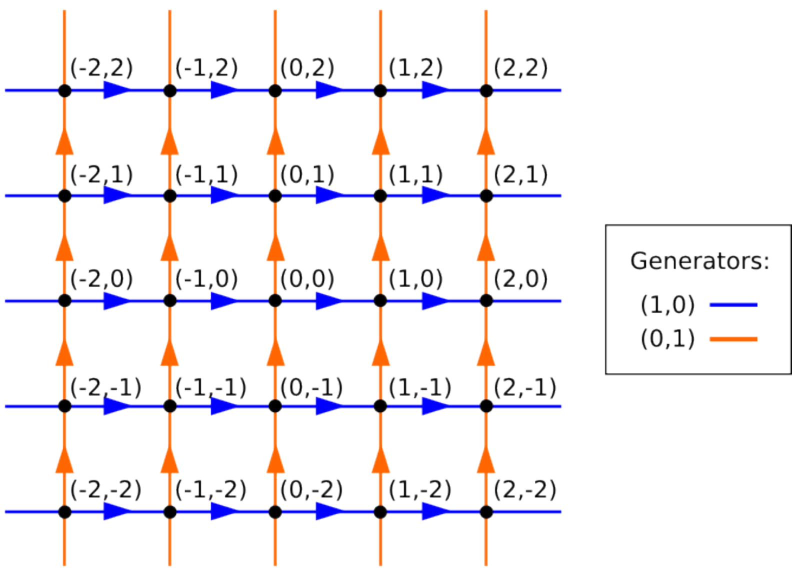
СЛЕДСТВИЕ: (теорема Пинскера)
Для каждого $\varepsilon < 1$, **случайный регулярный граф валентности $k > k(\varepsilon)$ с положительной вероятностью есть граф-экспандер.**

Граф Кэли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Набор образующих** группы G есть множество элементов S, мультипликативно порождающих G. **В дальнейшем, мы будем всегда предполагать, что $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$.**

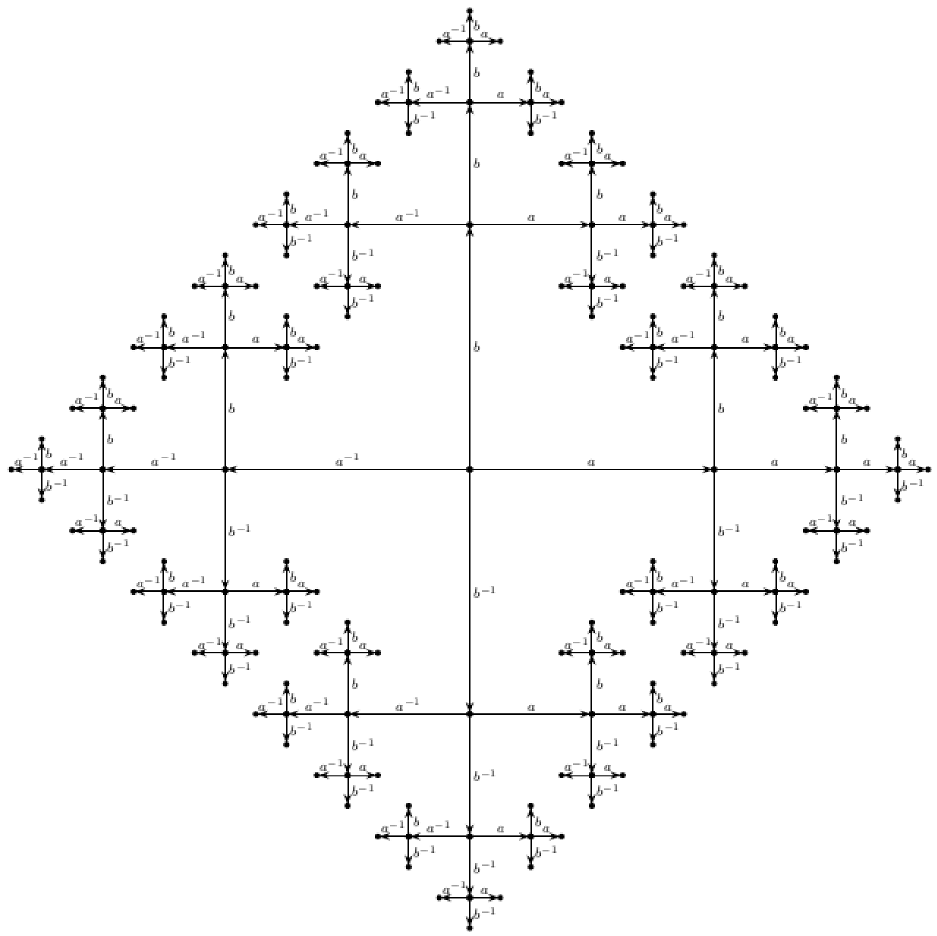
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $\{s_i\}$ – набор образующих. **Граф Кэли** пары $(G, \{s_i\})$ есть граф, вершины которого – элементы G, а ребра соединяют точки вида g и gs_i. Полагая длину ребер графа равной 1, мы **определяем граф Кэли как метрическое пространство с внутренней метрикой.**

ПРИМЕР: Граф Кэли для $\mathbb{Z}^n$ с обычным набором образующих есть кубическая решетка.



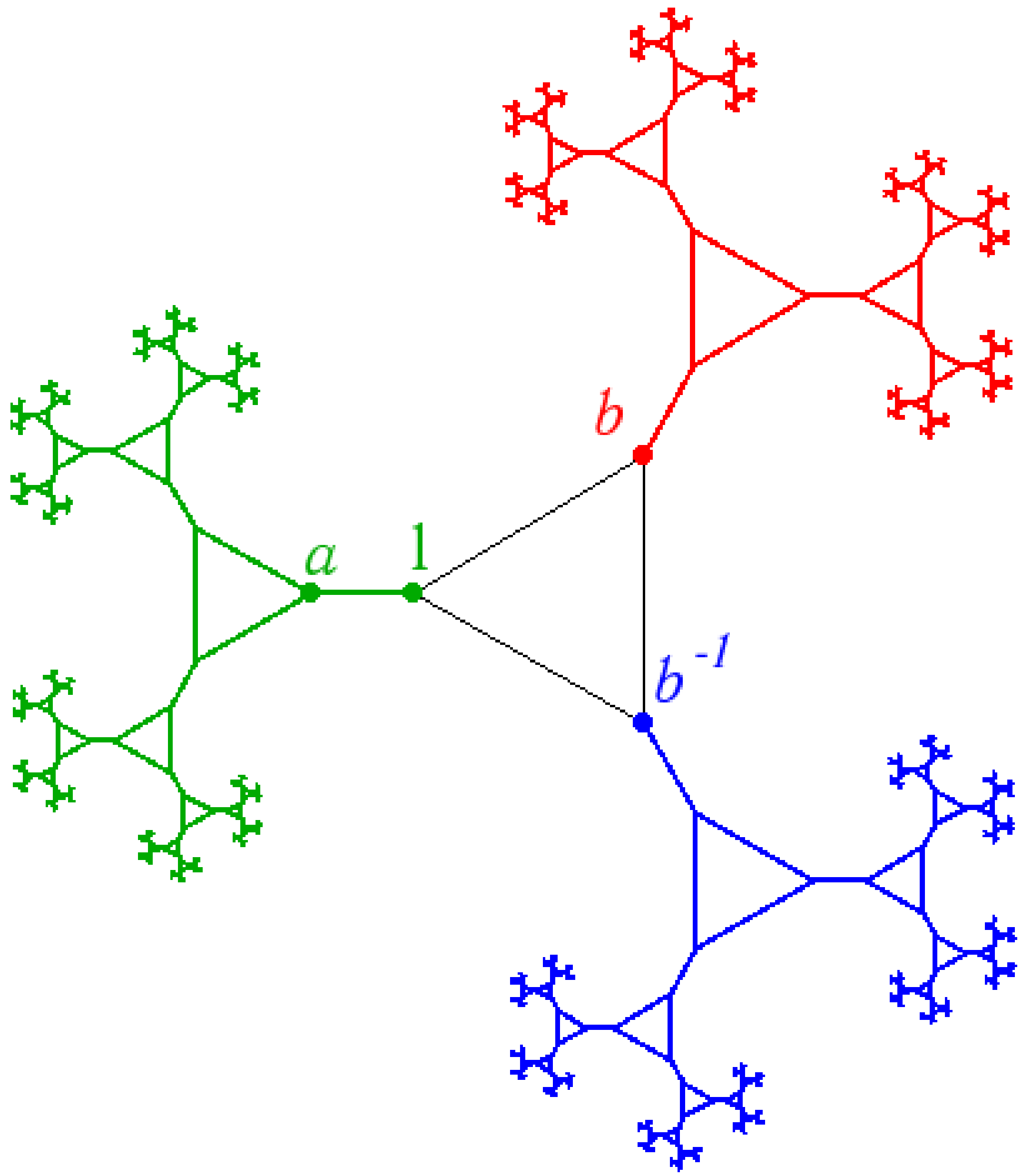
Граф Кэли для свободной группы

ПРИМЕР: Граф Кэли для свободной группы – регулярное дерево



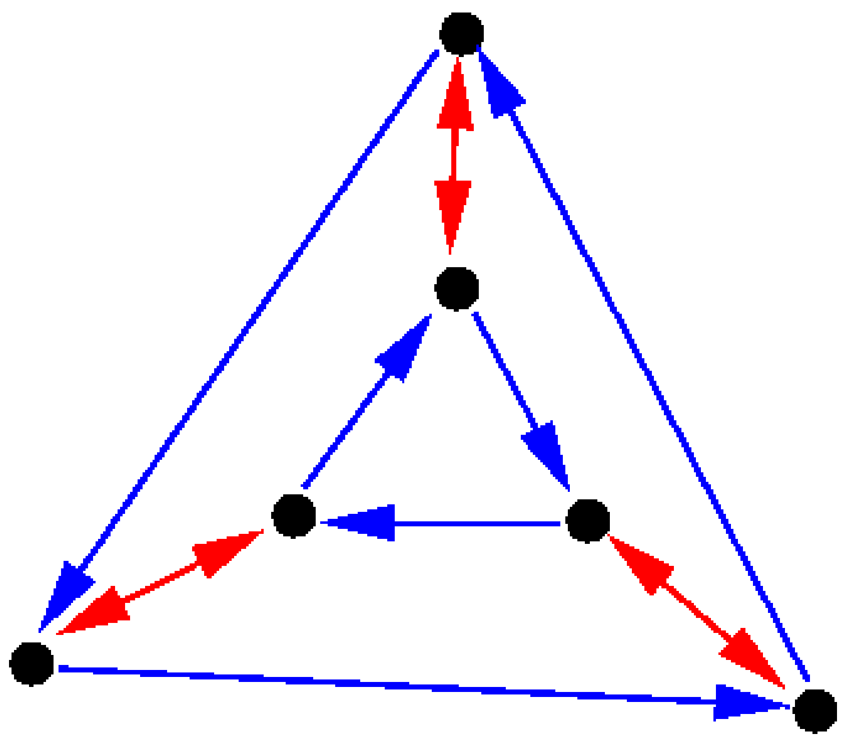
Граф Кэли свободной группы $\mathbb{F}_2$ с образующими a, b, a^{-1}, b^{-1}.

Граф Кэли для $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$



Граф Кэли для $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

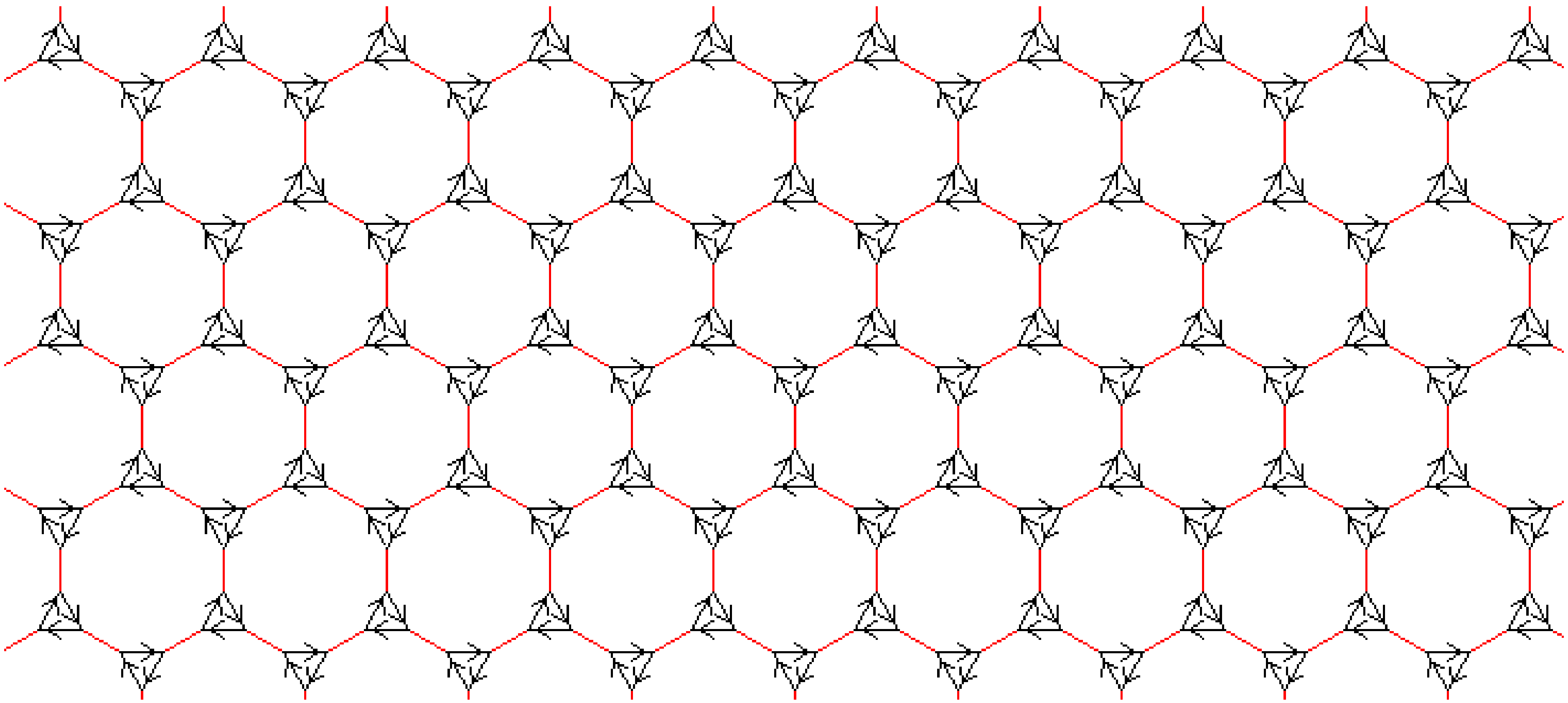
Граф Кэли для группы S^3



Граф Кэли для S^3.

Группа $S^3 = \langle k, r \mid k^2 = r^3 = (kr)^3 = 1\rangle$ задается образующими k (красная), r (черная), и соотношениями $k^2 = r^3 = (kr)^3 = 1$.

Граф Кэли для группы $\langle k, r \mid k^2 = r^3 = (kr)^6 = 1 \rangle$



Граф Кэли для группы, заданной образующими k (красная), r (черная), и соотношениями $k^2 = r^3 = (kr)^6 = 1$.

Константа Каждана

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – топологическая группа, а S – компактное подмножество G. **Константа Каждана** $\mathsf{Kaz}(G,S)$ есть супремум ε таких, что для любого унитарного представления G, не содержащего G-инвариантных векторов, найдется $s \in S$ такое, что для любого единичного вектора v имеет место $|s(v)-v| > \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Свойство Каждана (T) равносильно тому, что $\mathsf{Kaz}(G,S) > 0$ для какого-то компакта $S \subset G$.

Константа Каждана и экспандеры

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть G – конечная группа, Σ набор k образующих, Γ ее граф Кэли, а $h(\Gamma)$ – константа Чигера. **Тогда существует положительные функции f_1 и $f_2 : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ (не зависящие от Γ) такие, что $h(\Gamma) \geqslant f_1(\operatorname{Kaz}(\Gamma, \Sigma))$ и $\operatorname{Kaz}(\Gamma, \Sigma) \geqslant f_2(h(\Gamma))$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть H – пространство функций $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$, среднее которых нулевое: $\sum_{s\in\Gamma} f(s) = 0$. Оценка константы Каждана делается через спектральный зазор $k - \lambda_2$, определенный раньше. Для любой функции $f \in H$, имеем $A(F) = \sum_{s\in\Sigma} s(f)$, а коль скоро $|A(f)| \leqslant (k - \lambda_2)$ для любой единичной функции $f \in H$, имеем $(k - \lambda_2)|f| \leqslant |A(f) - f| \leqslant \sum |s(f) - f|$. **Значит, для какого-то $s \in \Sigma$, имеем $|s(f) - f| \geqslant k^{-1}(k - \lambda_2)|f|$, что дает $\operatorname{Kaz}(G, \Sigma) \geqslant k^{-1}(k - \lambda_2)$.** С другой стороны, число $k - \lambda_2$ оценивает $h(G)$, как объяснялось выше.

Константа Каждана и экспандеры (2)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть G – конечная группа, Σ набор k образующих, Γ ее граф Кэли, а $h(\Gamma)$ – константа Чигера. **Тогда существуют положительные функции f_1 и $f_2 : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ (не зависящие от Γ) такие, что $h(\Gamma) \geqslant f_1(\operatorname{Kaz}(\Gamma,\Sigma))$ и $\operatorname{Kaz}(\Gamma,\Sigma) \geqslant f_2(h(\Gamma))$.**

Шаг 2: Теперь оценим $h(G)$ через $\operatorname{Kaz}(G,\Sigma)$. Возьмем $K \subset \Gamma$, $|K| \leqslant 1/2|\Gamma|$, и пусть $f \in H$ – функция, принимающая на K значение $\frac{1}{|K|}$, а на его дополнении значение $-\frac{1}{|\Gamma|-|K|}$. Тогда функция $f-s(f)$ зануляется вне $R := \partial K \cup \partial(\Gamma\backslash K)$, и ограничена $2|K|^{-1}$ на R, что дает $\sqrt{2|R|}|K|^{-1} \geqslant |f-s(f)|$. С другой стороны,

$$|f-s(f)||f|^{-1} \geqslant \operatorname{Kaz}(G,\Sigma)$$

для подходящего $s \in \Sigma$. Поскольку $|f| \geqslant \sqrt{|K|^{-1}}$, имеем

$$\operatorname{Kaz}(G,\Sigma) \leqslant \sqrt{2\frac{|R|}{|K|}} \leqslant 2\sqrt{h(G)}.$$

■

Теорема Маргулиса

ТЕОРЕМА: (Маргулис) Пусть G – дискретная группа, обладающая свойством (Т), а $G_0 \supset G_1 \supset ...$ – монотонная последовательность подгрупп конечного индекса, такая, что $\bigcap G_i = \{e\}$. Выберем набор образующих в G, и пусть Γ_i – графы Кэли для G/G_i. **Тогда все Γ_i суть графы-экспандеры для какого-то $\varepsilon > 0$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть Σ – набор образующих для G. Поскольку все представления G/G_i являются представлениями G, имеем $\operatorname{Kaz}(G, \Sigma) \leqslant \operatorname{Kaz}(G/G_i, \Sigma)$. Значит, $h(\Gamma_i)$ ограничивается снизу через $\operatorname{Kaz}(G, \Sigma)$ и $|\Sigma|$. ∎

Григорий Александрович Маргулис (р. 24 февраля 1946, Москва)