

Многообразия Калаби-Яу, лекция 1: группы голономий

Миша Вербицкий

Школа-конференция по теории струн,
интегрируемым моделям и теории представлений

НМУ, Москва, 1 февраля 2016

Литература: Артур Бессе, "Многообразия Эйнштейна"

Кривизна связности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\nabla : B \rightarrow B \otimes \Lambda^1 M$ связность на гладком расслоении. Продолжим ∇ до оператора на формах

$$B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \dots$$

по формуле $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta + (-1)^{\tilde{\eta}} \eta \wedge \nabla b$. Тогда оператор $\nabla^2 : B \rightarrow B \otimes \Lambda^2(M)$ называется **кривизной** ∇ .

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $X, Y \in TM$ – векторные поля, (B, ∇) – расслоение со связностью, а $b \in B$ – сечение. Рассмотрим

$$\Theta_B(X, Y, b) := \nabla_X \nabla_Y b - \nabla_Y \nabla_X b - \nabla_{[X, Y]} b$$

Тогда оператор $\Theta_B(X, Y)$ $C^\infty M$ -линеен по всем трем аргументам, и удовлетворяет $\nabla^2(X, Y)(b) = \Theta_B(X, Y)b$. ■

Связность Леви-Чивита

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кручение связности ∇ на касательном расслоении есть тензор $X, Y \rightarrow \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Многообразие M называется **римановым**, если на TM задано невырожденное, положительно определенное скалярное произведение g .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

Тензор римановой кривизны

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Тензор римановой кривизны есть тензор кривизны связности Леви-Чивита.

ЗАМЕЧАНИЕ: Тензор римановой кривизны лежит в $\Lambda^2 M \otimes (\mathfrak{so}(TM))$, то есть он берет три векторных поля, и выдает одно. Такой тензор кривизны удобно обозначать $R_{ijk}^l \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M \otimes TM$. Если же отождествить \mathfrak{M} с $\Lambda^2 M$, мы получим **4-форму** $R_{ijkl} \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^2 M$, которая **тоже называется тензор римановой кривизны**.

Пространство алгебраических тензоров кривизны

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $V_{2,2} \subset \text{Sym}^2(\Lambda^2 V)$ обозначает ядро умножения $\text{Sym}^2(\Lambda^2 V) \rightarrow \Lambda^4 V$. Пространство $V_{2,2} \subset V \otimes V \otimes V \otimes V$ называется **пространством алгебраических тензоров кривизны**.

ТЕОРЕМА: Рассмотрим тензор кривизны связности Леви-Чивита, $R_{ijk}^l \in \Lambda^2 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$. Отождествляя $\mathfrak{so}(TM)$ и $\Lambda^2(TM)$, получим тензор кривизны $R_{ijkl} \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^2 M$. **Тогда $R_{ijkl} \in V_{2,2}$.**

СЛЕДСТВИЕ: Кривизна связности Леви-Чивита симметрична:
 $R_{ijkl} \in \text{Sym}^2(\Lambda^2 TM)$.

Симметрические многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симметрическое пространство** есть риманово многообразие M , снабженное набором изометрий i_x , для любой точки $x \in M$. При этом i_x сохраняет x , в квадрате дает тождественное преобразование, а на $T_x M$ действует как -1 . **Локально симметрическое пространство** есть пространство, которое локально изометрично симметрическому.

ТЕОРЕМА: Риманово многообразие (M, g) **локально симметрическое тогда и только тогда, когда $\nabla R = 0$** , где R – тензор римановой кривизны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть (M, g) локально симметрическое. Тензор ∇R инвариантен относительно изометрий, значит, $i_x^*(\nabla R) = \nabla R$. На нечетных тензорах i_x действует как -1 :

$$\left(\nabla R\Big|_x\right) = i_x^* \left(\nabla R\Big|_x\right) = - \left(\nabla R\Big|_x\right),$$

значит, $\nabla R\Big|_x = 0$, для каждой точки $x \in M$.

Импликацию $\nabla R \Rightarrow (M \text{ локально симметрическое})$ я доказывать не буду, но в любом нормальном курсе римановой геометрии ее доказывают (нужны геодезические, экспоненциальное отображение, поля Якоби). ■

Форма Фробениуса

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $B \subset TM$ подрасслоение, $\Pi : TM \rightarrow TM/B$ – проекция, а $x, y \in B$ – векторные поля. Тогда $[fx, y] = f[x, y] - D_y(f)x$. Следовательно, $\Pi([x, y])$ **зависит от $x, y \in C^\infty(M)$ -линейно.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Построенное отображение $[B, B] \rightarrow TM/B$ называется **форма Фробениуса** ("Frobenius bracket"); это косо-симметричная $C^\infty(M)$ -линейная 2-форма на B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Распределение называется **интегрируемым, голономным** или же **инволютивным**, если форма Фробениуса равна нулю.

Гладкие субмерсии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\pi : M \rightarrow M'$ – гладкое отображение. Оно называется **субмерсией**, если в каждой точке M дифференциал $D\pi$ сюръективен.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\pi : M \rightarrow M'$ – гладкая субмерсия. Тогда у каждой точки $m \in M$ есть окрестность $U \cong V \times W$, где U, W – гладкие многообразия, такая, что $\pi|_U$ **есть проекция на W** .

Доказательство: Теорема о неявной функции.

УПРАЖНЕНИЕ: ("Ehresmann's fibration theorem")

Пусть $\pi : M \rightarrow M'$ – гладкая субмерсия компактных многообразий. **Докажите, что это локально тривиальное расслоение.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Вертикальное касательное пространство** субмерсии есть ядро $D\pi$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Это инволютивное подрасслоение.**

Доказательство: Коммутатор перестановочен с проекцией потому что.

ЗАМЕЧАНИЕ: Вертикальное подрасслоение обозначается $T_\pi M$.

Теорема Фробениуса (формулировка)

Теорема Фробениуса: Пусть $B \subset TM$ – подрасслоение. Оно является инволютивным тогда и только тогда, когда у каждой точки $x \in M$ есть окрестность U и гладкая субмерсия $U \xrightarrow{\pi} V$ такая, что B есть вертикальное касательное подрасслоение: $B = T_{\pi}M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Слои π называются **листами**, или **интегральными подмногообразиями** распределения B . Распределение, для которого верна теорема Фробениуса, называется **интегрируемым**. Если B интегрируемо, совокупность всех листов (а также само B) называют **слоением**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для доказательства теоремы Фробениуса достаточно убедиться, что через каждую точку проходит интегральное подмногообразие. В этом случае, гладкая субмерсия $U \xrightarrow{\pi} V$ – это проекция на пространство листов слоения.

Базовые подрасслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $V \subset TM$ – инволютивное подрасслоение, Подрасслоение $F \subset TM$ называется **базовым** для V , если $F \supset V$ и для любого $b \in V, b' \in F$, имеем $[b, b'] \in F$.

ЛЕММА: Пусть $V \subset TM$ – интегрируемое слоение, $\pi : M \rightarrow M_1$ – проекция на пространство листов V , а $F \supset V$ – подрасслоение TM , содержащее V . Тогда следующие условия равносильны. **(а) F – базовое для V .**
(б) Существует подрасслоение $F_1 \subset TM_1$ такое, что $\pi^{-1}F_1 = F$.

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим координаты x_1, \dots, x_n на M такие, что x_{k+1}, \dots, x_n задают координаты на M_1 , а $d/dx_1, \dots, d/dx_k$ порождают V . Обозначим за G подгруппу в группе диффеоморфизмов $\text{Diff}(M)$, которая порождена экспонентами векторных полей $d/dx_1, \dots, d/dx_k$. Поскольку $[b, b'] \in F, e^b(F) \subset F$, значит, F – G -инвариантное подрасслоение.

Шаг 2: Любое G -инвариантное подрасслоение $F \supset V$ поднимается с фактора $M/G = M_1$. Действительно, поскольку действие G свободно, расслоение F порождено над $C^\infty M$ G -инвариантными сечениями, но каждое G -инвариантное векторное поле поднимается с M_1 .

Шаг 3: Наоборот, если F поднимается с M_1 , оно G -инвариантно, но это значит, что $\text{Lie}_b(b') \in F$. ■

Теорема Фробениуса (доказательство)

Теорема Фробениуса: Пусть $V \subset TM$ – подрасслоение. Оно **является инволютивным тогда и только тогда**, когда у каждой точки $x \in M$ **есть окрестность U и гладкая субмерсия $U \xrightarrow{\pi} V$ такая, что V есть вертикальное касательное подрасслоение: $V = T_{\pi}M$.**

Доказательство. Шаг 1: Возьмем одномерное подрасслоение $V_1 \subset V$. По теореме о существовании решений ОДУ, V_1 интегрируемо. Поскольку $[V_1, V] \subset V$, расслоение V базовое относительно V_1 , **значит, поднимается с пространства листов V_1 .**

Шаг 2: Обозначим проекцию за $\pi : M \rightarrow M_1$. Тогда $V = \pi^*V_0$, для $V_0 \subset TM$ ранга $\text{rk } V - 1$. Воспользовавшись индукцией, можно считать, что V_0 интегрируемо. Пусть $\pi_0 : M_1 \rightarrow M_0$ – проекция на пространство листов V_0 . **Тогда $\pi \circ \pi_0 : M \rightarrow M_0$ – проекция на пространство листов V . ■**

Группа голономий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (Эли Картан, 1923) Пусть (M, ∇) – расслоение со связностью над M . Для каждой петли γ , идущей из x в $x \in M$, обозначим за $V_{\gamma, \nabla} : B|_x \rightarrow B|_x$ соответствующее отображение параллельного переноса вдоль связности. **Группа голономий** (B, ∇) есть подгруппа $GL(T_x M)$, порожденная $V_{\gamma, \nabla}$, для всех петель γ . Группа **локальных голономий** есть подгруппа $GL(T_x M)$, порожденная $V_{\gamma, \nabla}$ для стягиваемых петель.

ЗАМЕЧАНИЕ: Расслоение **плоско** (имеет нулевую кривизну) тогда и только тогда, когда его локальная голономия тривиальна.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $\nabla(\varphi) = 0$ для тензора $\varphi \in B^{\otimes i} \otimes (B^*)^{\otimes j}$, то **группа голономий ∇ сохраняет φ .**

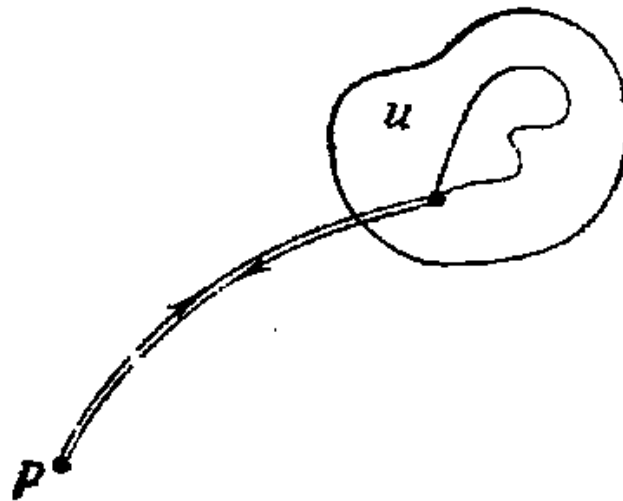
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Голономия риманова многообразия** есть голономия его связности Леви-Чивита.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **группа голономий не зависит от выбора точки $x \in M$.**

ЗАДАЧА: Пусть G – группа Ли, g – биинвариантная метрика. Докажите, что **голономия (G, g) равна образу группы G в $\text{End}(T_e G)$, действующей $T_e G$ как на присоединенном представлении.**

Лемма о лассо

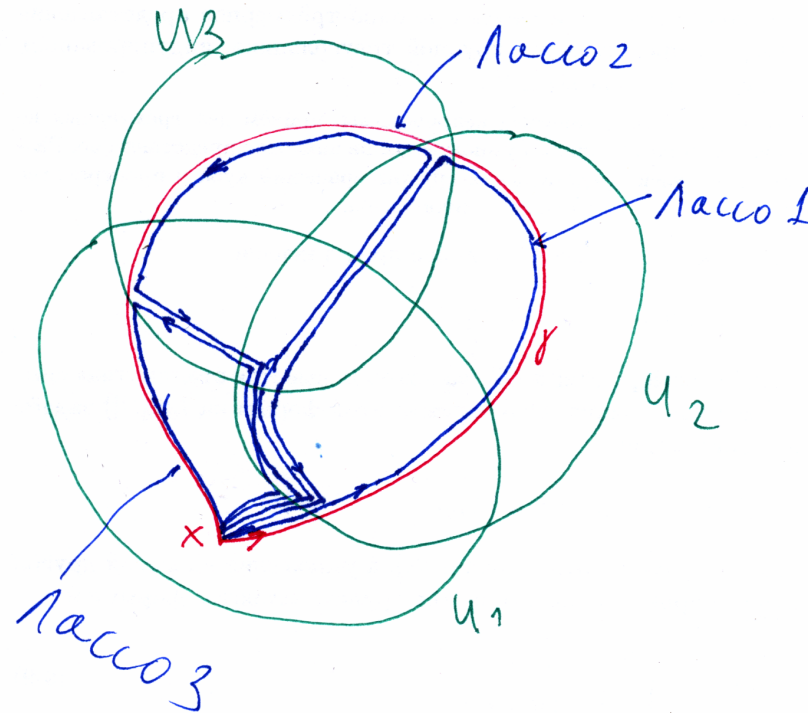
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Лассо есть петля следующего вида:



Круглая часть называется **рабочей частью** лассо.

Лемма о лассо (продолжение)

ЗАМЕЧАНИЕ: (“Лемма о лассо”) Пусть $\{U_i\}$ – покрытие многообразия, а γ – стягиваемая петля. Тогда γ можно разложить в произведение нескольких лассо, с рабочей частью каждого из лассо в U_i .



Теорема Амброза-Зингера

ЗАМЕЧАНИЕ: Из утверждения 1 и теоремы о непрерывности голономии как функции контура (лекция 6) легко вывести следующее. Зафиксируем $C > 0$. Рассмотрим лассо с рабочей областью площади ε^2 и периметра $C\varepsilon$, затянутой 2-мерной поверхностью, касательные пространства к которой с точностью до $C\varepsilon^2$ равны 2-мерной плоскости $V = \langle x, y \rangle$. Пусть x, y – ортонормальный базис в V . **Тогда голономия вдоль лассо с точностью до $o(\varepsilon^2)$ равна $\varepsilon^3 \gamma^* R(x, y)$, где γ^* есть оператор голономии вдоль нерабочей части лассо.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (B, ∇) – расслоение со связностью, $\Theta \in \Lambda^2(M) \otimes \text{End}(B)$ – его кривизна, а $a, b \in T_x M$ – касательные векторы. Эндоморфизм $\Theta(a, b) \in \text{End}(B)|_x$ называется **элементом кривизны**.

ТЕОРЕМА: (Амброз-Сингер) Локальная группа голономий B, ∇ в $z \in M$ есть группа Ли **с алгеброй Ли, порожденной всеми элементами кривизны $\Theta(a, b) \in \text{End}(B)|_x$, перенесенными в z параллельным переносом вдоль всех путей.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Доказательство этой теоремы следует из леммы о лассо и вышеприведенного замечания. ■

Представление голономии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, g) - риманово многообразие, а G его группа голономий. **Представление голономии** в $x \in M$ есть действие G на $T_x M$.

ТЕОРЕМА: (де Рама) Предположим, что представление голономий приводимо: $T_x M = B_1 \oplus B_2$. **Тогда риманово многообразие M локально расщепляется в произведение: $M = M_1 \times M_2$, где $B_1 = T_x M_1$, $B_2 = T_x M_2$.**

Доказательство. Шаг 1: Используя параллельный перенос относительно связности, продолжим разложение $B_1 \oplus B_2$ до **расщепления касательного расслоения в ортогональную прямую сумму $TM = B_1 \oplus B_2$, совместимую с голономией и связностью.**

Шаг 2: Подрасслоения $B_1, B_2 \subset TM$ **инволютивны:** $[B_1, B_1] \subset B_1$ (связность Леви-Чивита не имеет кручения).

Шаг 3: Применяя теорему Фробениуса, получим, что эти расслоения – касательные к листам дополнительных слоений на M . Это дает **локальное разложение $M = M_1 \times M_2$, с $B_1 = TM_1$, $B_2 = TM_2$.**

Представление голономии (продолжение)

ТЕОРЕМА: (де Рама) Предположим, что представление голономий приводимо: $T_x M = B_1 \oplus B_2$. Тогда риманово многообразие M локально расщепляется в произведение: $M = M_1 \times M_2$, где $B_1 = T_x M_1$, $B_2 = T_x M_2$.

Доказательство. Шаг 1: Продолжим разложение $B_1 \oplus B_2$ до расщепления касательного расслоения в ортогональную прямую сумму $TM = B_1 \oplus B_2$, совместимую с голономией и связностью.

Шаг 2: Подрасслоения $B_1, B_2 \subset TM$ инволютивны: $[B_i, B_i] \subset B_i$ (связность Леви-Чивита не имеет кручения).

Шаг 3: Применяя теорему Фробениуса, получим, что эти расслоения – касательные к листам дополнительных слоений на M . Это дает локальное разложение $M = M_1 \times M_2$, с $B_1 = TM_1$, $B_2 = TM_2$.

Шаг 4: Поскольку разложение $TM = B_1 \oplus B_2$ совместимо со связностью, все листы M_1, M_2 вполне геодезические.

Шаг 5: Следовательно, локально M расщепляется (как метрическое пространство): $M = M_1 \times M_2$, где M_1, M_2 – какие-то листы этих слоений.



Теорема де Рама о разложении

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M – риманово многообразие, а

$$\mathrm{Hol}_0(M) \xrightarrow{\rho} \mathrm{End}(T_x M)$$

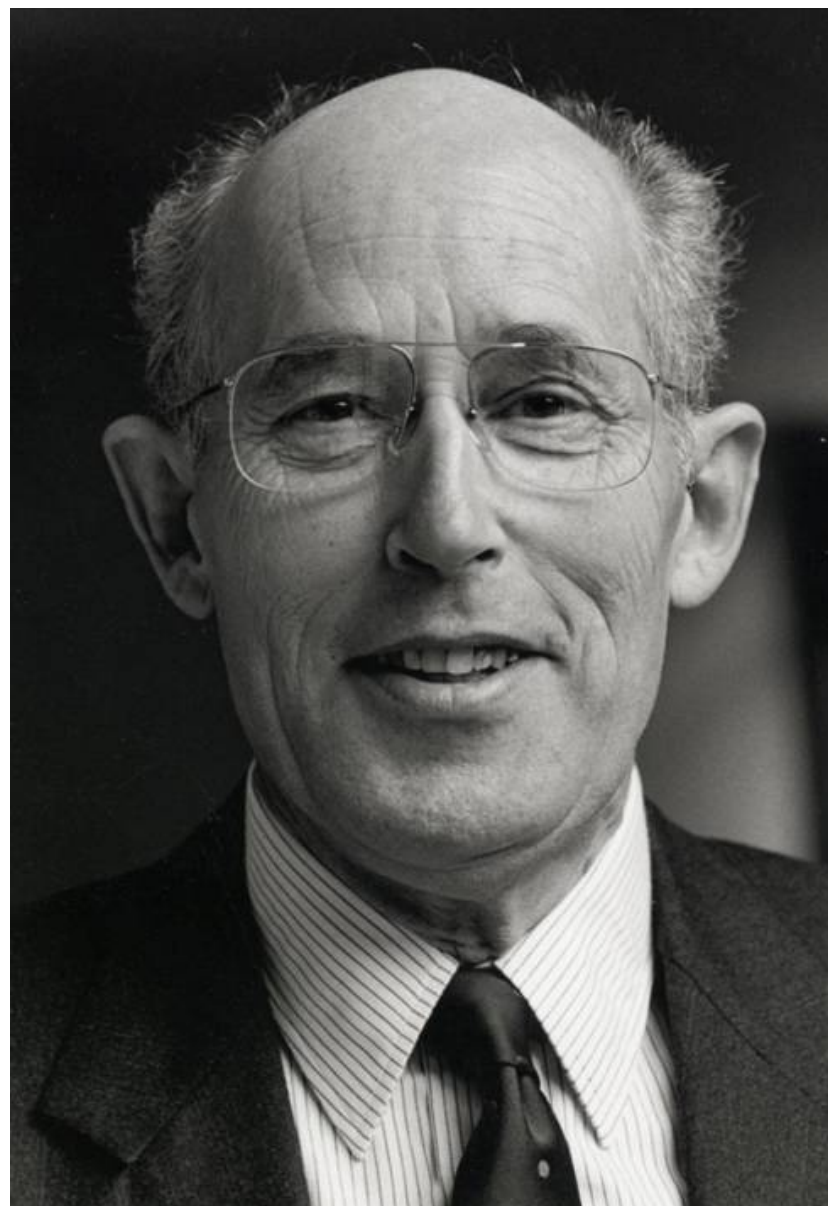
– локальное представление голономий. Предположим, что ρ приводимо: $T_x M = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$. **Тогда группа $G = \mathrm{Hol}_0(M)$ тоже расщепляется в произведение: $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k$** , где каждая из G_i тривиально действует на всех V_j с $j \neq i$.

Доказательство: Локально, эта теорема следует из локального разложения M , доказанного выше. Чтобы получить его глобально по M , используем лемму о лассо. ■

ТЕОРЕМА: (де Рама) Полное, односвязное риманово многообразие с приводимой голономией **расщепляется в произведение римановых многообразий**.

УПРАЖНЕНИЕ: Найдите неполные и неодносвязные контрпримеры к утверждению этой теоремы.

ТЕОРЕМА: (Джим Саймонс, 1962) Пусть M – многообразие с неприводимой голономией. Тогда **либо M локально симметрично, либо $\mathrm{Hol}(M)$ действует транзитивно на единичной сфере в $T_x M$** .



Marcel Berger

Теорема Берже

ТЕОРЕМА: (теорема Берже, 1955) Пусть G – неприводимая группа голономий риманова многообразия, которое не локально симметрично. Тогда G принадлежит списку Берже:

Список Берже	
<i>Голономия</i>	<i>Геометрия</i>
$SO(n)$ действующая на \mathbb{R}^n	риманово многообразии
$U(n)$ действующая на \mathbb{R}^{2n}	кэлерово многообразии
$SU(n)$ действующая на \mathbb{R}^{2n} , $n > 2$	многообразии Калаби-Яу
$Sp(n)$ действующая на \mathbb{R}^{4n}	гиперкэлерово многообразии
$Sp(n) \times Sp(1)/\{\pm 1\}$ действующая на \mathbb{R}^{4n} , $n > 1$	кватернионно-кэлерово многообразии
G_2 действующая на \mathbb{R}^7	G_2 -многообразии
$Spin(7)$ действующая на \mathbb{R}^8	$Spin(7)$ -многообразии

ЗАМЕЧАНИЕ: Существует еще одна группа, транзитивно действующая на сфере: $Spin(9)$, действующая на \mathbb{R}^{16} . В 1968, Д. В. Алексеевский доказал, что **любое многообразие с голономией $Spin(9)$ локально симметрично.**