Многообразия Калаби-Яу, лекция 2: кэлеровы многообразия

Миша Вербицкий

Школа-конференция по теории струн, интегрируемым моделям и теории представлений

НМУ, Москва, 2 февраля 2016

Комплексные структуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексной структурой** на вещественном векторном пространстве V называется эндоморфизм $I \in \operatorname{End}(V)$, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Продолжим I на тензоры формулой $I(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma ...) = I(\alpha) \otimes I(\beta) \otimes I(\gamma)...$ **Группа, порожденная I, изоморфна $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.** Поэтому, для любого тензора t, сумма $t + I(t) + I^2(t) + I^3(t)$ инвариантна относительно I.

СЛЕДСТВИЕ: Если g – положительно определенное скалярное произведение на V, то $g_I := g + I(g) + I^2(G) + I^3(g)$ тоже положительно определено и I-инвариантно: $I(g_I) = I$. Другими словами, **I – ортогональный оператор относительно g_I.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Положительно определенное скалярное произведение, в котором I ортогонально, называется **эрмитовой метрикой** на (V, I). Мы только что доказали, что она всегда существует.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $g + I(g)$ I-инвариантно для любого четного тензора.

Комплексные структуры (продолжение)

СЛЕДСТВИЕ: Все собственные значения I простые (то есть I **полупрост**, другими словами, диагонализуется). В самом деле, **любой ортогональный оператор полупрост.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть α – собственное значение I. Поскольку $\alpha^2 = -1$, имеем $\alpha = \pm\sqrt{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Собственное пространство I, соответствующее $\sqrt{-1}$, обозначается $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb R} \mathbb C$, а соответствующее $-\sqrt{-1}$ обозначается $V^{0,1}$. Очевидно, $V \otimes_{\mathbb R} \mathbb C = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку, к тому же, I вещественный, получаем, что $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$. В частности, это пространства одинаковой размерности.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что естественная проекция $V^{1,0}$ на V вдоль $V^{0,1}$ задает изоморфизм вещественных пространств $V^{0,1} \to V$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что оператор комплексной структуры **однозначно задается подпространством $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb R} \mathbb C$ половинной размерности,** которое не пересекается с $V \subset V \otimes_{\mathbb R} \mathbb C$.

Эрмитовы формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово пространство** (V, I, g) есть пространство, снабженное комплексной структурой I и эрмитовой метрикой g.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть I – оператор комплексной структуры на вещественном пространстве V, а g – эрмитова метрика. Рассмотрим билинейную форму $\omega(x,y) = g(x, Iy)$. Тогда $\omega(x,y) = g(x, Iy) = g(Ix, I^2y) = -g(Ix, y) = -\omega(y, x)$. Поэтому ω **кососимметрична**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Форма ω называется **эрмитовой формой** на эрмитовом пространстве (V, I, g)

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что в тройке I, g, ω, **каждый тензор выражается через остальные два.**

Разложение Ходжа

Обозначим за $\Lambda^* V$ грассманову алгебру, порожденную V.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что $\Lambda^*(V \oplus W)$ изоморфно как векторное пространство $\Lambda^* V \otimes \Lambda^* W$. Изоморфизм $\Lambda^* V \otimes \Lambda^* W \to \Lambda^*(V \oplus W)$ задается отображением $x \otimes y \to x \wedge y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (V, I) – пространство, снабженное комплексной структурой, а $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ его комплексификация. Тогда $\Lambda^* V_{\mathbb{C}} \cong (\Lambda^* V^{1,0}) \otimes (\Lambda^* V^{0,1})$. Рассмотрим разложение $\Lambda^* V_{\mathbb{C}} \cong \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}}$, где $\Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}} = \Lambda^p V^{1,0} \bigwedge \Lambda^q V^{0,1}$ Оно называется **разложением Ходжа**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Комплексная структура на V **однозначно задает комплексную структуру на V^* (и наоборот).**

УПРАЖНЕНИЕ: Верно ли, что любая (p, p)-форма I-инвариантна? Верно ли, что любая I-инвариантная форма имеет тип (p, p)?

Почти комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексная структура на многообразии есть оператор $I \in \operatorname{End} TM$ в эндоморфизмах касательного расслоения, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_{TM}$.

ПРИМЕР: Возьмем $\mathbb{C}^n$, с комплексными координатами $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$. Тогда $I(x_i) = y_i$, $I(y_i) = -x_i$ – почти комплексная структура.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Разложение Ходжа на дифференциальных формах записывается $\Lambda^*(M) = \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q}(M)$, причем $\Lambda^{p,q}(M) = \Lambda^{p,0}(M) \bigwedge \Lambda^{0,q}(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $f: M \to \mathbb{C}$ на почти комплексном многообразии называется **голоморфной**, если $df \in \Lambda^{1,0}(M)$.

Интегрируемость почти комплексных многообразий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие. Оно называется **комплексным**, а I **интегрируемым** если в каждой точке существуют координаты x_i, y_i такие, что $I(d/dx_i) = d/dy_i$, $I(d/dy_i) = -d/dx_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ: В этой ситуации, **функции $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ голоморфные.** Они называются **комплексными координатами**.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что на комплексном многообразии, **коммутатор векторных полей типа $(1,0)$ имеет тип $(1,0)$:**

$$[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное многообразие называется **формально интегрируемым**, если $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$

ТЕОРЕМА: (Newlander-Nirenberg) **Формально интегрируемое почти комплексное многообразие интегрируемо.**

Кэлеровы многообразия

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I, g) – почти комплексное эрмитово многообразие. **Тогда следующие условия эквивалентны:**

(i) **Комплексная структура I интегрируема, а эрмитова форма ω замкнута.**

(ii) $\nabla(I) = 0$**,** где ∇ есть связность Леви-Чивита.

УПРАЖНЕНИЕ: Выведите (i) из (ii).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное эрмитово многообразие, удовлетворяющее условиям (i) или (ii), называется **кэлеровым**. Класс когомологий $[\omega] \in H^2(M)$ называется **кэлеровым классом** M.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что комплексное подмногообразие кэлерова многообразия – **снова кэлерово.**

Метрика Фубини-Штуди

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $M = \mathbb{C}P^n$ – комплексное проективное пространство, а g – $U(n+1)$-инвариантная метрика. Она называется **метрикой Фубини-Штуди**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Метрику Фубини-Штуди можно получить, взяв произвольную эрмитову метрику на $\mathbb{C}P^n$ и **усреднив по компактной группе $U(n+1)$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Стабилизатор $x \in \mathbb{C}P^n$ в $U(n+1)$ изоморфен $U(n)$, а $T_x\mathbb{C}P^n$ изоморфно $\mathbb{C}^n$ со стандартным действием $U(n)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть g – $U(n)$-инвариантная положительная симметрическая форма на $\mathbb{C}^n$. Тогда g **пропорциональна обычной евклидовой метрике.**

СЛЕДСТВИЕ: Метрика Фубини-Штуди **единственна с точностью до скалярного множителя.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть η – $U(n)$-инвариантная 3-форма на $\mathbb{C}^n$. Докажите, что $\eta = 0$.

СЛЕДСТВИЕ: Метрика Фубини-Штуди **кэлерова**.

Проективные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Замкнутое комплексное подмногообразие $\mathbb{C}P^n$ называется **проективным**

ТЕОРЕМА: **Проективное многообразие всегда кэлерово.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Оно комплексно, а эрмитова форма симплектична.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку $H^2(\mathbb{C}P^n)$ одномерно, **можно выбрать метрику Фубини-Штуди с целочисленным кэлеровым классом.**

СЛЕДСТВИЕ: Проективное многообразие **допускает кэлерову структуру с целочисленным кэлеровым классом.**

ТЕОРЕМА: (Кодаира) Пусть M – компактное, кэлерово многообразие с целочисленным кэлеровым классом. **Тогда M проективно.**

Первый класс Черна

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное расслоение на многообразии, U_α – его покрытие, на котором B тривиализовано, а $\varphi_{\alpha\beta}$ – функции перехода, определенные на $U_\alpha \cap U_\beta$. На пересечении $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ имеем $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}$ то есть B **задает $(C^\infty M)^*$-значный 1-коцикл.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Классы изоморфизма расслоений взаимно однозначно соответствуют $H^1(M, (C^\infty M)^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из экспоненциальной точной последовательности

$$0 \to \mathbb{Z}_M \to C^\infty M \to (C^\infty M)^* \to 0,$$

получаем изоморфизм $H^1(M, (C^\infty M)^*) \stackrel{c_1^{\mathbb{Z}}}{\to} H^2(M, \mathbb{Z})$.

СЛЕДСТВИЕ: Комплексное линейное расслоение топологически тривиально $\Leftrightarrow c_1^{\mathbb{Z}}(B) = 0$.

Первый класс Черна и формула Гаусса-Бонне

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что кривизна линейного расслоения - замкнутая (1,1)-форма.

ТЕОРЕМА: (Гаусс-Бонне)
Класс когомологий $[\omega]$ кривизны линейного расслоения L выражается через его класс Черна: $[\omega] = 2\pi c_1(L)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I, ω) – n-мерное кэлерово многообразие, а $K(M) := \Lambda^{n,0}(M)$ – его **каноническое расслоение** (расслоение комплексно-линейных форм объема). **Первый класс Черна комплексного n-мерного многообразия** есть $c_1(M) := c_1(\Lambda^{n,0}(M))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Многообразие Калаби-Яу** есть компактное кэлерово многообразие с $c_1^{\mathbb{Z}}(M) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: По теореме Калаби-Яу, каждое "многообразие Калаби-Яу" (в смысле этого определения) допускает кэлерову метрику с голономией, лежащей в $SU(n)$.

Теорема Калаби-Яу

ЗАМЕЧАНИЕ: Если задана вещественная $(1,1)$-форма η, ей соответствует симметрическая 2-форма $g_\eta(x,y) = \eta(x, Iy)$. **Это задает биекцию между вещественными $(1,1)$-формами и I-инвариантными симметрическими 2-формами**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\Theta_K \in \Lambda^{1,1}(M,\mathbb{R})$ – кривизна связности Леви-Чивита на каноническом расслоении кэлерова многообразия. **Кривизна Риччи** M есть симметрическая 2-форма $\operatorname{Ric}(x,y) = \Theta_K(x, Iy)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика называется **риччи-плоской**, если ее кривизна Риччи равна нулю.

ТЕОРЕМА: (Калаби-Яу) Пусть (M,I) – многообразие Калаби-Яу. **Тогда существует единственная риччи-плоская кэлерова метрика в каждом кэлеровом классе.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Такая метрика называется **метрикой Калаби-Яу**. Поскольку ее голономия действует тривиально на комплексно-линейных формах объема, она лежит в $SU(n)$.

Алгебры Клиффорда и спиноры (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V, g – векторное пространство над $k := \mathbb{C}, \mathbb{R}$ с билинейной, симметричной 2-формой, а $\mathcal{C}\ell(V,g)$ – алгебра с единицей, полученная как фактор **тензорной алгебры** $T^{\otimes}V := k \oplus V \oplus V \otimes V \oplus ... \oplus T^{\otimes i}V$ по идеалу, порожденному $xy + yx = g(x,y)$, где $x, y \in V$. Алгебра $\mathcal{C}\ell(V,g)$ называется **алгеброй Клиффорда**.

ТЕОРЕМА: **(периодичность Ботта над $\mathbb{C}$)**

$$\mathcal{C}\ell(V,g) \cong \operatorname{Mat}(2^n, \mathbb{C})$$

для $V = \mathbb{C}^{2n}$ и

$$\mathcal{C}\ell(V,g) \cong \operatorname{Mat}(2^n, \mathbb{C}) \oplus \operatorname{Mat}(2^n, \mathbb{C})$$

для $V = \mathbb{C}^{2n+1}$ (g невырожденная).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство спиноров** для V, g есть векторное пространство, на котором $\mathcal{C}\ell(V,g)$ действует как матрицы на своем фундаментальном представлении.

Спиноры над $V = W \oplus W^*$

ПРИМЕР: Пусть $V = W \oplus W^*$, с естественной метрикой. Тогда $C\!\ell(W) = \operatorname{End}(\Lambda^* W)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим действие $\Lambda^* W$ на $\Lambda^* W$ внешними умножениями, $x, y \to x \wedge y$, и $\Lambda^* W^*$ на $\Lambda^* W$ подстановкой, $x, \xi \to x \lrcorner \xi$. **Это задает на $\Lambda^* W$ структуру $C\!\ell(V)$-модуля.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно проверить на образующих: $\omega \wedge x \wedge y = -\omega \wedge y \wedge x$, $(\omega \lrcorner \xi) \lrcorner \zeta = -(\omega \lrcorner \zeta) \lrcorner \xi$, и

$$(\omega \wedge x) \lrcorner \xi + (\omega \lrcorner \xi) \wedge x = \langle x, \xi \rangle \omega.$$

■

СЛЕДСТВИЕ: **$\Lambda^* W$ канонически отождествляется со спинорным представлением** алгебры Клиффорда для $W \oplus W^*$.

Спиноры на многообразиях Калаби-Яу

УТВЕРЖДЕНИЕ: На многообразии Калаби-Яу, спиноры отождествляются с $\Lambda^{*,0}(M)$, а клиффордово умножение действует так:

$$\Lambda^{p,0}(M) \otimes \Lambda^{1,0} M \xrightarrow{\sigma} \Lambda^{p+1,0}(M)$$

есть внешнее умножение, а

$$\Lambda^{p,0}(M) \otimes \Lambda^{0,1} M \xrightarrow{\sigma} \Lambda^{p-1,0}(M)$$

делает из $\eta \otimes x$ подстановку $\eta \lrcorner x^\sharp$, где $x^\sharp \in T^{1,0}M$ есть векторное поле, двойственное x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Эрмитова метрика на $\Lambda^1 M$ зануляется на $\Lambda^{1,0}M$ и $\Lambda^{0,1}M$ (то есть эти пространства изотропны), значит, $\mathcal{C}\ell(\Lambda^1 M)$ действует на $\Lambda^{*,0}(M)$ как на своем фундаментальном представлении. ■

Оператор Дирака на многообразиях Калаби-Яу

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – риманово многообразие с заданной на нем спин-структурой, а $\nabla: S \to S \otimes \Lambda^1 M$ – связность Леви-Чивита на спинорах. Отождествив $\Lambda^1 M$ и TM, можно считать, что $\nabla: S \to S \otimes TM$. Рассмотрим оператор **спинорного умножения** $S \otimes TM \xrightarrow{\sigma} S$. **Оператор Дирака** D есть композиция $\nabla: S \to S \otimes TM$ и σ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гармонический спинор** есть спинор ψ такой, что $D(\psi) = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что на многообразии Калаби-Яу, **оператор Дирака действует как $\partial \oplus \partial^*: \Lambda^{*,0}(M) \to \Lambda^{*,0}(M)$,** где ∂ есть (1,0)-часть дифференциала де Рама, а ∂^* его эрмитово сопряженный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дифференциальная форма η на кэлеровом многообразии называется **гармонической**, если $\Delta_\partial(\eta) = 0$, где $\Delta_\partial = \partial\partial^* + \partial^*\partial$.

СЛЕДСТВИЕ: **На многообразии Калаби-Яу, гармонические спиноры есть гармоническе $(p, 0)$-формы.**