Многообразия Калаби-Яу, лекция 3: теорема Богомолова

Миша Вербицкий

Школа-конференция по теории струн, интегрируемым моделям и теории представлений

НМУ, Москва, 3 февраля 2016

Теория Ходжа

Пусть $d: \Lambda^* M \to \Lambda^* M$ – дифференциал дде Рама, а d^* – сопряженный оператор. Оператор $\Delta := dd^* + d^*d$ называется **оператор Лапласа**.

Основная теорема теории Ходжа: Существует **базис в гильбертовом пространстве** $L^2(\Lambda^*(M))$, состоящий из собственных векторов Δ, и каждое собственное пространство конечномерно.

ТЕОРЕМА: ("Эллиптическая регулярность") Пусть $\alpha \in L^2(\Lambda^k(M))$ – собственный вектор Δ. **Тогда α – гладкая k-форма.**

Определение: Форма α называется **гармонической**, если $\Delta(\alpha) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любой гармонической формы α, $0 = (\Delta\alpha, \alpha) = (d\alpha, d\alpha) + (d^*\alpha, d^*\alpha)$, значит, $\alpha \in \ker d \cap \ker d^*$. Получаем, что **любая гармоническая форма на компактном многообразии замкнута.**

Гармонические формы и когомологии

ТЕОРЕМА: Пусть M – компактное, риманово. Тогда **естественное отображение $\mathcal{H}^i(M) \to H^i(M)$ из гармонических форм в когомологии – изоморфизм.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\ker d^* = (\operatorname{im} d)^\perp$, **естественное отображение $\mathcal{H}^i(M) \to H^i(M)$ инъективно.**

Шаг 2: $d\Delta = \Delta d = dd^*d$. Поэтому d **коммутирует с Δ.**

Шаг 3: Рассмотрим весовое разложение $\Lambda^*(M) \hat{=} \bigoplus_\alpha \mathcal{H}^*_\alpha(M)$, где α пробегает через все собственные значения Δ. Для каждого α, **дифференциал де Рама сохраняет собственные пространства Δ,** что дает комплекс

$$\mathcal{H}^0_\alpha(M) \xrightarrow{d} \mathcal{H}^1_\alpha(M) \xrightarrow{d} \mathcal{H}^2_\alpha(M) \xrightarrow{d} \ldots$$

Шаг 4: На $\mathcal{H}^*_\alpha(M)$, имеем $dd^* + d^*d = \alpha$. Когда $\alpha \neq 0$, и η замкнута, это дает $dd^*(\eta) + d^*d(\eta) = dd^*\eta = \alpha\eta$, значит $\eta = d\xi$, где $\xi := \alpha^{-1} d^*\eta$. Значит, для ненулевых α, **комплексы $(\mathcal{H}^*_\alpha(M), d)$ не дают вклада в когомологии**

Шаг 5: Мы доказали, что

$$H^i(\Lambda^* M, d) = \bigoplus_\alpha H^i(\mathcal{H}^*_\alpha(M), d) = H^i(\mathcal{H}^*_0(M), d) = \mathcal{H}^i(M).$$

■

Разложение Ходжа на когомологиях

УТВЕРЖДЕНИЕ: Любая гармоническая форма на компактном кэлеровом многообразии представима как сумма гармоничных (p,q)-форм, что дает **разложение** $H^i(M) = \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}(M)$**, причем** $\overline{H^{p,q}(M)} = H^{q,p}(M)$**.**

СЛЕДСТВИЕ: Нечетные когомологии кэлерова многообразия четномерны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Это разложение называется **разложение Ходжа на когомологиях**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Любая гармоническая $(p,0)$**-форма голоморфна, а любая голоморфная** $(p,0)$**-форма гармонична.**

Ромб Ходжа

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & H^{n,n} & & \\
 & H^{n,n-1} & & H^{n-1,n} & \\
H^{n,n-2} & & H^{n-1,n-1} & & H^{n-2,n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
H^{2,0} & & H^{1,1} & & H^{0,2} \\
 & H^{1,0} & & H^{0,1} & \\
 & & H^{0,0} & &
\end{array}
$$

Первый класс Черна и формула Гаусса-Бонне (повторение)

ТЕОРЕМА: (Гаусс-Бонне)
Класс когомологий $[\omega]$ кривизны линейного расслоения L выражается через его класс Черна: $[\omega] = 2\pi c_1(L)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I, ω) – n-мерное кэлерово многообразие, а $K(M) := \Lambda^{n,0}(M)$ – его **каноническое расслоение** (расслоение комплексно-линейных форм объема). **Первый класс Черна комплексного n-мерного многообразия** есть $c_1(M) := c_1(\Lambda^{n,0}(M))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Многообразие Калаби-Яу есть компактное кэлерово многообразие с $c_1^{\mathbb{Z}}(M) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: По теореме Калаби-Яу, **каждое "многообразие Калаби-Яу" (в смысле этого определения) допускает кэлерову метрику с голономией, лежащей в $SU(n)$.**

Теорема Калаби-Яу (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Если задана вещественная $(1,1)$-форма η, ей соответствует симметрическая 2-форма $g_\eta(x,y) = \eta(x, Iy)$. **Это задает биекцию между вещественными $(1,1)$-формами и I-инвариантными симметрическими 2-формами**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\Theta_K \in \Lambda^{1,1}(M,\mathbb{R})$ – кривизна связности Леви-Чивита на каноническом расслоении кэлерова многообразия. **Кривизна Риччи** M есть симметрическая 2-форма $\operatorname{Ric}(x,y) = \Theta_K(x, Iy)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика называется **риччи-плоской**, если ее кривизна Риччи равна нулю.

ТЕОРЕМА: **(Калаби-Яу)**
Пусть (M,I) – многообразие Калаби-Яу. **Тогда существует единственная риччи-плоская кэлерова метрика в каждом кэлеровом классе.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Такая метрика называется **метрикой Калаби-Яу**. Поскольку ее голономия действует тривиально на комплексно-линейных формах объема, она лежит в $SU(n)$.

Теорема Богомолова о разложении

ТЕОРЕМА: (Бохнер)
Голоморфные дифференциальные формы на риччи-плоских кэлеровых многообразиях **параллельны.**

ТЕОРЕМА: (теорема Богомолова о разложении)
Пусть M – компактное, риччи-плоское кэлерово многообразие. Тогда **существует конечное накрытие $\tilde{M}$, которое разлагается в произведение кэлеровых многообразий:**

$$\tilde{M} = T \times M_1 \times ... \times M_i \times K_1 \times ... \times K_j,$$

причем все M_i, K_i односвязны, T тор, а $\operatorname{Hol}(M_l) = Sp(n_l)$, $\operatorname{Hol}(K_l) = SU(m_l)$.

Структура многообразий Калаби-Яу

ТЕОРЕМА: 1. Компактные $2n$-мерные многообразия с $\operatorname{Hol} = SU(2n)$ **односвязны, и удовлетворяют**

$$\dim H^{p,0}(M) = \begin{cases} 1 & \text{для } p = 0, 2n \\ 0 & \text{для всех других } p. \end{cases}$$

2. Компактные $2n$-мерные многообразия с $\operatorname{Hol} = Sp(n)$ **односвязны, и удовлетворяют**

$$\dim H^{p,0}(M) = \begin{cases} 1 & \text{для } p = 0, 2, 4, 6, ..., 2n \\ 0 & \text{для всех других } p. \end{cases}$$

3. Компактные $2n+1$-мерные многообразия с $\operatorname{Hol} = SU(2n+1)$ **имеют конечную фундаментальную группу, и удовлетворяют**

$$\dim H^{p,0}(M) = \begin{cases} 1 & \text{для } p = 0, 2n+1 \\ 0 & \text{для всех других } p. \end{cases}$$

Алгебры Клиффорда и спиноры (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V, g – векторное пространство над $k := \mathbb{C}, \mathbb{R}$ с билинейной, симметричной 2-формой, а $\mathcal{C}\!\ell(V,g)$ – алгебра с единицей, полученная как фактор **тензорной алгебры** $T^{\otimes}V := k \oplus V \oplus V \otimes V \oplus ... \oplus T^{\otimes i}V$ по идеалу, порожденному $xy + yx = g(x,y)$, где $x, y \in V$. Алгебра $\mathcal{C}\!\ell(V,g)$ называется **алгеброй Клиффорда**.

ТЕОРЕМА: (периодичность Ботта над $\mathbb{C}$)

$$\mathcal{C}\!\ell(V,g) \cong \mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C})$$

для $V = \mathbb{C}^{2n}$ и

$$\mathcal{C}\!\ell(V,g) \cong \mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C})$$

для $V = \mathbb{C}^{2n+1}$ (g невырожденная).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство спиноров** для V, g есть векторное пространство, на котором $\mathcal{C}\!\ell(V,g)$ действует как матрицы на своем фундаментальном представлении.

Спиноры над $V = W \oplus W^*$ (повторение)

ПРИМЕР: Пусть $V = W \oplus W^*$, с естественной метрикой. Тогда $\mathcal{C}\ell(W) = \operatorname{End}(\Lambda^* W)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим действие $\Lambda^* W$ на $\Lambda^* W$ внешними умножениями, $x, y \to x \wedge y$, и $\Lambda^* W^*$ на $\Lambda^* W$ подстановкой, $x, \xi \to x \lrcorner \xi$. **Это задает на $\Lambda^* W$ структуру $\mathcal{C}\ell(V)$-модуля.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно проверить на образующих: $\omega \wedge x \wedge y = -\omega \wedge y \wedge x$, $(\omega \lrcorner \xi) \lrcorner \zeta = -(\omega \lrcorner \zeta) \lrcorner \xi$, и

$$(\omega \wedge x) \lrcorner \xi + (\omega \lrcorner \xi) \wedge x = \langle x, \xi \rangle \omega.$$

■

СЛЕДСТВИЕ: **$\Lambda^* W$ канонически отождествляется со спинорным представлением** алгебры Клиффорда для $W \oplus W^*$.

Спиноры на многообразиях Калаби-Яу (повторение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: На многообразии Калаби-Яу, спиноры отождествляются с $\Lambda^{*,0}(M)$, а клиффордово умножение действует так:

$$\Lambda^{p,0}(M) \otimes \Lambda^{1,0} M \xrightarrow{\sigma} \Lambda^{p+1,0}(M)$$

есть внешнее умножение, а

$$\Lambda^{p,0}(M) \otimes \Lambda^{0,1} M \xrightarrow{\sigma} \Lambda^{p-1,0}(M)$$

делает из $\eta \otimes x$ подстановку $\eta \lrcorner x^\sharp$, где $x^\sharp \in T^{1,0}M$ есть векторное поле, двойственное x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Эрмитова метрика на $\Lambda^1 M$ зануляется на $\Lambda^{1,0} M$ и $\Lambda^{0,1} M$ (то есть эти пространства изотропны), значит, $\mathcal{C}\ell(\Lambda^1 M)$ действует на $\Lambda^{*,0}(M)$ как на своем фундаментальном представлении. ■

Оператор Дирака на многообразиях Калаби-Яу (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – риманово многообразие с заданной на нем спин-структурой, а $\nabla: S \to S \otimes \Lambda^1 M$ – связность Леви-Чивита на спинорах. Отождествив $\Lambda^1 M$ и TM, можно считать, что $\nabla: S \to S \otimes TM$. Рассмотрим оператор **спинорного умножения** $S \otimes TM \xrightarrow{\sigma} S$. **Оператор Дирака** D есть композиция $\nabla: S \to S \otimes TM$ и σ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гармонический спинор** есть спинор ψ такой, что $D(\psi) = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что на многообразии Калаби-Яу, **оператор Дирака действует как $\partial \oplus \partial^*: \Lambda^{*,0}(M) \to \Lambda^{*,0}(M)$,** где ∂ есть (1,0)-часть дифференциала де Рама, а ∂^* его эрмитово сопряженный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дифференциальная форма η на кэлеровом многообразии называется **гармонической**, если $\Delta_\partial(\eta) = 0$, где $\Delta_\partial = \partial\partial^* + \partial^*\partial$.

СЛЕДСТВИЕ: **На многообразии Калаби-Яу, гармонические спиноры есть гармоническе $(p, 0)$-формы.**

Грубый лапласиан

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Грубый лапласиан**, он же **лапласиан Бохнера** на расслоении B со связностью над римановым многообразием определяется как $Đ(s) := \operatorname{Tr}_{12}(\nabla^2 s)$.

ТЕОРЕМА: $Đ(s) = 0 \Leftrightarrow \nabla s = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку $\nabla(\nabla s, s) = (\nabla^2 s, s) + (\nabla(s), \nabla(s))$, а $(\nabla s, s) = \frac{1}{2} d(s, s)$, имеем

$$\begin{aligned}\int_M (Đ(s), s) \operatorname{Vol} &= -\int_M \operatorname{Tr}_{12}(\nabla(s), \nabla(s)) \operatorname{Vol} + \int_M \operatorname{Tr}_{12}(\nabla d|s|^2) \operatorname{Vol} \\ &= -\int_M |\nabla s|^2 \operatorname{Vol} + \int_M \operatorname{Tr} \operatorname{Hess} |s|^2 \operatorname{Vol}.\end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{Tr} \operatorname{Hess} f \operatorname{Vol} = d(d^*(f \operatorname{Vol}))$, последний интеграл не дает вклада, из чего получаем $\|\nabla s\|^2 = 0$. ■

Гауссова кривизна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V - векторное пространство с невырожденным скалярным произведением g. **След** $\mathrm{Tr}_{12}: V^{\otimes^n} \to V^{\otimes^{n-2}}$ определяется как отображение, двойственное к умножению $A \to g \otimes A$. $\mathrm{Tr}_{ij}: V^{\otimes^n} \to V^{\otimes^{n-2}}$ определяется как отображение, действующее по i-му и j-му сомножителю как Tr_{12} на первом и втором:

$$\mathrm{Tr}_{ij}(a_{123\dots n}) = \sum_{i,j} g^{ij} a_{123\dots n}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гауссова** (она же **скалярная**) кривизна риманова многообразия есть $\mathrm{Tr}_{13}\mathrm{Tr}_{24}(\Theta_\nabla)$, где $\Theta_\nabla \in \mathrm{Sym}^2(\Lambda^2 TM)$ – тензор римановой кривизны.

Клиффордово умножение на $\operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 V)$

ЛЕММА 2 Пусть $R \in \operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 V)$, где V – пространство со скалярным умножением g. Обозначим клиффордово умножение за $\tau: V^{\otimes^4} \to \mathcal{C}\ell(V)$. **Тогда**

$$\tau(R) = \operatorname{Tr}_{13}\operatorname{Tr}_{24} R + \tau(\operatorname{Alt}(R)),$$

где $\operatorname{Alt}: \operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 V) \to \Lambda^4 V$ **– внешнее умножение.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $x, y, z, t \in V$, а $R(x, y, z, t) := (xy - yx)(zt - tz) + (zt - tz)(xy - yx)$ соответствующий элемент $\operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 V)$. Тогда

1. Если x, y, z, t попарно ортогональны, то $\tau(R(x, y, z, t)) = \tau(\operatorname{Alt}(R))$, потому что x, y, z, t антикоммутируют в алгебре Клиффорда.

2. Если x, y, z попарно ортогональны, а $y = t$, то $xy - yx$ антикоммутирует с $zt - tz$, значит, $\tau(R(x, y, z, t)) = 0$.

3. Если x, y ортогональны, а $y = t$ и $x = z$, то
$\tau(R(x, y, z, t)) = \tau((xy - yx))^2 = g(x, x)g(y, y)$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Для $R \in V_{2,2}$ **(вектора в пространстве алгебраических тензоров кривизны)** $\tau(R) = \operatorname{Tr}_{13}\operatorname{Tr}_{24} R$**.**

Формула Вейценбека

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $D: S \to S$ – оператор Дирака, а $x_i \in TM$ – ортонормированный репер. **Тогда $D(s) = \sum_i \sigma(x_i, \nabla_{x_i}(s))$, где $\sigma: TM \otimes S \to S$ есть клиффордово умножение.**

СЛЕДСТВИЕ: Обозначим за $\Theta \in \Lambda^2 M \otimes \operatorname{End}(S)$ кривизну S. Тогда $D^2(s) = \sum_{i,j} \sigma(x_i x_j, \nabla_{x_i} \nabla_{x_j} s) = \sum_{i,j} \sigma(x_i x_j, \Theta_{x_i, x_j} s) + \sum_{i,j} \sigma(x_i x_j + x_j x_i, \nabla_{x_i} \nabla_{x_j} s)$. Поскольку $\sigma(x_i x_j + x_j x_i, v) = g(x_i, x_j) v$, получаем

$$D^2(s) = \sigma(\Theta, s) + \sum_i \nabla_{x_i} \nabla_{x_i} s.$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Предыдущее следствие переписывается как

$$D^2(s) = \sigma(\Theta, s) + Ð(s),$$

где Ð – грубый лапласиан на спинорах.

ТЕОРЕМА: (формула Вайценбека, формула Лихнеровича) Пусть M – риманово многообразие со спин-структурой, Ð : $S \to S$ – грубый лапласиан, Sc – оператор умножения на скалярную кривизну, а $D: S \to S$ – оператор Дирака. **Тогда $D^2 = Ð + \mathrm{Sc}$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $D^2(s) = \sigma(\Theta, s) + Ð(s)$, а $\sigma(\Theta, s) = \mathrm{Sc}(s)$ в силу Леммы 2. ∎

Теорема Бохнера

ЗАМЕЧАНИЕ: $g(Đ(s), s) = \operatorname{Tr}_{12}(\nabla^2(s), s) = g(\nabla(s), \nabla(s))$. Поэтому $\int g(Đ(s), s) = \int_M g(\nabla(s), \nabla(s))$. Значит, **на компактном многообразии, если $Đ(s) = 0$, то $\nabla(s) = 0$.**

ТЕОРЕМА: **(теорема Бохнера о занулении)**
Пусть M – компактное риманово многообразие с неотрицательной скалярной кривизной Sc. **Тогда $\nabla(s) = 0$ для любого гармонического спинора. Если к тому же $\mathrm{Sc} > 0$ в какой-то точке, то $s = 0$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В силу формулы Вайценбека,

$$0 = g(D^2(s), s) = g(Đ(s), s) + \int_M \mathrm{Sc} \cdot g(s, s) = \int_M g(\nabla(s), \nabla(s)) + \int_M \mathrm{Sc} \cdot g(s, s).$$

Значит, $\nabla(s) = 0$. Если в окрестности $m \in M$, $\mathrm{Sc} > 0$, то в этой окрестности $s = 0$, и **в силу $\nabla(s) = 0$, $s = 0$ на всем M.** ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M – компактное кэлерово многообразие с метрикой Калаби-Яу. Тогда **$\nabla\Omega = 0$ для любой голоморфной формы Ω** на M.

Топология риччи-плоских многообразий

ТЕОРЕМА: (Чигер-Громолл) Пусть M – полное, риччи-плоское риманово многообразие с бесконечной фундаментальной группой. Тогда **универсальное накрытие M есть произведение $\mathbb{R}$ и риччи-плоского многообразия меньшей размерности**.

СЛЕДСТВИЕ: Фундаментальная группа компактного риччи-плоского риманова многообразия **виртуально полициклическая (сюръективно проектируется в свободную абелеву группу с конечным ядром)**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Эквивалентное утверждение: **каждое компактное риччи-плоское многообразие имеет конечное накрытие со свободной абелевой фундаментальной группой.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Это утверждение содержит в себе решение 18-ой проблемы Гильберта о классификации кристаллографических групп (Бибербах).

Теорема Богомолова о разложении

ТЕОРЕМА: (теорема Богомолова о разложении) Пусть M – компактное, риччи-плоское кэлерово многообразие. Тогда **существует конечное накрытие $\tilde M$, которое разлагается в произведение кэлеровых многообразий:**

$$\tilde M = T \times M_1 \times ... \times M_i \times K_1 \times ... \times K_j,$$

причем все M_i, K_i односвязны, T тор, а $\operatorname{Hol}(M_l) = Sp(n_l)$, $\operatorname{Hol}(K_l) = SU(m_l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Из теоремы Чигера-Громолла и виртуальной полицикличности фундаментальной группы M следует, что **конечное накрытие M разлагается в произведение тора и односвязного многообразия Калаби-Яу.** Затем **применяем теорему Берже о классификации голономий и теорему де Рама о разложении.** ■

Теорема Богомолова о разложении (продолжение)

ТЕОРЕМА: 1. Компактные $2n$-мерные многообразия с $\mathrm{Hol} = SU(2n)$ **односвязны, и удовлетворяют**

$$\dim H^{p,0}(M) = \begin{cases} 1 & \textbf{для } p = 0, 2n \\ 0 & \textbf{для всех других } p. \end{cases}$$

2. Компактные $2n$-мерные многообразия с $\mathrm{Hol} = Sp(n)$ **односвязны, и удовлетворяют**

$$\dim H^{p,0}(M) = \begin{cases} 1 & \textbf{для } p = 0, 2, 4, 6, ..., 2n \\ 0 & \textbf{для всех других } p. \end{cases}$$

3. Компактные $2n+1$-мерные многообразия с $\mathrm{Hol} = SU(2n+1)$ **имеют конечную фундаментальную группу, и удовлетворяют**

$$\dim H^{p,0}(M) = \begin{cases} 1 & \textbf{для } p = 0, 2n+1 \\ 0 & \textbf{для всех других } p. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Утверждение о размерности $H^{p,0}(M)$ следует из теории инвариантов. Действительно, $(p,0)$-**форма гармонична тогда и только тогда, когда она параллельна,** а это **равносильно** $\mathrm{Hol}(M)$-**инвариантности.** Односвязность см. следующий слайд.

Голоморфная эйлерова характеристика

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Голоморфная эйлерова характеристика** комплексного многообразия есть $\sum(-1)^p \dim H^{0,p}(M)$.

ТЕОРЕМА: (Римана-Роха-Хирцебруха) Для n-мерного компактного комплексного многообразия, **голоморфную эйлерову характеристику можно выразить через классы Черна,** $\chi(M) = \int_M td_n$, где td_n есть n-я компонента полинома Тодда,

$$td(M) = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24}c_1c_2 + \frac{1}{720}(-c_1^4 + 4c_1^2c_2 + c_1c_3 + 3c_2^22 - c_4) + ...$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Классы Черна выражаются через полиномы от кривизны. Поэтому $\chi(\tilde{M}) = p\chi(M)$ **для p-листного неразветвленного расслоения $\tilde{M} \to M$.**

Доказательство односвязности четномерных многообразий Калаби-Яу с неприводимой голономией:

Пусть M – многообразие с $\operatorname{Hol}(M) = SU(2n)$. Тогда $\chi(M) = 2$, поэтому для любого накрытия $\tilde{M} \to M$ имеем $2 = \chi(\tilde{M}) = p\chi(M) = 2p$.

Аналогично, для $\operatorname{Hol}(M) = Sp(n)$, $\chi(M) = n + 1$, поэтому для любого накрытия $\tilde{M} \to M$ имеем $n + 1 = \chi(\tilde{M}) = p\chi(M) = p(n + 1)$.