Алгебры Клиффорда и спиноры

Миша Вербицкий

Школа-конференция по теории струн,
интегрируемым моделям и теории представлений

НМУ, Москва, 30 января 2016

План

1. Классификация алгебр Клиффорда и периодичность Ботта.

2. Спинорная группа и спинорное представление.

3. Спин-структура на многообразии и оператор Дирака.

Градуированные алгебры и суперкоммутативность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированное векторное пространство** есть пространство $V^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V^i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированная алгебра** (или "градуированная ассоциативная алгебра") есть алгебра $A^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ с умножением, которое совместимо с градуировкой: $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Билинейное отображение градуированных пространств, которое удовлетворяет $A^i \cdot B^j \subset C^{i+j}$, называется **градуированным**, или **совместимым с градуировкой**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Оператор на градуированном пространстве называется **четным** (**нечетным**), если он сдвигает градуировку на четное (нечетное) число. **Четность** $\tilde{a}$ оператора a есть 0, если он четный, 1 если нечетный. Мы говорим, что оператор **чистый** если он четный или нечетный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Градуированная ассоциативная алгебра A^* называется **суперкоммутативной** если $ab = (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}} ba$

Алгебры Клиффорда

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V, g – векторное пространство над $k := \mathbb{C}, \mathbb{R}$ с билинейной, симметричной 2-формой, а $\mathcal{C}\!\ell(V,g)$ – алгебра с единицей, полученная как фактор **тензорной алгебры** $T^{\otimes}V := k \oplus V \oplus V \otimes V \oplus ... \oplus T^{\otimes i}V$ по идеалу, порожденному $xy + yx = g(x,y)$, где $x, y \in V$. Алгебра $\mathcal{C}\!\ell(V,g)$ называется **алгеброй Клиффорда**.

ПРИМЕР: Если $g = 0$, $\mathcal{C}\!\ell(V,g)$ есть алгебра Грассманна.

УПРАЖНЕНИЕ: Рассмотрим фильтрацию $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset ... \subset T^{\otimes}V$, $F_i := k \oplus V \oplus V \otimes V \oplus ... \oplus T^{\otimes i}V$, и пусть $C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset ... \subset \mathcal{C}\!\ell(V,g)$ – соответствующая фильтрация на $\mathcal{C}\!\ell(V,g)$. Докажите, что **присоединенная градуированная алгебра $\bigoplus_i C_i/C_{i-1}$ изоморфна алгебре Грассманна.**

СЛЕДСТВИЕ: $\dim \mathcal{C}\!\ell(V,g) = 2^{\dim V}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Алгебра Клиффорда **$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированная**: $\mathcal{C}\!\ell(V,g) = \mathcal{C}\!\ell_{\text{even}}(V,g) \oplus \mathcal{C}\!\ell_{\text{odd}}(V,g)$.

Градуированное тензорное произведение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A := A_{\text{even}} \oplus A_{\text{odd}}$, $B := B_{\text{even}} \oplus B_{\text{odd}}$ – градуированные ассоциативные алгебры. Определим **градуированное тензорное произведение** $A\tilde{\otimes}B$ как $A \otimes B$ с умножением, заданным по формуле $a \otimes b \cdot a' \otimes b' = (-1)^{\tilde{b}\tilde{a}'} aa' \otimes bb'$, где $\tilde{x}$ обозначает **четность** x.

ПРИМЕР: Градуированное тензорное произведение алгебр Грассманна соответствует прямой сумме векторных пространств:

$$\Lambda^* V \tilde{\otimes} \Lambda^* W \cong \Lambda^*(V \oplus W)$$

ПРИМЕР: То же и с алгебрами Клиффорда:

$$\mathcal{C}\ell(V, g) \tilde{\otimes} \mathcal{C}\ell(V', g') = \mathcal{C}\ell(V \oplus V', g + g').$$

Градуированное тензорное произведение и псевдоскаляр

ЛЕММА (*): Пусть $A := A_{\mathrm{even}} \oplus A_{\mathrm{odd}}$, $B := B_{\mathrm{even}} \oplus B_{\mathrm{odd}}$ градуированные ассоциативные алгебры, причем в B содержится четный элемент **("псевдоскаляр")** ε со следующими свойствами: $\varepsilon^2 = 1$, $\varepsilon b \varepsilon = (-1)^{\tilde{b}} b$. **Тогда** $A \tilde{\otimes} B \cong A \otimes B$**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим подалгебру $A' \subset A \tilde{\otimes} B$, порожденную элементами вида $a \tilde{\otimes} \varepsilon^{\tilde{a}}$, и $B' = 1 \otimes B \subset A \tilde{\otimes} B$.

Тогда

1. $A' \cong A$ **коммутирует с** $B' \cong B$**.**

2. $A' \otimes B' = A \tilde{\otimes} B$ **как векторное пространство.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A = A_{\mathrm{even}} \oplus A_{\mathrm{odd}}$ – градуированная алгебра. Рассмотрим новое умножение $\bullet$ на A, $a \bullet a' := (-1)^{\tilde{a}\tilde{a}'} a a'$. Обозначим получившуюся алгебру за $A^{\perp}$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\mathcal{C}\ell(V, g)^{\perp} = \mathcal{C}\ell(V, -g)$**.**

ЗАМЕЧАНИЕ (*): Если в условиях Леммы (*) заменить $\varepsilon^2 = 1$ **на** $\varepsilon^2 = -1$**, получим, что** $A \tilde{\otimes} B \cong A^{\perp} \otimes B$**.**

Вычисление алгебры Клиффорда для размерности 1,2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим $\mathcal{C}\ell(V,g)$ за $\mathcal{C}\ell(p,q)$, если V – векторное пространство над $\mathbb{R}$, а g – невырожденная форма сигнатуры (p,q).

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\mathcal{C}\ell(1,0) = \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$, $\mathcal{C}\ell(0,1) = \mathbb{C}$, $\mathcal{C}\ell(0,2) = \mathbb{H}$,

УТВЕРЖДЕНИЕ: $\mathcal{C}\ell(1,1) = \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть A – алгебра автоморфизмов $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$, порожденная $I := \sqrt{1}$ и стандартной антикомплексной инволюцией H. **Тогда $IH = -HI$, $I^2 = -1$, $H^2 = 1$.** ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: $\mathcal{C}\ell(2,0) = \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$,

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Легко видеть, что $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$ **порождена матрицами**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

которые антикоммутируют и в квадрате равны 1.

Единичный псевдоскаляр

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V, g – ориентированное вещественное пространство с ортогональным базисом $e_1, ..., e_n$, где $g(e_i, e_i) = \pm 1$. **Единичный псевдоскаляр** в $\mathcal{C}\ell(V, g)$ есть $\varepsilon := e_1 e_2 e_3 ... e_n$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\varepsilon e_i = (-1)^{n-1} e_i \varepsilon$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\varepsilon^2 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-1)^q$, если g имеет сигнатуру (p, q).

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\varepsilon^2 = (-1)^{n(n-1)/2}(-1)^q = (-1)^{(p-q)(p-q-1)/2} = \begin{cases} +1 & p - q \equiv 0, 1 \mod 4 \\ -1 & p - q \equiv 2, 3 \mod 4. \end{cases}$$

Периодичность Ботта над $\mathbb{C}$

СЛЕДСТВИЕ: $\mathcal{C}\ell(p+m, q+m') \cong \mathcal{C}\ell(p,q) \otimes \mathcal{C}\ell(m,m')$ **если** $m+m'$ **четно, а** $m - m' \equiv 0 \mod 4$**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В $\mathcal{C}\ell(m,m')$ псевдоскаляр ε удовлетворяет $\varepsilon^2 = 1$ и антикоммутирует с нечетными элементами, что позволяет применить Лемму (*). Получаем изоморфизм $\mathcal{C}\ell(p,q) \otimes \mathcal{C}\ell(m,m') \cong \mathcal{C}\ell(p,q) \tilde{\otimes} \mathcal{C}\ell(m,m')$. Дальше применяем $\mathcal{C}\ell(V,g) \tilde{\otimes} \mathcal{C}\ell(V',g') = \mathcal{C}\ell(V \oplus V', g+g')$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Обозначим за $A[i]$ тензорное произведение $A \otimes \operatorname{Mat}(i, \mathbb{R}) \cong \operatorname{Mat}(i, A)$. **Тогда** $\mathcal{C}\ell(p+1, q+1) \cong \mathcal{C}\ell(p,q)[2]$**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Применяем предыдущее следствие и изоморфизм $\mathcal{C}\ell(1,1) = \operatorname{Mat}(2, \mathbb{R})$. ■

ТЕОРЕМА: (периодичность Ботта над $\mathbb{C}$)

$$\mathcal{C}\ell(V,g) \cong \operatorname{Mat}(2^n, \mathbb{C})$$

для $V = \mathbb{C}^{2n}$ и

$$\mathcal{C}\ell(V,g) \cong \operatorname{Mat}(2^n, \mathbb{C}) \oplus \operatorname{Mat}(2^n, \mathbb{C})$$

для $V = \mathbb{C}^{2n+1}$ (g невырожденная). ■

Периодичность Ботта над $\mathbb{R}$

СЛЕДСТВИЕ: $\mathcal{C}\!\ell(p+m,q+m') \cong \mathcal{C}\!\ell(q,p)\otimes \mathcal{C}\!\ell(m,m')$ если $m+m'$ четно, а $m-m'\equiv 2 \mod 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: 1. В $\mathcal{C}\!\ell(m,m')$ псевдоскаляр ε удовлетворяет $\varepsilon^2=-1$ и антикоммутирует с нечетными элементами, что позволяет применить Замечание (*), получая изоморфизм $\mathcal{C}\!\ell(p,q)^\perp\otimes \mathcal{C}\!\ell(m,m') \cong \mathcal{C}\!\ell(p,q)\tilde{\otimes}\mathcal{C}\!\ell(m,m') \cong \mathcal{C}\!\ell(p+m,q+m')$. Затем пользуемся изоморфизмом $\mathcal{C}\!\ell(p,q)^\perp = \mathcal{C}\!\ell(p,q)$. ■

СЛЕДСТВИЕ: $\mathcal{C}\!\ell(p+2,q)\cong \mathcal{C}\!\ell(q,p)[2]$ и $\mathcal{C}\!\ell(p,q+2)\cong \mathcal{C}\!\ell(q,p)\otimes\mathbb{H}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Применяем предыдущее следствие и изоморфизм $\mathcal{C}\!\ell(2,0)=\operatorname{Mat}(2,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}\!\ell(0,2)=\mathbb{H}$ ■

СЛЕДСТВИЕ: Периодичность по модулю 4: в силу предыдущего следствия, получаем $\mathcal{C}\!\ell(p+4,q)\cong \mathcal{C}\!\ell(q,p+2)[2]=\mathcal{C}\!\ell(p,q)\otimes\operatorname{Mat}(2,\mathbb{H})$ и $\mathcal{C}\!\ell(p,q+4)\cong \mathcal{C}\!\ell(q+2,p)\otimes\mathbb{H}=\mathcal{C}\!\ell(p,q)\otimes\operatorname{Mat}(2,\mathbb{H})$.

Периодичность Ботта над $\mathbb{R}$ (продолжение)

СЛЕДСТВИЕ: Периодичность по модулю 8: из изоморфизма $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = \operatorname{Mat}(4, \mathbb{R})$ и предыдущего следствия обретаем $\mathcal{C}\!\ell(p+8, q) = \mathcal{C}\!\ell(p, q)[16]$, $\mathcal{C}\!\ell(p, q+8) = \mathcal{C}\!\ell(p, q)[16]$.

	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
0									$\mathbb{R}$								
1								$\mathbb{R}^2$		$\mathbb{C}$							
2							$\operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$		$\operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$		$\mathbb{H}$						
3						$\operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$		$\operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})^2$		$\operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$		$\mathbb{H}^2$					
4					$\operatorname{Mat}_2(\mathbb{H})$		$\operatorname{Mat}_4(\mathbb{R})$		$\operatorname{Mat}_4(\mathbb{R})$		$\operatorname{Mat}_2(\mathbb{H})$		$\operatorname{Mat}_2(\mathbb{H})$				
5				$\operatorname{Mat}_2(\mathbb{H})^2$		$\operatorname{Mat}_4(\mathbb{C})$		$\operatorname{Mat}_4(\mathbb{R})^2$		$\operatorname{Mat}_4(\mathbb{C})$		$\operatorname{Mat}_2(\mathbb{H})^2$		$\operatorname{Mat}_4(\mathbb{C})$			
6			$\operatorname{Mat}_4(\mathbb{H})$		$\operatorname{Mat}_4(\mathbb{H})$		$\operatorname{Mat}_8(\mathbb{R})$		$\operatorname{Mat}_8(\mathbb{R})$		$\operatorname{Mat}_4(\mathbb{H})$		$\operatorname{Mat}_4(\mathbb{H})$		$\operatorname{Mat}_8(\mathbb{R})$		
7		$\operatorname{Mat}_8(\mathbb{C})$		$\operatorname{Mat}_4(\mathbb{H})^2$		$\operatorname{Mat}_8(\mathbb{C})$		$\operatorname{Mat}_8(\mathbb{R})^2$		$\operatorname{Mat}_8(\mathbb{C})$		$\operatorname{Mat}_4(\mathbb{H})^2$		$\operatorname{Mat}_8(\mathbb{C})$		$\operatorname{Mat}_8(\mathbb{R})^2$	
8	$\operatorname{Mat}_{16}(\mathbb{R})$		$\operatorname{Mat}_8(\mathbb{H})$		$\operatorname{Mat}_8(\mathbb{H})$		$\operatorname{Mat}_{16}(\mathbb{R})$		$\operatorname{Mat}_{16}(\mathbb{R})$		$\operatorname{Mat}_8(\mathbb{H})$		$\operatorname{Mat}_8(\mathbb{H})$		$\operatorname{Mat}_{16}(\mathbb{R})$		$\operatorname{Mat}_{16}(\mathbb{R})$
ε^2	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Автоморфизмы $\mathrm{Mat}(V)$

ТЕОРЕМА: Группа автоморфизмов алгебры $\mathrm{Mat}(V)$ изоморфна $PGL(V)$ (фактора группы $GL(V)$ по центру).

Доказательство. Шаг 1: Группа $PGL(V)$ действует на $\mathrm{Mat}(V)$ по формуле $g, A \longrightarrow gAg^{-1}$. **Это задает вложение $PGL(V) \stackrel{\Psi}{\hookrightarrow} \mathrm{Aut}(\mathrm{Mat}(V))$.**

Шаг 2: Пусть $\Pi_1, ..., \Pi_n \in \mathrm{Mat}(V)$ – набор попарно коммутирующих, линейно независимых проекторов ранга 1, где $n = \dim V$. Поскольку **образы Π_i линейно независимы и порождают V,** можно выбрать базис $e_i \in \mathrm{im}\, \Pi_i$. По $\{e_i\}$ нетрудно восстановить $\{\Pi_i\}$, а коль скоро $GL(V)$ действует транзитивно на множестве всех базисов, **$PGL(V)$ действует транзитивно на множестве наборов $\{\Pi_i\}$.**

Шаг 3: Получаем, что для сюрьективности $PGL(V) \stackrel{\Psi}{\hookrightarrow} \mathrm{Aut}(\mathrm{Mat}(V))$ **достаточно доказать, что каждый автоморфизм $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Mat}(V))$, сохраняющий набор проекторов $\{\Pi_i\}$, задается сопряжением** с диагональной в базисе $\{e_i\}$ матрицей.

Автоморфизмы $\mathrm{Mat}(V)$ (продолжение)

Шаг 4: $A\Pi_i = A$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{im} A \subset \operatorname{im} P_i$, а $\Pi_i A = A$ тогда и только тогда, когда $\ker A \supset \ker P_i$. Это значит, что γ **переводит матрицу e_{ij} в пропорциональную ей, для любого i, j.***

Шаг 5: Значит, γ сохраняет подалгебру $\mathrm{Mat}(k) \subset \mathrm{Mat}(n)$ натянутую на любые k элементов базиса. Воспользовавшись индукцией по n, заключаем, что γ **действует на $\mathrm{Mat}(k) \subset \mathrm{Mat}(n)$, $k < n$, сопряжением с матрицей, диагональной в базисе $\{e_i\}$.**

Шаг 6: Пусть $a_{ij} \in \mathbb{C}^*$ определяется из соотношения $a_{ij}e_{ij} := \gamma(e_{ij})$. **Поскольку γ действует на матричных подалгебрах меньшей размерности сопряжением с диагональной матрицей (C_{ii}), имеем $a_{ij} = C_{ii}^{-1}C_{jj}$, если $n > 2$.** Если же $n = 1$, мы замечаем, что $a_{11} = a_{22} = 1$, потому что соответствующие элементарные матрицы суть проекции, а $a_{21}a_{21} = 1$, потому что $a_{21}e_{12} + a_{12}e_{21}$ переставляет операторы проекции e_{11} и e_{22}, соответственно, γ в размерности 2 получается сопряжением с матрицей $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$. ■

*У e_{ij} стоит единица на клетке (i, j), в остальных клетках нули

Псевдоскаляр на нечетномерном пространстве

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для нечетномерного пространства V псевдоскаляр $\varepsilon = e_1 e_2 ... e_{2n+1}$ коммутирует с умножением на образующие $\mathcal{C}\ell(V)$, значит, определяет автоморфизм $\mathcal{C}\ell(V)$. Если V комплексное, всегда можно выбрать базис $\{e_i\}$ таким образом, что $\varepsilon^2 = 1$. Собственные значения ε задают разложение в сумму алгебр $\mathcal{C}\ell(V) = \mathcal{C}\ell^+(V) \oplus \mathcal{C}\ell^-(V)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Каждая из алгебр $\mathcal{C}\ell^+(V)$, $\mathcal{C}\ell^-(V)$ изоморфна матричной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Собственные значения ε, действующего на $\mathcal{C}\ell(V)$, равны ± 1, так как $\varepsilon^2 = 1$. С другой стороны, автоморфизм V, переставляющий два соседних вектора из базиса, переводит ε в $-\varepsilon$, значит, меняет собственные пространства, соответствующие $+1$ и -1. Каждое из этих пространств есть подалгебра в $\mathcal{C}\ell(V)$. Мы получили, что **разложение $\mathcal{C}\ell(V) = \mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C})$ задается действием ε.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Центр Z алгебры $\mathcal{C}\ell(V)$ двумерный и изоморфен $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Группа $O(V)$ действует на $\mathcal{C}\ell(V)$ и на Z автоморфизмами; поскольку $\mathrm{Aut}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, получаем, что **$O(V)$ переводит ε в $\pm\varepsilon$, причем связная компонента $SO(V)$ сохраняет ε.**

СЛЕДСТВИЕ: $SO(V)$ действует на $\mathcal{C}\ell^+(V)$, $\mathcal{C}\ell^-(V)$ автоморфизмами.

Спинорная группа (четномерные пространства)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $V = \mathbb{C}^{2n}$, - векторное пространство над $\mathbb{C}$ с невырожденным скалярным произведением. Группа Ли $SO(V)$ действует на $\mathcal{C}\ell(V)$ автоморфизмами, что задает гомоморфизм

$$SO(V) \hookrightarrow \operatorname{Aut}(\operatorname{Mat}(2^n, \mathbb{C})) = PGL(2^n, \mathbb{C})$$

в силу теоремы, доказанной выше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (Эли Картан, 1913) **Спинорное представление** алгебры Ли $\mathfrak{so}(V)$ есть ее представление в $\mathbb{C}^{2^n}$ заданное изоморфизмом $\mathfrak{pgl}(2^n) = \mathfrak{sl}(2^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Спинорная группа** $\operatorname{Spin}(2n)$ есть накрытие $SO(2n)$, полученное интегрированием спинорного представления.

Спинорная группа (нечетномерные пространства)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для нечетномерного $V = \mathbb{C}^{2n+1}$, **$+$-спинорное представление $\mathfrak{so}(V)$** есть действие $\mathfrak{so}(V)$ в $\mathbb{C}^{2^n}$, полученное из изоморфизма $\mathcal{C}\ell^+(V) = \mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C})$ и $\mathrm{Aut}(\mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C})) = PGL(2^n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{pgl}(2^n) = \mathfrak{sl}(2^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **$-$-спинорное представление $\mathfrak{so}(V)$** определяется аналогично.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Эти представления **переводятся одно в другое сопряжением с любым элементом $O(V)\backslash SO(V)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Такой элемент переводит ε в $-\varepsilon$, значит, меняет местами $\mathcal{C}\ell^+(V)$ и $\mathcal{C}\ell^-(V)$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Спинорная группа** $\mathrm{Spin}(2n+1)$ есть накрытие группы $SO(2n+1)$, полученное интегрированием $+$- или $-$-спинорного представления.

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу предыдущего утверждения, эти представления изоморфны.

Спинорная группа (явная конструкция)

ЛЕММА: Рассмотрим отображение $\mathfrak{so}(V) \xrightarrow{\Psi} C\!\ell(V)$ переводящее 2-форму $x \wedge y \in \mathfrak{so}(V) = \Lambda^2 V$, $x \perp y$ в $xy \in C\!\ell(V)$. **Это гомоморфизм алгебр Ли.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Обозначим за L_x умножение на $x \in V$ в $C\!\ell(V)$. Если $\langle x, y\rangle \perp \langle z, t\rangle$, то $[xy, zt] = 0$, так как L_a, L_b **антикоммутируют для** $a \perp b$**.** Для попарно ортогональных x, y, t, имеем $[xy, xt] = -2ytg(x, y)$. ■

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $x \perp y$ лежат в V. **Докажите, что** $\nu \longrightarrow [xy, \nu]$ **сохраняет** $V \subset C\!\ell(V)$**.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за $C\!\ell(V)^*$ группу всех обратимых элементов в $C\!\ell(V)$.

ТЕОРЕМА: $\mathrm{Spin}(V)$ **изоморфна группе всех элементов в группе** $C\!\ell(V)^*$**, удовлетворяющих** $g(V) \subset V$**,** и действующих на V с сохранением ориентации и скалярного произведения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Предыдущая лемма показывает, что $\mathrm{Spin}(V) \subset C\!\ell(V)^*$ **порождена элементами вида** $e^{xy} \in C\!\ell(V)$**, где** $x \perp y$ **лежат в** V**.** Поскольку $[xy, \cdot]$ сохраняет V, группа $\mathrm{Spin}(V)$ сохраняет V.

Обратное включение получается из соображений размерности. ■

Пинорная группа

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $x \in V$ – вектор длины 1. Тогда $x^2 = 1$, и $y \longrightarrow x^{-1}yx$ **действует на V отражениями относительно x.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа $\mathrm{Pin}(V)$ **(пинорная группа)** есть подгруппа $\mathcal{C}\!\ell(V)^*$, порожденная умножениями на вектора $x \in V$ длины 1.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Эта группа несвязна** и является накрытием $O(V)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Связная компонента $\mathrm{Pin}(V)$ равна $\mathrm{Spin}(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $\mathrm{Pin}(V)$ сюрьективно отображается в $O(V)$, ибо содержит все отражения. Значит, соответствующее отображение связных компонент сюрьективно. Его ядро K состоит из скаляров, что ясно из классификации автоморфизмов матричной алгебры. Поскольку определитель умножения на x равен 1, K тривиально. ■

СЛЕДСТВИЕ: **Накрытие $\mathrm{Spin}(V) \longrightarrow SO(V)$ нетривиально.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно доказать аналогичное утверждение для $\mathrm{Pin}(V)$, но x и $-x$ принадлежат одной и той же компоненте связности $\mathrm{Pin}(V)$ и переводятся в одну и ту же изометрию V. ■

Спиноры над $V = W \oplus W^*$

ПРИМЕР: Пусть $V = W \oplus W^*$, с естественной метрикой. Тогда $\mathcal{C}\ell(W) = \Lambda^* W$, $\mathcal{C}\ell(W^*) = \Lambda^* W^*$ и имеет место разложение $\mathcal{C}\ell(W) = \Lambda^* W \otimes \Lambda^* W^* = \Lambda^* V$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим действие $\Lambda^* W$ на $\Lambda^* W$ внешними умножениями, $x, y \longrightarrow x \wedge y$, и $\Lambda^* W^*$ на $\Lambda^* W$ подстановкой, $x, \xi \longrightarrow x \lrcorner \xi$. **Это задает на $\Lambda^* W$ структуру $\mathcal{C}\ell(V)$-модуля.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно проверить на образующих: $\omega \wedge x \wedge y = -\omega \wedge y \wedge x$, $(\omega \lrcorner \xi) \lrcorner \zeta = -(\omega \lrcorner \zeta) \lrcorner \xi$, и

$$(\omega \wedge x) \lrcorner \xi + (\omega \lrcorner \xi) \wedge x = \omega \langle x, \xi \rangle.$$

■

СЛЕДСТВИЕ: **$\Lambda^* W$ канонически отождествляется со спинорным представлением** $\operatorname{Spin}(W \oplus W^*)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Лагранжево подпространство** в векторном пространстве со скалярным произведением g есть подпространство половинной размерности, на которое g ограничивается тривиально. Разложение $V = W_1 \oplus W_2$ в прямую сумму лагранжевых подпространств называется **лагранжевым разложением**.

Главные G-расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Главное G-расслоение** есть гладкое расслоение $X \longrightarrow M$ со свободным действием группы Ли G, транзитивным на слоях.

ПРИМЕР: Пусть B – n-мерное векторное расслоение. **Расслоение реперов** в B есть главное $GL(n)$-расслоение, слой которого в $m \in M$ есть пространство реперов в $B_m M$.

ПРИМЕР: Если на B задана метрика, **расслоение ортогонормированных реперов** есть главное $O(n)$-расслоение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Расслоенное произведение** пространств M_1, M_2 с действием G есть фактор $M_1 \times_G M_2 := (M_1 \times M_2)/G$ по диагональному действию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть P есть G-расслоение, а V – представление G. **Ассоциированное векторное расслоение** есть $P \times_G V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $TM = RM \times_{GL(n)} \mathbb{R}^n$, где RM есть расслоение реперов, а $\mathbb{R}^n$ – фундаментальное представление $GL(n)$. **Это позволяет восстановить TM по соответствующему главному G-расслоению.**

Редукция главных G-расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $G_1 \longrightarrow G$ – гомоморфизм групп. **Редукция** G-расслоения P к G_1 есть главное G_1-расслоение P_1 такое, что $P_1 \times_{G_1} G = P$.

ПРИМЕР: Расслоение ортогонормированных реперов задает редукцию главного $GL(n)$-расслоения к $O(n)$-расслоению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **G-структура на гладком многообразии M** есть редукция главного $GL(n)$-расслоения реперов на M к G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Структурной группой риманова многообразия** называется главное $O(n)$-расслоение, связанное с римановой структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Spin-структура на ориентированном римановом многообразии M есть редукция структурной группы $SO(n)$ этого многообразия к $\mathrm{Spin}(n)$.

Связности и G-структуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть P – главное G-расслоение, V – точное представление G, а B – ассоциированное векторное расслоение. Связность ∇ на B называется **G-инвариантной**, если для любого $g \in G$ и любого базиса $\xi_1, ...\xi_n$ в $B|_m$, любой параллельный перенос относительно ∇ переводит $\xi_1, ...\xi_n$ в $g(\xi_1), ..., g(\xi_n)$, для какого-то $g \in G$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Другими словами, **∇ согласована с G, если голономия ∇ лежит в G.**

ЗАМЕЧАНИЕ: **Две связности, согласованные с G, отличаются на 1-форму вида $A \in \Lambda^1(M) \otimes \mathfrak{g}$,** где $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ – алгебра Ли инфинитезимальных преобразований B, индуцированных G.

Связность на G-расслоениях

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность ∇ на главном G-расслоении P есть G-инвариантное расщепление касательного TP в прямую сумму $TP = T_\nabla P \oplus T_{\text{ver}} P$, где $T_{\text{ver}} P$ – касательные вектора к слоям $P \longrightarrow M$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Связности на главном G-расслоении P **взаимно однозначно соответствуют G-инвариантным связностям на ассоциированном векторном расслоении**, для любого точного представления G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Докажите самостоятельно. ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M – риманово многообразие с ортогональной связностью. **Тогда на расслоении спиноров задана каноническая связность,** которая называется **спинорной связностью**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Соответствующая G-структура получается из стандартной $SO(n)$-структуры накрытием, значит, **связностей у них столько же.** ■

Оператор Дирака

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – риманово многообразие с заданной на нем Spin-структурой, а $\nabla: S \longrightarrow S \otimes \Lambda^1 M$ – соответствующая связность на спинорах. Отождествив $\Lambda^1 M$ и TM, можно считать, что $\nabla: S \longrightarrow S \otimes TM$. Рассмотрим оператор **спинорного умножения** $S \otimes TM \xrightarrow{\sigma} S$. **Оператор Дирака** D есть композиция $\nabla: S \longrightarrow S \otimes TM$ и σ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гармонический спинор** есть спинор ψ такой, что $D(\psi) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Киллингов спинор** есть спинор ψ такой, что $\nabla_X(\psi) = X \cdot \psi$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Ненулевые киллинговы спиноры существуют только на многообразиях Эйнштейна.