Кэлерова структура в пространстве узлов на G_2-многообразии.

Миша Вербицкий

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

4 мая 2012, Новосибирск

Мотивация

Кватернионные/гиперкэлеровы/гиперкомплексные структуры имеют интерпретацию в терминах комплексной геометрии, с использованием **пространства твисторов**. Кватернионные структуры на этих многообразиях переносятся в алгебро-геометрические структуры на пространствах твисторов. **Я хочу найти аналогичную интерпретацию для G_2-геометрии.**

Чтобы определить пространство твисторов G_2-многообразия, **необходимо чем-то пожертвовать.**

Достаточно **пожертвовать конечномерностью.**

Пространства Фреше

Определение: Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{R}$. Функция $\nu : V \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **полунормой** на V, если имеет место следующее
(*) **Неравенство треугольника:** $\nu(v+v') \leqslant \nu(v) + \nu(v')$.
(**) **Инвариантность относительно гомотетии:** $\nu(\lambda v) = |\lambda|\nu(v)$.
Векторное пространство с полунормой наделено **полуметрикой,** по формуле $d(x,y) = \nu(x-y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $(V, \{\nu_\alpha\})$ – пространство, снабженное системой полунорм. Последовательность x_i **сходится к x в этой системе полунорм**, если $\lim_i \nu_\alpha(x_i - x) = 0$ для всех полунорм ν_α. Говорится, что $(M, \{d_\alpha\})$ **полно**, если **каждая последовательность Коши имеет предел в топологии, заданной полуметриками.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V – хаусдорфово топологическое векторное пространство. V называется **пространством Фреше**, когда топология на V может быть задана полной, счетной системой полунорм $\{\nu_\alpha\}$.

Пространство гладких функций на отрезке

Определение: Пусть $C^\infty([0,1])$ – пространство гладких функций на отрезке. Рассмотрим, для каждого n, норму $|f|_{C^n}$, определенную следующим образом:

$$|f|_{C^0} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad |f|_{C^1} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + |f'(x)|, \quad ...,$$

$$|f|_{C^n} := \sup_{x\in[0,1]} \sum_{i=0}^{n} |f^{(i)}(x)|.$$

Утверждение:
$C^\infty([0,1])$ с такой системой полунорм – пространство Фреше.

Доказательство: Поскольку

$$|\varphi|_{C^n} \geqslant \left|\varphi^{(k)}\right|_{C^{n-k}},$$

для любой последовательности Коши $\{f_i\}$, $\{f_i^{(k)}\}$ – тоже последовательность Коши. Предел последовательности $\{f_i\}$ будет k-кратной первообразной для предела $\{f_i^{(k)}\}$, значит, предел $\{f_i\}$ – гладкий. ■

Многообразия Фреше

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Многообразие Фреше** есть топологическое пространство, снабженное атласом $\{U_i\}$, где каждая из карт U_i реализована как открытое подмножество в каком-то пространстве Фреше, а все функции перехода гладкие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гладкое отображение** многообразий Фреше - такое, которое задается гладкими отображениями в каждой из карт.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа Ли-Фреше** есть группа, снабженная структурой многообразия Фреше, таким образом, что все групповые операции являются гладкими.

Примеры многообразий Фреше

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $E \stackrel{\pi}{\to} X$ – векторное расслоение на компактном многообразии. Тогда **пространство гладких сечений E есть пространство Фреше.** Это доказывается тем же аргументом, который использовали, чтобы построить структуру Фреше на $C^\infty([0,1])$.

ПРИМЕР: Пусть $E \stackrel{\pi}{\to} X$ – морфизм многообразий, дифференциал которого всюду имеет максимальный ранг, X компактно, а $\varphi: X \to E$ – сечение этой проекции. Легко видеть, что для подходящей окрестности U образа φ, проекция $U \stackrel{\pi}{\to} X$ – локально тривиальное расслоение со слоем открытый шар. В силу предыдущего замечания, пространство сечений проекции $U \to X$ есть пространство Фреше. **Это задает атлас Фреше на пространстве сечений π,** превращая его в многообразие Фреше.

ПРИМЕР: Пространство сечений гладкого расслоения $X \times Y \to Y$ отождествляется с пространством $\operatorname{Map}(X,Y)$ гладких отображений из X в Y. Значит, $\operatorname{Map}(X,Y)$ **есть многообразие Фреше.**

Примеры многообразий Фреше (продолжение)

ПРИМЕР:
Следовательно, **группа диффеоморфизмов есть группа Фреше**.

ПРИМЕР: Пусть X – гладкое многообразие. **Пространство всех гладких, компактных подмногообразий $Y \subset X$ – многообразие Фреше.** Для каждого $Y \subset X$, выберем трубчатую окрестность $U \subset X$. Небольшие деформации Y задаются сечениями проекции $U \to Y$, что определяет атлас.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M есть гладкое многообразие. **Пространство узлов** на M есть пространство **непараметризованных, иммерсированных, ориентированных петель**, представленных отображением, которое инъективно вне конечного множества.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Это многообразие Фреше.**

Теорема об обратной функции и повороты окружности

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема об обратной функции **неверна** для пространств Фреше.

ПРИМЕР: Пусть $\operatorname{Diff}(S^1)$ – группа диффеоморфизмов окружности, $\operatorname{Lie}(S^1)$ – ее алгебра Ли, то есть пространство векторных полей, а $E(x) := e^x$ – естественное отображение $\operatorname{Lie}(S^1) \to \operatorname{Diff}(S^1)$. Очевидно, что $E(x)$ гладко, и его производная в нуле – тождественное отображение.

ТЕОРЕМА: Образ $E(\operatorname{Lie}(S^1))$ не содержит никакой открытой окрестности 1 в $\operatorname{Diff}(S^1)$.

Доказательство. Шаг 1: Любое векторное поле v на S^1, не имеющее нулей, сопряжено постоянному. В самом деле, выберем на S^1 координаты таким образом, что $e^{tv}(0) = \lambda t$. В этих координатах, v – постоянное.

Шаг 2: Пусть $f \in \operatorname{Diff}(S^1)$ – экспонента векторного поля, не имеющего нулей. **Тогда f сопряжен повороту.**

Теорема об обратной функции и повороты окружности (продолжение)

Шаг 2: Пусть $f \in \mathsf{Diff}(S^1)$ – экспонента векторного поля, не имеющего нулей. **Тогда f сопряжен повороту.**

Шаг 3: Если $f \in E(\mathsf{Lie}(S^1))$ – диффеоморфизм без неподвижных точек, то он сопряжен повороту. Значит, **f^n тождественный, либо не имеет неподвижных точек.**

Шаг 4: В любой окрестности единицы содержится диффеоморфизм f, который не имеет неподвижных точек, при этом f^N имеет неподвижную точку, и не тождественный. **Такой диффеоморфизм не может быть экспонентой.** ∎

ЗАМЕЧАНИЕ: Правильная версия теоремы об обратной функции для пространств Фреше называется **"теорема Нэша-Мозера"**. Эта теорема о морфизмах в категории **"ручных многообразий Фреше"**, которая несколько уже, чем категория всех многообразий Фреше (группа и алгебра Ли диффеоморфизмов лежат в этой категории, а вот экспоненциальный морфизм - не является морфизмом).

Ссылка: Richard S. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) Volume 7, Number 1 (1982), 65-222.

Формально кэлеровы многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть F – многообразие Фреше. **Почти комплексная структура** есть гладкий $C^\infty F$-линейный эндоморфизм $I: TF \to TF$ касательного расслоения, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Векторные поля суть дифференцирования кольца гладких функций. Коммутатор двух дифференцирований – снова дифференцирование. **Значит, TF есть пучок алгебр Ли.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Очевидно, I определяет разложение $TF \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}F \oplus T^{0,1}F$, где $T^{1,0}F$ есть $\sqrt{-1}$-собственное пространство, а $T^{0,1}F$ это $-\sqrt{-1}$-собственное пространство. Действительно, $x = \frac{1}{2}(x + \sqrt{-1}\, Ix) + \frac{1}{2}(x - \sqrt{-1}\, Ix)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексная структура на F называется **формально интегрируемой**, если $[T^{1,0}F, T^{1,0}F] \subset T^{1,0}F$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (F, I) – формально интегрируемое почти комплексное многообразие, g – эрмитова структура на F, а ω – соответствующая $(1,1)$-форма, $\omega(x,y) = g(x, Iy)$. Скажем, что (F, I, g) **формально кэлерово**, если $d\omega = 0$.

Пространство узлов в римановом 3-многообразии

J. L. Brylinski, *The Kähler geometry of the space of knots in a smooth threefold,* Preprint, Penn. State Univ., University Park, PA, 1990

J. L. Brylinski, *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization,* Progr. Math., vol. 107, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.

LeBrun, Claude, *A Kähler structure on the space of string worldsheets*, Classical Quantum Gravity 10 (1993), no. 9, L141–L148.

Lempert, László, *Loop spaces as complex manifolds,* J. Differential Geom. 38 (1993), no. 3, 519–543.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\operatorname{Knot}(M)$ – пространство узлов в римановом 3-многообразии. Для каждого $S \in \operatorname{Knot}(M)$, $T_S \operatorname{Knot}(M)$ – пространство сечений нормального расслоения NS. Пусть γ – единичный касательный вектор к S **Векторное произведение с γ задает комплексную структуру на векторном пространстве NS**.

ТЕОРЕМА: (Брылинский) **Эта комплексная структура формально интегрируема**. Более того, **стандартная метрика на** $\operatorname{Knot}(M)$ **формально кэлерова.**

G_2-многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\rho \in \Lambda^2\mathbb{R}^7$ – 3-форма на $\mathbb{R}^7$. Скажем, что ρ **невырождена**, если размерность ее стабилизатора максимальна:

$$\dim St_{GL(7)}\rho = \dim GL(7) - \dim \Lambda^3(\mathbb{R}^7) = 49 - 35 = 14.$$

В этом случае, $\mathrm{St}(\rho)$ есть одна из двух вещественных форм 14-мерной группы Ли $G_2(\mathbb{C})$. Скажем, что ρ **не расщепляется**, если $St(\rho|_x) \cong G_2$, где G_2 обозначает компактную вещественную форму $G_2(\mathbb{C})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **G_2-структура** на 7-многообразии есть 3-форма $\rho \in \Lambda^3(M)$, которая невырождена и не расщепляется в каждой точке $x \in M$ ("стабильна", в терминологии Хитчина).

ЗАМЕЧАНИЕ: Форма ρ определяет метрику на M со значениями в $\Lambda^7 M$:

$$g(x,y) = (\rho \lrcorner x) \wedge (\rho \lrcorner y) \wedge \rho$$

Это определяет конформную структуру на M. Зафиксируем конформный фактор, положив $|\rho| = 1$. Получим, что **каждое G_2-многообразие снабжено естественной G_2-инвариантной римановой метрикой**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: G_2-многообразие называется **многообразие с голономией G_2**, если $\nabla\rho = 0$, где ∇ есть связность Леви-Чивита, определенная этой метрикой.

Векторное произведение на G_2-многообразии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $V = \mathbb{R}^7$ – 7-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, снабженное 3-формой ρ такой, что $St_{GL(7)}(\rho) = G_2$, а g – G_2-инвариантная метрика на V, построенная как выше. Определим **октавное векторное произведение** на V по формуле $x \star y = \rho(x, y, \cdot)^\sharp$. Здесь $\rho(x, y, \cdot)$ – форма, полученная подстановкой, а $\rho(x, y, \cdot)^\sharp$ – двойственный вектор.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для $x, y \in V$, $y \perp x$, имеем $x(x(y)) = -|x|^2 y$.

СЛЕДСТВИЕ: Если $x \in V$ – вектор длины 1, то **умножение на x задает комплексную структуру на ортогональном дополнении $x^\perp$.** ■

УТВЕРЖДЕНИЕ:
Для каждого ненулевого вектора $x \in V$, $St_{G_2}(x) \cong SU(3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $St_{G_2}(x)$ действует на $x^\perp$, сохраняя комплексную структуру и метрику, то есть лежит в $U(3)$; размерность этой группы равна $\dim G_2 - \dim S^6 = 8$, значит, $St_{G_2}(x)$ подгруппа коразмерности 1 в $U(3)$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Для каждого ненулевого вектора $x \in V$, **пространство $x^\perp$ снабжено естественной $SU(3)$-структурой.**

Комплексная эрмитова структура на $\mathsf{Knot}(M)$

СЛЕДСТВИЕ: Для каждого узла $S \subset M$ в G_2-многообразии, **нормальное расслоение NS снабжено естественной $SU(3)$-структурой.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для каждого $x \in S$, $NS|_x = x^\perp$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Пространство сечений $\Gamma(NS)$ является **комплексным эрмитовым векторным пространством.**

ТЕОРЕМА: Рассмотрим пространство узлов G_2-многообразия, с эрмитовой структурой, определенной выше. **Эта эрмитова структура формально кэлерова тогда и только тогда, когда M многообразие с голономией G_2.**

ЗАМЕЧАНИЕ:
Симплектическая структура была получена М. Мовшевым в 1999.