Кэлеровы многообразия

Миша Вербицкий

Математический институт СО РАН

2 мая 2012, Новоссибирск

Комплексные структуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексной структурой** на вещественном векторном пространстве V называется эндоморфизм $I \in \operatorname{End}(V)$, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Продолжим I на тензоры формулой $I(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma...) = I(\alpha)\otimes I(\beta) \otimes I(\gamma)...$ **Группа, порожденная I, изоморфна $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.** Поэтому, для любого тензора t, сумма $t+I(t)+I^2(t)+I^3(t)$ инвариантна относительно I.

СЛЕДСТВИЕ: Если g – положительно определенное скалярное произведение на V, то $g_I := g+I(g)+I^2(G)+I^3(g)$ тоже положительно определено и I-инвариантно: $I(g_I) = I$. Другими словами, **I – ортогональный оператор относительно g_I.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Положительно определенное скалярное произведение, в котором I ортогонально, называется **эрмитовой метрикой** на (V,I). Мы только что доказали, что она всегда существует.

Комплексные структуры (продолжение)

СЛЕДСТВИЕ: Все собственные значения I простые (то есть I **полупрост**, другими словами, диагонализуется). В самом деле, **любой ортогональный оператор полупрост.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть α – собственное значение I. Поскольку $\alpha^2 = -1$, имеем $\alpha = \pm\sqrt{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Собственное пространство I, соответствующее $\sqrt{-1}$, обозначается $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, а соответствующее $-\sqrt{-1}$ обозначается $V^{0,1}$. Очевидно, $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку, к тому же, I вещественный, получаем, что $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$. В частности, это пространства одинаковой размерности.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что естественная проекция $V^{1,0}$ на V вдоль $V^{0,1}$ задает изоморфизм вещественных пространств $V^{0,1} \to V$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что оператор комплексной структуры **однозначно задается подпространством $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ половинной размерности,** которое не пересекается с $V \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Эрмитовы формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово пространство** (V, I, g) есть пространство, снабженное комплексной структурой I и эрмитовой метрикой g.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть I – оператор комплексной структуры на вещественном пространстве V, а g – эрмитова метрика. Рассмотрим билинейную форму $\omega(x, y) = g(x, Iy)$. Тогда $\omega(x, y) = g(x, Iy) = g(Ix, I^2 y) = -g(Ix, y) = -\omega(y, x)$. Поэтому ω **кососимметрична**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Форма ω называется **эрмитовой формой** на эрмитовом пространстве (V, I, g)

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что в тройке I, g, ω, **каждый тензор выражается через остальные два.**

Разложение Ходжа

Обозначим за $\Lambda^* V$ грассманову алгебру, порожденную V.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что $\Lambda^*(V \oplus W)$ изоморфно как векторное пространство $\Lambda^* V \otimes \Lambda^* W$. Изоморфизм $\Lambda^* V \otimes \Lambda^* W \to \Lambda^*(V \oplus W)$ задается отображением $x \otimes y \to x \wedge y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (V, I) – пространство, снабженное комплексной структурой, а $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ его комплексификация. Тогда $\Lambda^* V_{\mathbb{C}} \cong (\Lambda^* V^{1,0}) \otimes (\Lambda^* V^{0,1})$. Рассмотрим разложение $\Lambda^* V_{\mathbb{C}} \cong \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}}$, где $\Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}} = \Lambda^p V^{1,0} \bigwedge \Lambda^q V^{0,1}$ Оно называется **разложением Ходжа**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Комплексная структура на V **однозначно задает комплексную структуру на V^* (и наоборот).**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\omega \in \Lambda^2 V^*$ – эрмитова форма на пространстве (V, I, g). **Тогда $\omega \in \Lambda^{1,1} V_{\mathbb{C}}^*$.** В самом деле, для $x, y \in V^{1,0}$, имеем

$$\omega(x, y) = \omega(Ix, Iy) = \sqrt{-1}^{\,2} \omega(x, y) = -\omega(x, y),$$

значит, $\omega(x, y) = 0$, и по той же причине $\omega(x, y) = 0$ для $x, y \in V^{0,1}$. Поэтому ω **спаривает $(0,1)$-вектора с $(1,0)$-векторами**, а значит, лежит в $\Lambda^1 V^{*1,0} \bigwedge \Lambda^1 V^{*0,1} = \Lambda^{1,1} V_{\mathbb{C}}^*$.

Почти комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Почти комплексная структура** на многообразии есть оператор $I \in \operatorname{End} TM$ в эндоморфизмах касательного расслоения, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_{TM}$.

ПРИМЕР: Возьмем $\mathbb{C}^n$, с комплексными координатами $z_i = x_i + \sqrt{-1}\, y_i$. Тогда $I(x_i) = y_i$, $I(y_i) = -x_i$ – почти комплексная структура.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитова метрика** на почти комплексном многообразии M есть риманова структура $g \in \operatorname{Sym}^2 T^*M$, такая, что I ортогонален относительно g в каждой точке M.

ЗАМЕЧАНИЕ: Эрмитова метрика на почти комлексном многообразии всегда существует. Надо взять любую риманову метрику g и усреднить по I, $g_I := g + I(g) + I^2(G) + I^3(g)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для каждого I, **пространство эрмитовых метрик выпукло** в $\Gamma(Sym^2 T^*M)$.

СЛЕДСТВИЕ: Пространство почти комплексных структур на M **гомотопически эквивалентно пространству почти комплексных эрмитовых структур.**

Разложение Ходжа

Пусть (M,I) – почти комплексное многообразие. Обозначим за

$$\Lambda^{*,0}(M) := \bigoplus_p \Lambda^{p,0}(M), \quad \Lambda^{0,*}(M) := \bigoplus_q \Lambda^{0,q}(M)$$

подалгебры в алгебре де Рама, порожденные $\Lambda^{1,0}(M) = (T^*M)^{1,0}$ и $\Lambda^{0,1}(M) = (T^*M)^{0,1}$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Разложение Ходжа** на дифференциальных формах записывается $\Lambda^*(M) = \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q}(M)$, причем $\Lambda^{p,q}(M) = \Lambda^{p,0}(M) \bigwedge \Lambda^{0,q}(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $f: M \to \mathbb{C}$ на почти комплексном многообразии называется **голоморфной**, если $df \in \Lambda^{1,0}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Легко привести **пример почти комплексного многообразия, на котором вовсе нет голоморфных функций.** Например, S^6 со стандартной G_2-инвариантной почти комплексной структурой.

Голоморфные функции на $\mathbb{C}^n$

ТЕОРЕМА: Пусть $f: M \to \mathbb{C}$ – дифференцируемая функция на открытом подмножестве $M \subset \mathbb{C}^n$, с естественной комплексной структурой. **Тогда следующие свойства f равносильны.**
(1) f **голоморфна** (в смысле вышеприведенного определения)
(2) Дифференциал $Df \in TM^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ рассматриваемый как $\mathbb{C}$-значная функция на $T_x M = T_x \mathbb{C}^n$, **является $\mathbb{C}$-линейным.**
(3) Для каждой комплексной аффинной прямой $L \subset \mathbb{C}^n$, ограничение $f|_L$ **голоморфно как функция одного переменного**
(4) f **разлагается в ряд Тэйлора** по комплексным координатам в окрестности каждой точки $x \in M$.

Доказательство: (1) и (2) равносильны (тавтологически).

Равносильность (1) и (3) тоже очевидна, потому что для каждой форма $\theta \in \Lambda^{1,0}(M)$, ограничение на 1-мерные подпространства имеет тип (1,0), и наоборот - если оно имеет тип (1,0) на таких подпространствах, это (1,0)-форма.

Наконец, разложение в ряд Тэйлора следует из формулы Коши для голоморфной функции одного переменного с остаточным членом. ■

Голоморфные отображения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I_M) и (N, I_N) – почти комплексные многообразия, а $f: M \to N$ – гладкое отображение. Оно называется **голоморфным**, если $f^*(\Lambda^{1,0}(N)) \subset \Lambda^{0,1}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это эквивалентно тому, что $df: T_xM \to T_{f(x)}N$ комплексно-линейно.

ЗАМЕЧАНИЕ: Композиция голоморфных отображений голоморфна.

Пучки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок** $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве M – это набор векторных пространств $\mathcal{F}(U)$, заданных для каждого открытого подмножества $U \subset M$, с **отображениями ограничения** $\mathcal{F}(U) \stackrel{\varphi_{U,U'}}{\to} \mathcal{F}(U')$ для каждого $U' \subset U$, и следующими свойствами

(1) **Композиция ограничений – снова ограничение:** если $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ вложенные открытые множества, а φ_{U_1,U_2}, φ_{U_2,U_3} соответствующие отображения ограничений, то $\varphi_{U_1,U_2} \circ \varphi_{U_2,U_3} = \varphi_{U_1,U_3}$.

(2) Если $U = \bigcup U_i$, а ограничение $f \in \mathcal{F}(U)$ на все U_i равно нулю, то $f = 0$.

(3) Пусть $\{U_i\}$ – покрытие множества $U \subset M$, а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ набор сечений, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию

$$f_i\Big|_{U_i \cap U_j} = f_j\Big|_{U_i \cap U_j},$$

для любой пары элементов покрытия. **Тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что ограничения f на U_i дает f_i.**

Пространство $\mathcal{F}(U)$ называется **пространство сечений пучка $\mathcal{F}$ над U**.

Комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок колец** есть пучок $U \to \mathcal{F}(U)$ такой, что на каждом $\mathcal{F}(U)$ задана структура кольца, а отображения ограничения являются гомоморфизмами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Окольцованное пространство** есть топологическое пространство с заданным на нем пучком колец.

ПРИМЕР: Открытый шар $B \subset \mathbb{C}^n$ с пучком $\mathcal{O}_B$ голоморфных функций является окольцованным пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексное многообразие** $(M, \mathcal{O}_M)$ есть окольцованное пространство, которое локально изоморфно (как окольцованное пространство) открытому шару $(B, \mathcal{O}_B)$

Другие определения комплексных многообразий

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть U_1, U_2 – два открытых подмножества в комплексном многообразии, а f_1, f_2 – изоморфизмы U_1, U_2 с открытым шаром. Композиция $f_1 f_2^{-1}$ задает изоморфизм окольцованных пространств $f_1(U_1 \cap U_2) \to f_2(U_1 \cap U_2)$. **В силу Следствия (*), этот изоморфизм голоморфен.**

СЛЕДСТВИЕ: Мы получаем, что комплексное многообразие имеет атлас из открытых подмножеств, которые гомеоморфны открытым шарам в $\mathbb{C}^n$, а функции перехода голоморфны. **Это еще одно определение комплексного многообразия.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, а $\mathcal{O}_M$ пучок голоморфных функций на нем. Оно называется **интегрируемым**, если $(M, \mathcal{O}_M)$ – комплексное многообразие.

Интегрируемость почти комплексных многообразий

ЗАМЕЧАНИЕ: Почти комплексная структура восстанавливается из комплексной структуры на M следующим образом.

(1) Рассмотрим **расслоение $\Lambda^{1,0}(M) \subset \Lambda^1(M, \mathbb{C})$, порожденное дифференциалами голоморфных функций,** и пусть $\Lambda^{0,1}(M) := \overline{\Lambda^{1,0}(M)}$.

(2) Определим $I \in \operatorname{End}(\Lambda^1 M \otimes \mathbb{C})$ таким образом, что $I|_{\Lambda^{1,0}(M)} = \sqrt{-1}$ и $I|_{\Lambda^{0,1}(M)} = -\sqrt{-1}$. **Очевидно, $I^2 = -\operatorname{Id}$.**

(3) Этот эндоморфизм вещественный, поскольку $\overline{I} = I$ в силу его определения. Поэтому **он переводит $\Lambda^1(M, \mathbb{R})$ в себя.**

Мы получили функтор (строгий, полный) из категории комплексных многообразий в категорию почти комплексных.

Важная задача комплексной геометрии – описать его образ.

Формальная интегрируемость

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Векторное поле** на многообразии это дифференцирование кольца функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Голоморфным векторным полем** на комплексном многообразии называется векторное поле, которое переводит голоморфные функции в голоморфные.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что в комплексных координатах $z_1, ..., z_n$ на $\mathbb{C}^n$, **голоморфные векторные поля записываются в виде** $X = \sum \varphi_i \frac{d}{dz_i}$**,** где $\varphi_1, ..., \varphi_n$ – голоморфные функции.

СЛЕДСТВИЕ: Голоморфные векторные поля на комплексном многообразии порождают $T^{1,0}M$ над $C^\infty M$

СЛЕДСТВИЕ: На комплексном многообразии, **коммутатор векторных полей типа** $(1,0)$ **имеет тип** $(1,0)$**:** $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$**.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное многообразие называется **формально интегрируемым**, если $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$

ТЕОРЕМА: (Newlander-Nirenberg) **Формально интегрируемое почти комплексное многообразие гладкости** C^2 **интегрируемо.**