Комплексные многообразия

Миша Вербицкий

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

3 мая 2012, Новосибирск

Пучки функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок функций** на топологическом пространстве M задается следующими данными. Для каждого открытого подмножества $U \subset M$, задано подкольцо $\mathcal{F}(U) \subset F(U)$ в кольце $F(U)$ функций на U, причем ограничение функции $\gamma \in \mathcal{F}(U)$ с открытого множества U на подмножество $U_1 \subset U$ принадлежит $\mathcal{F}(U_1)$. **Кольца $\mathcal{F}(U)$ должны удовлетворять следующим условиям.** Пусть $\{U_i\}$ – набор открытых множеств, $U := \bigcup U_i$, а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ – а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ набор функций, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию

$$f_i\Big|_{U_i\cap U_j} = f_j\Big|_{U_i\cap U_j},$$

для любой пары элементов покрытия. **Тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что ограничения f на U_i дает f_i.**

Окольцованные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Окольцованное пространство** $(M, \mathcal{F})$ есть топологическое пространство с заданным на нем пучком функций. **Морфизм** $(M, \mathcal{F}) \stackrel{\Psi}{\to} (N, \mathcal{F}')$ окольцованных пространств есть непрерывное отображение $M \stackrel{\Psi}{\to} N$ такое, что для каждого открытого множества $U \subset N$ и функции $f \in \mathcal{F}(U)$, функция $\Psi \circ f$ лежит в кольце $\mathcal{F}'(\Psi^{-1}(U))$. **Изоморфизм** окольцованных пространств есть гомеоморфизм Ψ такой, что Ψ и Ψ^{-1} удовлетворяет этому условию (то есть является морфизмом окольцованных пространств).

ПРИМЕР: Пусть $(M, \mathcal{F})$ – топологическое многообразие с заданным на нем пучком функций. Оно называется **гладким многообразием класса C^i или C^∞**, если у каждой точки $(M, \mathcal{F})$ есть окрестность, изоморфная окольцованному пространству $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}')$, где $\mathcal{F}'$ – функции той же гладкости на $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Изоморфизм гладких многообразий называется **диффеоморфизмом**. Это гомеоморфизм, который переводит гладкие функции в гладкие.

Алгебра де Рама

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – гладкое многообразие. Обозначим за $\Lambda^i M$ **расслоение дифференциальных i-форм на M,** то есть антисимметричных i-форм на TM. Определим умножение $\Lambda^i M \times \Lambda^j M \to \Lambda^{i+j} M$ как $\alpha \wedge \beta \to \Pi(\alpha \otimes \beta)$, где $\alpha \otimes \beta$ – сечение $\Lambda^i M \otimes \Lambda^j M \subset \bigotimes_{i+j} T^* M$, полученное перемножением α и β.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Это умножение ассоциативно, и удовлетворяет $\alpha \wedge \beta = (-1)^{ij} \beta \wedge \alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Алгебра $\Lambda^* M := \oplus_i \Lambda^i M$ с определенной выше алгебраической структурой называется **алгеброй де Рама** многообразия.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\varphi: M_1 \to M_2$ – гладкое отображение многообразий. Тогда задано отображение $\varphi^*: \Lambda^* M_2 \to \Lambda^* M_1$, переводящее дифференциальную форму $\eta \in \Lambda^k M_2$ в форму $(v_1, ..., v_k) \in TM_1 \to \eta(D_\varphi v_1, ..., D_\varphi(v_k))$.

Дифференциал де Рама

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дифференциал де Рама $d: \Lambda^* M \to \Lambda^{*+1} M$ есть $\mathbb{R}$-линейное отображение, которое удовлетворяет следующим условиям.

(i) Для любого $f \in \Lambda^0 = C^\infty M$, df есть элемент $\Lambda^1 M$, который равен дифференциалу $df \in \Omega^1 M$.

(ii) **(Правило Лейбница)** $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^j a \wedge db$, для любых $a \in \Lambda^i M, b \in \Lambda^j M$.

(iii) $d^2 = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ:
Дифференциал де Рама однозначно задается этими условиями.

Однозначность определения: Алгебра де Рама порождена $C^\infty M$ и 1-формами вида df, а на таких формах дифференциал де Рама уже задан.

Существование, для $M = \mathbb{R}^n$: Пусть $t_1, ..., t_n$ – координатные функции на $\mathbb{R}^n$, а $\alpha \in \Lambda^* \mathbb{R}^n$ – какой-то моном, полученный произведением нескольких dt_i. Дифференциал де Рама переводит $f\alpha$ в $\sum_i \frac{df}{dt_i} dt_i \wedge \alpha$, для любой функции $f \in C^\infty \mathbb{R}^n$.

Существование, для любого многообразия: Зададим d локально по формуле, указанной выше. **Это определение согласовано с заменой координат в силу единственности d**, значит, d согласован с переклейкой карт. ■

Голоморфные функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $f: M \to \mathbb{C}$ на почти комплексном многообразии называется **голоморфной**, если $df \in \Lambda^{1,0}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Легко привести **пример почти комплексного многообразия, на котором вовсе нет голоморфных функций.** Например, S^6 со стандартной G_2-инвариантной почти комплексной структурой.

Голоморфные функции на $\mathbb{C}^n$

ТЕОРЕМА: Пусть $f : M \to \mathbb{C}$ – дифференцируемая функция на открытом подмножестве $M \subset \mathbb{C}^n$, с естественной комплексной структурой. **Тогда следующие свойства f равносильны.**
(1) f **голоморфна** (в смысле вышеприведенного определения)
(2) Дифференциал $Df \in TM^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ рассматриваемый как $\mathbb{C}$-значная функция на $T_xM = T_x\mathbb{C}^n$, **является $\mathbb{C}$-линейным.**
(3) Для каждой комплексной аффинной прямой $L \subset \mathbb{C}^n$, ограничение $f|_L$ **голоморфно как функция одного переменного**
(4) f **разлагается в ряд Тэйлора** по комплексным координатам в окрестности каждой точки $x \in M$.

Доказательство: (1) и (2) равносильны (тавтологически).

Равносильность (1) и (3) тоже очевидна, потому что для каждой форма $\theta \in \Lambda^{1,0}(M)$, ограничение на 1-мерные подпространства имеет тип (1,0), и наоборот - если оно имеет тип (1,0) на таких подпространствах, это (1,0)-форма.

Наконец, разложение в ряд Тэйлора следует из формулы Коши для голоморфной функции одного переменного с остаточным членом. ■

Голоморфные отображения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I_M) и (N, I_N) – почти комплексные многообразия, а $f: M \to N$ – гладкое отображение. Оно называется **голоморфным**, если $f^*(\Lambda^{1,0}(N)) \subset \Lambda^{0,1}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это эквивалентно тому, что $df: T_xM \to T_{f(x)}N$ **комплексно-линейно**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Композиция голоморфных отображений голоморфна.

Комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок колец** есть пучок $U \to \mathcal{F}(U)$ такой, что на каждом $\mathcal{F}(U)$ задана структура кольца, а отображения ограничения являются гомоморфизмами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Окольцованное пространство** есть топологическое пространство с заданным на нем пучком колец.

ПРИМЕР: Открытый шар $B \subset \mathbb{C}^n$ с пучком $\mathcal{O}_B$ голоморфных функций является окольцованным пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексное многообразие** $(M, \mathcal{O}_M)$ есть окольцованное пространство, которое локально изоморфно (как окольцованное пространство) открытому шару $(B, \mathcal{O}_B)$

Другие определения комплексных многообразий

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть U_1, U_2 – два открытых подмножества в комплексном многообразии, а f_1, f_2 – изоморфизмы U_1, U_2 с открытым шаром. Композиция $f_1 f_2^{-1}$ задает изоморфизм окольцованных пространств $f_1(U_1 \cap U_2) \to f_2(U_1 \cap U_2)$. **В силу Следствия (*), этот изоморфизм голоморфен.**

СЛЕДСТВИЕ: Мы получаем, что комплексное многообразие имеет атлас из открытых подмножеств, которые гомеоморфны открытым шарам в $\mathbb{C}^n$, а функции перехода голоморфны. **Это еще одно определение комплексного многообразия.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, а $\mathcal{O}_M$ пучок голоморфных функций на нем. Оно называется **интегрируемым**, если $(M, \mathcal{O}_M)$ – комплексное многообразие.

Интегрируемость почти комплексных многообразий

ЗАМЕЧАНИЕ: Почти комплексная структура восстанавливается из комплексной структуры на M следующим образом.

(1) Рассмотрим **расслоение $\Lambda^{1,0}(M) \subset \Lambda^1(M, \mathbb{C})$, порожденное дифференциалами голоморфных функций,** и пусть $\Lambda^{0,1}(M) := \overline{\Lambda^{1,0}(M)}$.

(2) Определим $I \in \operatorname{End}(\Lambda^1 M \otimes \mathbb{C})$ таким образом, что $I|_{\Lambda^{1,0}(M)} = \sqrt{-1}$ и $I|_{\Lambda^{0,1}(M)} = -\sqrt{-1}$. **Очевидно, $I^2 = -\operatorname{Id}$.**

(3) Этот эндоморфизм вещественный, поскольку $\overline{I} = I$ в силу его определения. Поэтому **он переводит $\Lambda^1(M, \mathbb{R})$ в себя.**

Мы получили функтор (строгий, полный) из категории комплексных многообразий в категорию почти комплексных.

Важная задача комплексной геометрии – описать его образ.

Формальная интегрируемость

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Векторное поле** на многообразии это дифференцирование кольца функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Голоморфным векторным полем** на комплексном многообразии называется векторное поле, которое переводит голоморфные функции в голоморфные.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что в комплексных координатах $z_1, ..., z_n$ на $\mathbb{C}^n$, **голоморфные векторные поля записываются в виде $X = \sum \varphi_i \frac{d}{dz_i}$,** где $\varphi_1, ..., \varphi_n$ – голоморфные функции.

СЛЕДСТВИЕ: Голоморфные векторные поля на комплексном многообразии порождают $T^{1,0}M$ над $C^\infty M$

СЛЕДСТВИЕ: На комплексном многообразии, **коммутатор векторных полей типа $(1,0)$ имеет тип $(1,0)$: $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное многообразие называется **формально интегрируемым**, если $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$

ТЕОРЕМА: (Newlander-Nirenberg) **Формально интегрируемое почти комплексное многообразие гладкости C^2 интегрируемо.**

Связность на расслоении

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство сечений расслоения B на гладком многообразии обозначается B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на векторном расслоении B есть отображение $B \stackrel{\nabla}{\to} \Lambda^1 M \otimes B$ удовлетворяющее $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$ для любых $b \in B$, $f \in C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $X \in TM$ – векторное поле, $b \in B$, то $\nabla_X b$ **– сечение** B**, полученное как** $\langle \nabla b, X\rangle$**.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Связность на B определяет связность на двойственном расслоении B^*, и наоборот, по формуле

$$\langle \nabla_X(b), \xi\rangle + \langle b, \nabla_X(\xi)\rangle = \operatorname{Lie}_X(\langle b, \xi\rangle).$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого тензорного расслоения $\mathcal{B}_1 := B^* \otimes B^* \otimes ... \otimes B^* \otimes B \otimes B \otimes ... \otimes B$ **связность на B определяет связность на $\mathcal{B}_1$** по **формуле Лейбница:**

$$\nabla(b_1 \otimes b_2) = \nabla(b_1) \otimes b_2 + b_1 \otimes \nabla(b_2).$$

Кручение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ∇ – связность на TM. **Кручение** ∇ есть тензор

$$T_\nabla(\eta)(X,Y) = \eta\Big(\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y]\Big).$$

УПРАЖНЕНИЕ: **Проверьте, что это тензор.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M,g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**