Кэлеровы многообразия и связность Леви-Чивита

Миша Вербицкий

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

4 мая 2012, Новосибирск

Связность на расслоении

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство сечений расслоения B на гладком многообразии обозначается B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на векторном расслоении B есть отображение $B \stackrel{\nabla}{\to} \Lambda^1 M \otimes B$, удовлетворяющее $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$ для любых $b \in B$, $f \in C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $X \in TM$ – векторное поле, $b \in B$, то **$\nabla_X b$ – сечение B, полученное как $\langle \nabla b, X\rangle$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Связность на B определяет связность на двойственном расслоении B^*, и наоборот, по формуле

$$\langle \nabla_X(b), \xi\rangle + \langle b, \nabla_X(\xi)\rangle = \operatorname{Lie}_X(\langle b, \xi\rangle).$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого тензорного расслоения $\mathcal{B}_1 := B^* \otimes B^* \otimes ... \otimes B^* \otimes B \otimes B \otimes ... \otimes B$ **связность на B определяет связность на $\mathcal{B}_1$** по **формуле Лейбница:**

$$\nabla(b_1 \otimes b_2) = \nabla(b_1) \otimes b_2 + b_1 \otimes \nabla(b_2).$$

Кручение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ∇ – связность на TM. **Кручение** ∇ определяется как

$$T_\nabla(X,Y) = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y]$$

где $X, Y \in TM$.

УПРАЖНЕНИЕ: **Проверьте, что это тензор.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

Формула Картана

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для любого $\eta \in \Lambda^1 M$, и $X, Y \in TM$ имеем

$$d\eta(X,Y) = \eta([X,Y]) - \operatorname{Lie}_X(\eta(Y)) + \operatorname{Lie}_Y(\eta(X)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

1. **Обе стороны уравнения удовлетворяют правилу Лейбница.**

3. **Для $\eta = df$, обе стороны уравнения равны нулю.**

4. Дифференциал де Рама есть **единственное** отображение

$$d: \Lambda^1(M) \to \Lambda^2(M),$$

удовлетворяющее правилу Лейбница и $d^2 = 0$. ■

Кручение

Второе определение кручения: Пусть $\Lambda^1 \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$ – связность на $\Lambda^1 M$. **Кручение** ∇ задается формулой $\mathrm{Alt}\circ\nabla - d$, где $\mathrm{Alt}: \ \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \to \Lambda^2 M$ - внешнее умножение. Кручение есть отображение $T_\nabla: \ \Lambda^1 M \to \Lambda^2 M$.

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\begin{aligned} T_\nabla(f\eta) &= \mathrm{Alt}(f\nabla\eta + df\otimes\eta) - d(f\eta) \\ &= f\Big[\mathrm{Alt}(\nabla\eta) - d\eta\Big] + df\wedge\eta - df\wedge\eta = fT_\nabla(\eta). \end{aligned}$$

Значит, T_∇ линейно.

ЗАМЕЧАНИЕ: По формуле Картана,

$$\begin{aligned} T_\nabla(\eta)(X,Y) &= \nabla_X(\eta)(Y) - \nabla_Y(\eta)(X) - d\eta(X,Y) \\ &= \nabla_X(\eta)(Y) - \nabla_Y(\eta)(X) - \eta([X,Y]) - \mathrm{Lie}_X(\eta(Y)) + \mathrm{Lie}_Y(\eta(X)). \end{aligned}$$

С другой стороны, $\nabla_X(\eta)(Y) = \mathrm{Lie}_X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X(Y))$. Сравнивая и сокращая $\mathrm{Lie}_X(\eta(Y))$, $\mathrm{Lie}_Y(\eta(X))$, получаем

$$T_\nabla(\eta)(X,Y) = \eta\Big(\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y]\Big).$$

Это оператор, двойственный определенному выше.

Связность и интегрируемость комплексных структур

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Векторное поле** на многообразии это дифференцирование кольца функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное многообразие называется **формально интегрируемым**, если $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$.

ТЕОРЕМА: (Newlander-Nirenberg) **Формально интегрируемое почти комплексное многообразие гладкости C^2 интегрируемо.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $B \subset TM$ – подрасслоение, ∇ – связность без кручения, а $\nabla B \subset B \otimes \Lambda^1 M$. Тогда для любых $b, b' \in B$, имеем $[b, b'] = \nabla_b b' - \nabla'_b b \subset B$, **значит,** $[B, B] \subset B$.

СЛЕДСТВИЕ: Если связность без кручения сохраняет оператор почти комплексной структуры: $\nabla(I) = 0$, то I **интегрируемый.**

Кэлеровы многообразия

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть ∇ – связность без кручения. Тогда **из $\nabla\omega = 0$ сразу следует $d\omega = 0$.**

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I, g) – почти комплексное, эрмитово многообразие, а ∇ – связность Леви-Чивита. Тогда **равносильны:**

(i) $\nabla(I) = 0$

(ii) $d\omega = 0$**, и почти комплексная структура** I **интегрируема.**

ЗАМЕЧАНИЕ: (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из выше доказанного, (ii) $\Rightarrow$ (i) – **нетривиальная теорема.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное, эрмитово многообразие (M, I, g) называется **кэлеровым**, если выполнено любое из условий (i), (ii). Класс когомологий $[\omega] \in H^2(M)$ называется **кэлеровым классом** M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплектическая форма** на многообразии есть невырожденная, замкнутая 2-форма.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Кэлерово многообразие всегда симплектично.**

Метрика Фубини-Штуди

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $M = \mathbb{C}P^n$ – комплексное проективное пространство, а g – $U(n+1)$-инвариантная метрика. Она называется **метрикой Фубини-Штуди**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Метрику Фубини-Штуди можно получить, взяв произвольную эрмитову метрику на $\mathbb{C}P^n$ и **усреднив по компактной группе $U(n+1)$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Стабилизатор $x \in \mathbb{C}P^n$ в $U(n+1)$ изоморфен $U(n)$, а $T_x\mathbb{C}P^n$ изоморфно $\mathbb{C}^n$ со стандартным действием $U(n)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть g – $U(n)$-инвариантная положительная симметрическая форма на $\mathbb{C}^n$. Тогда g **пропорциональна обычной евклидовой метрике.**

СЛЕДСТВИЕ: Метрика Фубини-Штуди **единственна с точностью до скалярного множителя.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть η – $U(n)$-инвариантная 3-форма на $\mathbb{C}^n$. Докажите, что $\eta = 0$.

СЛЕДСТВИЕ: Метрика Фубини-Штуди **кэлерова**.

Проективные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Замкнутое комплексное подмногообразие $\mathbb{C}P^n$ называется **проективным**

ТЕОРЕМА: **Проективное многообразие всегда кэлерово.**

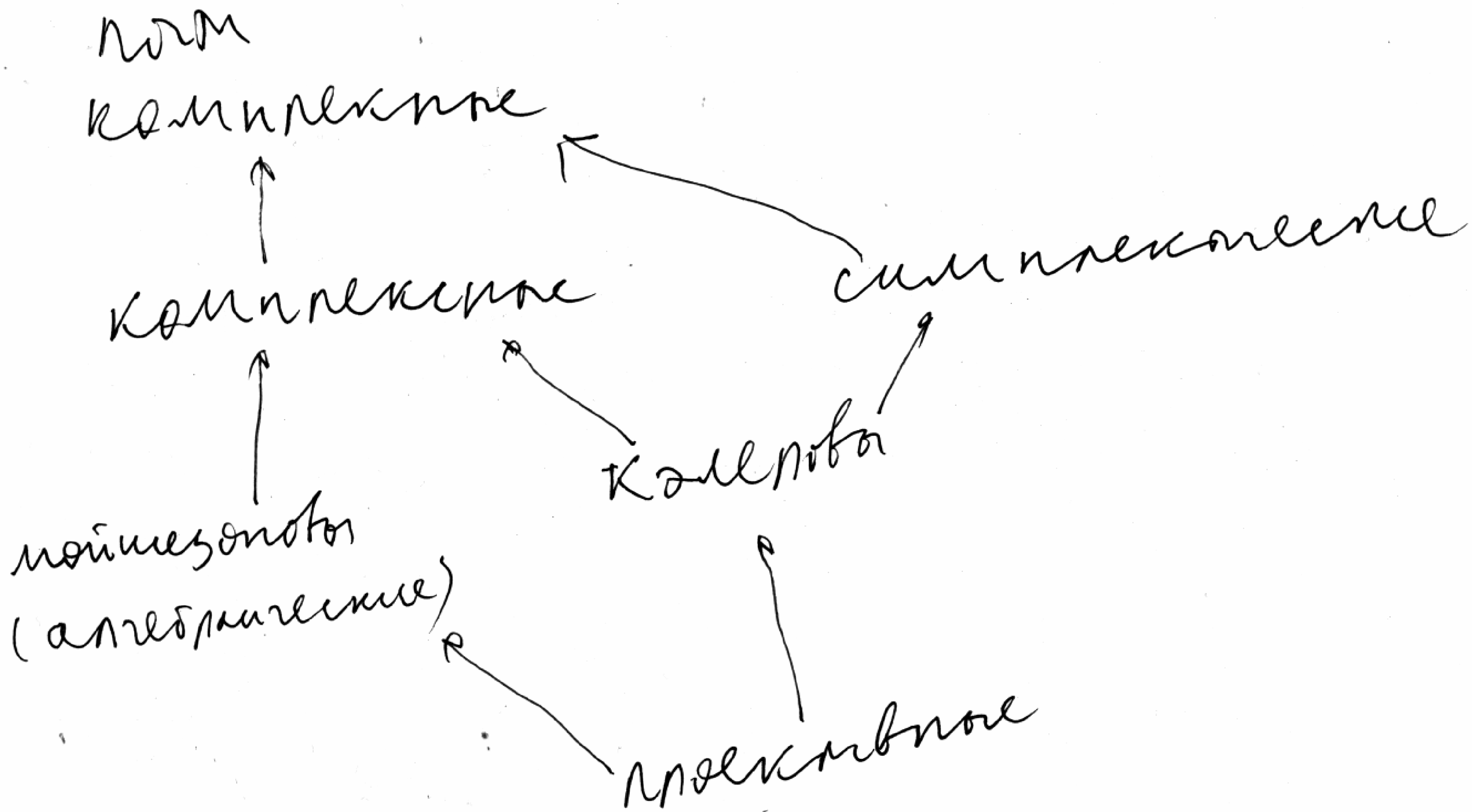
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Оно комплексно, а эрмитова форма симплектична, потому что получена ограничением симплектической формы Фубини-Штуди на $\mathbb{C}P^n$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку $H^2(\mathbb{C}P^n)$ одномерно, **можно выбрать метрику Фубини-Штуди с целочисленным кэлеровым классом.**

СЛЕДСТВИЕ: Проективное многообразие **допускает кэлерову структуру с целочисленным кэлеровым классом.**

ТЕОРЕМА: (Кодаира) Пусть M – компактное, кэлерово многообразие с рациональным кэлеровым классом. **Тогда M проективно.**

Классы многообразий



Аффинные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Торсор** над группой G есть пространство X, снабженное свободным и транзитивным действием G, $g, x \to \rho(g, x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Морфизм** торсоров $(X, G, \rho) \xrightarrow{\Psi} (X', G', \rho')$ есть пара $\Psi_X : X \to X', \Psi_G : G \to G'$, где Ψ_G есть гомоморфизм групп, и согласованное с действием G, G' на X, X' так: $\Psi_X(\rho(g, x)) = \rho'(\Psi_G(g), \Psi_X(x))$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Аффинное пространство** есть торсор над линейным пространством V, которое называется его **линеаризацией**.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Действие V на A обозначается $a, v \to a + v$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Морфизм** аффинных пространств есть морфизм соответствующих торсоров.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это то же самое, что отображение $A \xrightarrow{\Psi_A} A'$, плюс гомоморфизм линеаризаций $L \xrightarrow{\Psi_L} L'$ такой, что $\Psi_A(a + l) = \Psi_A(a) + \Psi_L(l)$.

Линеаризация кручения

ЗАМЕЧАНИЕ: Если ∇_1 и ∇_2 – связности на расслоении B, их разность есть сечение $\operatorname{End}(B)\otimes\Lambda^1 M$. **Пространство $\mathcal{A}(B)$ связностей на B есть аффинное пространство**, то есть торсор над пространством сечений $\operatorname{End}(B)\otimes\Lambda^1 M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Кручение есть аффинное отображение**

$$\mathcal{A}(\Lambda^1 M) \to \operatorname{Hom}(\Lambda^1 M, \Lambda^2 M) = TM\otimes\Lambda^2 M.$$

потому что $T(\nabla+\alpha) = T(\nabla)+\operatorname{Alt}_{12}(\alpha)$, где $\operatorname{Alt}_{12}:\ \Lambda^1 M\otimes\operatorname{End}(\Lambda^1 M) \to \Lambda^2 M\otimes TM$ есть альтернирование по первым двум индексам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Линеаризованное кручение** есть отображение $T_{lin} = \operatorname{Alt}$,

$$T_{lin}:\ \Lambda^1(M)\otimes\Lambda^1(M)\otimes TM \to \Lambda^2 M\otimes TM$$

полученное как линеаризация кручения.

Связность Леви-Чивита

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – расслоение с метрикой. **Тогда на B всегда существует ортогональная связность.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем покрытие $\{U_i\}$, в котором B тривиально и допускает ортонормальный базис. На каждом U_i выберем связность ∇_i, которая сохраняет этот базис. Пусть ψ_i – разбиение единицы, подчиненное $\{U_i\}$. Тогда **формула $\nabla(b) := \sum \nabla_i(\psi_i b)$ определяет ортогональную связность.** ■

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

Связность Леви-Чивита (существование и единственность)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем ортогональную связность ∇ на $\Lambda^1 M$. Пространство ортогональных связностей – аффинное, и **его линеаризация есть $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$.**

Шаг 1: Отождествляя TM и $\Lambda^1 M$, получаем $\mathfrak{so}(TM) = \Lambda^2 M$.

Шаг 2: Линеаризованное кручение есть отображение

$$T_{lin}: \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM) = \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^2 M \stackrel{\mathsf{Alt}}{\to} \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M = \Lambda^2 M \otimes TM.$$

Это изоморфизм. Справа и слева расслоения одной размерности, так что **достаточно доказать, что T_{lin} нет ядра.** Но если $\eta \in \ker T_{lin}$, **η симметрична по первым двум аргументам и кососимметрична по последним,** что дает $\eta(x,y,z) = \eta(y,x,z) = -\eta(y,z,x)$. **То есть $\sigma(\eta) = -\eta$, где σ есть циклическая перестановка аргументов.** Поскольку $\sigma^3 = 1$, из этого следует, что $\eta = 0$.

Шаг 3: Мы получили, что **ортогональная связность однозначно задается своим кручением,** ибо кручение задает изоморфизм аффинных пространств.

Шаг 4: Возьмем $\nabla := \nabla_0 - T_{lin}^{-1}(T_{\nabla_0})$. Тогда $T_\nabla = T_{\nabla_0} - T_{lin}(T_{lin}^{-1}(T_{\nabla_0})) = 0$, значит **$\nabla$ – связность без кручения**. ■