Глобальная теорема Торелли для гиперкэлеровых многообразий

Миша Вербицкий

Математический институт СО РАН

2 мая 2012, Новоссибирск

Гиперкэлеровы многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гиперкомплексное многообразие** есть гладкое многообразие, снабженное комплексными структурами $I, J, K : TM \to TM$, которые удовлетворяют кватернионным соотношениям: $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\operatorname{Id}$. **Гиперкэлерово многообразие** есть гиперкомплексное многообразие, снабженное римановой метрикой g, которая кэлерова по отношению к I, J, K.

ЗАМЕЧАНИЕ: Кэлеровость I равносильна условию $\nabla(I) = 0$, где ∇ – связность Леви-Чивита, а гиперкэлеровость – **условию $\nabla(I) = \nabla(J) = \nabla(K) = 0$ плюс кватернионные соотношения.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Любое гиперкэлерово многообразие голоморфно симплектично.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Напишем кэлеровы формы, связанные с I, J, K: ω_I, ω_J, ω_K. Любая их линейная комбинация замкнута, а $\Omega := \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K$ имеет тип (2,0) на (M, I). ■

Обратное тоже верно: **каждое голоморфно симплектическое компактное кэлерово многообразие гиперкэлерово.**

Теорема Калаби-Яу

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Первый класс Черна комплексного n-мерного многообразия** есть $c_1(M) := c_1(\Lambda^{n,0}(M))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Многообразие Калаби-Яу** есть компактное кэлерово многообразие с $c_1^{\mathbb{Z}}(M) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Кэлеров класс** $[\omega] \in H^2(M)$ кэлерова многообразия есть класс когомологий кэлеровой формы ω.

ТЕОРЕМА: (Калаби-Яу) Пусть (M, I) – многообразие Калаби-Яу. **Тогда существует единственная риччи-плоская кэлерова метрика в каждом кэлеровом классе.**

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I) – компактное голоморфно симплектическое многообразие, $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ его кэлеров класс, Ω – голоморфная симплектическая форма. Предположим, что $\operatorname{Re}\Omega^2 = [\omega]^2$. Тогда **на (M, I) существует и единственна гиперкэлерова структура, такая, что $[\omega_I] = [\omega]$, $\omega_J = \operatorname{Re}\Omega$, $\omega_K = \operatorname{Im}\Omega$.**

Эта теорема следует из теоремы Калаби-Яу.

Группа голономий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (Эли Картан, 1923) Пусть (M, ∇) – расслоение со связностью над M. Для каждой петли γ, идущей из x в $x \in M$, обозначим за $V_{\gamma,\nabla}: B|_x \to B|_x$ соответствующее отображение параллельного переноса вдоль связности. **Группа голономий** (B, ∇) есть подгруппа $GL(T_x M)$, порожденная $V_{\gamma,\nabla}$, для всех петель γ.

ПРИМЕР: Группа голономий кэлерова многообразия лежит в $U(n)$.

ПРИМЕР: Группа голономий гиперкэлерова многообразия лежит в $Sp(n)$.

Теорема Богомолова о разложении

ТЕОРЕМА: **(теорема Богомолова о разложении)** Пусть M – компактное, риччи-плоское кэлерово многообразие Калаби-Яу. Тогда **существует конечное накрытие $\tilde{M}$, которое разлагается в произведение кэлеровых многообразий:**

$$\tilde{M} = T \times M_1 \times ... \times M_i \times K_1 \times ... \times K_j,$$

причем все M_i, K_i односвязны, T тор, а группы голономий $\mathcal{H}\mathrm{ol}(M_l) = Sp(n_l)$, $\mathcal{H}\mathrm{ol}(K_l) = SU(m_l)$.

ТЕОРЕМА: Компактные $2n$-мерные многообразия с $\mathcal{H}\mathrm{ol} = Sp(n)$ **односвязны, и удовлетворяют**

$$\dim H^{p,0}(M) = \begin{cases} 1 & \textbf{для } p = 0, 2, 4, 6, ..., 2n \\ 0 & \textbf{для всех других } p. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:
Такие гиперкэлеровы многообразия называются **простыми**.

Примеры гиперкэлеровых многообразий

ПРИМЕР: Пусть – компактный комплексный тор комплексной размерности 2, $T := \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$. Поскольку $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4 = \mathbb{H}/\mathbb{Z}^4$, T – гиперкэлерово многообразие.

ПРИМЕР: Особенности многообразия $T/\pm 1$ имеют вид $(\mathbb{C}^2/\pm 1)$, и разрешаются единичным раздутием. Раздутие всех этих особенностей (их 16) – голоморфно симплектическое многообразие, которое называется **поверхность Куммера**.

ПРИМЕР: Комплексная поверхность называется **K3 поверхностью**, если она является деформацией поверхности Куммера.

ТЕОРЕМА: Любое **компактное гиперкэлерово многообразие комплексной размерности 2 изоморфно тору либо K3.**

Эта теорема следует из классификации Кодаиры-Энриквеса комплексных поверхностей.

Схемы Гильберта

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Схема Гильберта** $M^{[n]}$ комплексной поверхности M есть классифицирующее пространство пучков идеалов $I \subset \mathcal{O}_M$ таких, что фактор $\mathcal{O}_M/I$ имеет размерность n над $\mathbb{C}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Схема Гильберта **получается разрешением особенностей** симметрической степени $\operatorname{Sym}^n M$

ТЕОРЕМА: (Фуджики, Бовилль) **Схема Гильберта гиперкэлеровой поверхности тоже гиперкэлерова.**

ПРИМЕР: Пусть T – двумерный комплексный тор. Тогда T свободно действует на его схеме Гильберта $T^{[n]}$. Для $n = 2$, фактор $T^{[n]}/T$ – куммерова поверхность K3. Для $n > 2$, универсальное накрытие $T^{[n]}/T$ называется **обобщенным многообразием Куммера**; оно гиперкэлерово и компактно.

ЗАМЕЧАНИЕ: Есть еще 2 "спорадических" примера гиперкэлеровых многообразий в комплексной размерности 6 и 10, построенные K. O'Грэди. **Все известные простые компактные гиперкэлеровы многообразия получаются как деформации одного из этих типов:** тора, схемы Гильберта K3, обобщенного Куммера, O'Грэди.

Форма Богомолова-Бовиля-Фуджики

ЗАМЕЧАНИЕ: В дальнейшем все гиперкэлеровы многообразия **будут по умолчанию предполагаться простыми и компактными.**

ТЕОРЕМА: (А. Фуджики) Пусть M – гиперкэлерово многообразие кватернионной размерности n. **Тогда существует примитивная квадратичная форма q на $H^2(M,\mathbb{Z})$ и целое число $c>0$ такое, что $\int_M \eta^{2n} = cq(\eta,\eta)^n$ для любого $\eta \in H^2(M)$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Форма q называется **формой Богомолова-Бовилля-Фуджики**. **Она определяется соотношением Фуджики канонически, с точностью до знака**. Знак устанавливается, исходя из следующей формулы (Богомолов, Бовилль).

$$\lambda q(\eta,\eta) = \int_X \eta\wedge\eta\wedge\Omega^{n-1}\wedge\overline{\Omega}^{n-1} - \\ - \frac{n-1}{n}\left(\int_X \eta\wedge\Omega^{n-1}\wedge\overline{\Omega}^{n}\right)\left(\int_X \eta\wedge\Omega^{n}\wedge\overline{\Omega}^{n-1}\right)$$

где Ω есть голоморфная симплектическая форма, а $\lambda > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Сигнатура q равна $(b_2-3,3)$. Она отрицательно определена на примитивных формах, и положительно определена на пространстве $\langle\Omega,\overline{\Omega},\omega\rangle$ (ω обозначает кэлеров класс).

Многообразия Фреше

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Многообразие Фреше** есть топологическое пространство, снабженное атласом $\{U_i\}$, где каждая из карт U_i реализована как открытое подмножество в каком-то пространстве Фреше, а все функции перехода гладкие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гладкое отображение** многообразий Фреше - такое, которое задается гладкими отображениями в каждой из карт.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа Ли-Фреше есть группа, снабженная структурой многообразия Фреше, таким образом, что все групповые операции являются гладкими.

ПРИМЕР: **Группа диффеоморфизмов есть группа Ли-Фреше**.

Пространство Тейхмюллера и отображение периодов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\operatorname{Comp}(M)$ есть множество всех интегрируемых почти комплексных структур на многообразии, с топологией, индуцированной топологией Фреше на пространстве тензоров. **Пространство Тейхмюллера** $\operatorname{Teich}(M)$ комплексных структур есть факторпространство $\operatorname{Comp}(M)/\operatorname{Diff}_0(M)$, где $\operatorname{Diff}_0(M)$ есть **группа изотопий** (связная компонента группы диффеоморфизмов).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – компактное гиперкэлерово многообразие. **Отображение периодов** $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\operatorname{Per}} \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{C})$ сопоставляет каждой комплексной структуре I на M прямую $H^{2,0}(M,I) \subset H^2(M,\mathbb{C})$.

Пространство периодов

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $l \in \operatorname{Per}(\operatorname{Teich}(M))$ - класс когомологий в образе отображения периодов. Тогда $q(l,l) = 0$ (потому что это (2,0)-форма) и $q(l,\bar{l}) > 0$, потому что q положительно определена на $\langle \Omega, \overline{\Omega}, \omega \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство периодов** гиперкэлерова многообразия есть пространство $\mathbb{P}\mathrm{er} \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{C})$ состоящее из всех прямых $\mathbb{C}\cdot l$ таких, что $q(l,l) = 0$ и $q(l,\bar{l}) > 0$. **Отображение периодов** есть отображение $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\mathrm{Per}} \mathbb{P}\mathrm{er}$.

ТЕОРЕМА: **(локальная теорема Торелли Богомолова) Отображение периодов $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\mathrm{Per}} \mathbb{P}\mathrm{er}$ этально, т.е. задается гомеоморфизмом в окрестности каждой точки $I \in \operatorname{Teich}(M)$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Из локальной теоремы Торелли следует, что $\operatorname{Teich}(M)$ гладко. **Оно нехаусдорфово** даже в самых простых случаях.

Пространство периодов и $++$-грассманиан (повторение)

Пусть V – вещественное векторное пространство, снабженное скалярным произведением q. Обозначим за $\mathbb{P}\mathrm{er}(V)$ множество прямых $l \in \mathbb{P}V_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих $q(l,l) = 0$ и $q(l,\bar{l}) > 0$, и пусть $\mathrm{Gr}_{+,+}(V)$ – пространство ориентированных 2-мерных плоскостей $W \subset V$, таких, что $q|_W$ положительно определено.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для каждого $W \in \mathrm{Gr}_{+,+}(V)$, рассмотрим оператор поворота на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки: $I_W : W \to W$. Обозначим за $P(W) \in \mathbb{P}V_{\mathbb{C}}$ прямую, порожденную $x + \sqrt{-1}\, I_W(x)$, для $x \in W$. Тогда **P задает биекцию $P : \mathrm{Gr}_{+,+}(V) \to \mathbb{P}\mathrm{er}(V)$.**

СЛЕДСТВИЕ: Пространство периодов для гиперкэлерова многообразия изоморфно $SO(b_2 - 3, 3)/SO(2) \times SO(b_2 - 3, 1)$.

Редукция Хаусдорфа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Нехаусдорфово многообразие** есть топологическое пространство, локально диффеоморфное $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство. Точки $x, y \in M$ называются **неразделимыми** (обозначается $x \sim y$), если для любых открытых множеств $V \ni x, U \ni y$, $U \cap V \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА: (Д. Хойбрехтс) Пусть I_1, $I_2 \in \mathrm{Teich}$ – неотделимые точки. Тогда $P(I_1) = P(I_2)$, и (M, I_1) бимероморфно (бирационально) эквивалентно (M, I_2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство, для которого $M/\sim$ хаусдорфово. Тогда $M/\sim$ называется **редукцией Хаусдорфа** M.

Проблемы: 1. $\sim$ **не обязательно соотношение эквивалентности.** 2. Даже если $\sim$ соотношение эквивалентности, фактор $M/\sim$ не обязательно хаусдорфов.

ЗАМЕЧАНИЕ: Фактор $M/\sim$ хаусдорфов, если отображение $M \to M/\sim$ открыто, а график $\Gamma_\sim \in M \times M$ замкнут.

Слабо хаусдорфовы многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Точка $x \in X$ называется **хаусдорфовой**, если $x \not\sim y$ для любого $y \neq x$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – вещественно-аналитическое многообразие, не обязательно хаусдорфово. Предположим, что **множество $Z \subset M$ нехаусдорфовых точек содержится в счетном объединении вещественно-аналитических подмногообразий коразмерности $\geqslant 2$.** Предположим также, что
(S) для каждого $x \in M$, существует замкнутая окрестность $B \subset M$ и непрерывное, сюрьективное отображение $\Psi : B \to B^n$ на замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$, индуцирующее гомеоморфизм на открытой окрестности x.
Тогда M называется **слабо хаусдорфовым многообразием**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Отображение периодов удовлетворяет (S). Также, нехаусдорфовы точки Teich **содержатся в счетном объединении дивизоров.**

ТЕОРЕМА: Слабо хаусдорфово многообразие допускает редукцию Хаусдорфа. Другими словами, фактор $X/\sim$ хаусдорфов. Более того, $X \to X/\sim$ локально гомеоморфизм.

Доказательство довольно трудное, но элементарное.

Глобальная теорема Торелли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство $\mathsf{Teich}_b := \mathsf{Teich}/\sim$ называется **бирациональным пространством Тейхмюллера** для M

ТЕОРЕМА: (Глобальная теорема Торелли)
Отображение периодов $\mathsf{Teich}_b \stackrel{\mathsf{Per}}{\to} \mathbb{P}\mathrm{er}$ – изоморфизм, для каждой связной компоненты Teich_b.

Доказательство основано на двух утверждениях

УТВЕРЖДЕНИЕ: **(Критерий накрытия)** Пусть $X \stackrel{\varphi}{\to} Y$ – отображение гладких многообразий, которое **этально**, то есть в окрестности каждой точкеи задающее диффеоморфизм. Предположим, что каждая точка $y \in Y$ имеет окрестность $B \ni y$, диффеоморфную замкнутому шару, такую, что каждая замкнутая компонента $B' \subset \varphi^{-1}(B)$ сюрьективно отображается на B. **Тогда φ – накрытие**.

УТВЕРЖДЕНИЕ:
Отображение периодов удовлетворяет этим условиям.