Трисимплектические многообразия

совместная работа с Маркусом Жардимом.

Миша Вербицкий

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

3 мая 2012, Новосибирск

Комплексификация многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – комплексное многообразие, снабженное антикомплекнсон инволюцией ι. Множество неподвижных точек ι называется **вещественно аналитическое многообразие**, а росток M в $M_{\mathbb{R}}$ – **комплексификацией** $M_{\mathbb{R}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $M_{\mathbb{R}}$ **всегда гладко, и** $\dim_{\mathbb{R}} M_{\mathbb{R}} = \dim_{\mathbb{C}} M$**.**

ВОПРОС: Какими структурами наделена комплексификация кэлерова многообббразия?

ТЕОРЕМА: (Д. Каледин, Б. Фейкс) Пусть M – вещественно-аналитическое кэлерово многообразие, а $M_{\mathbb{C}}$ его комплексификация. **Тогда $M_{\mathbb{C}}$ снабжено гиперкэлеровой структурой,** которая определяется функториально и единственным образом по кэлеровой структуре на M.

ВОПРОС: Какими структурами наделена комплексификация гиперкэлерова многообббразия?

ЭТО ОСНОВНОЙ ПРЕДМЕТ СЕГОДНЯШНЕЙ ЛЕКЦИИ.

План:

1. Трисимплектические структуры на векторном пространстве (линейная алгебра)

2. Трисимплектические структуры на многообразии (дифференциальная геометрия)

3. Примеры и применения к пространствам инстантонов.

Трисимплектическая структура на векторном пространстве

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Трисимплектическая структура** на 2-мерном комплексном векторном пространстве V есть 3-мерное подпространство $\mathbf{\Omega} \subset \Lambda^2 V^*$ в пространстве 2-форм, такое, что любой $\eta \in \mathbf{\Omega}$ имеет ранг $2n$, n или 0.

ЗАМЕЧАНИЕ: В таком случае, $\mathbf{\Omega}$ содержит симплектическую форму.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Для симплектических форм $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{\Omega}$, рассмотрим отображение $\varphi_{\omega_1,\omega_2} := \omega_1 \circ \omega_2^{-1} \in \operatorname{End}(V)$. Тогда $\varphi_{\omega_1,\omega_2}$ **можно выразить в подходящем базисе матрицей**

$$\varphi_{\omega_1,\omega_2} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda' \end{pmatrix},$$

с собственными пространствами одинаковой размерности. ■

ТЕОРЕМА: Пусть $(V, \mathbf{\Omega})$ – трисимплектическое пространство, а $H \subset \operatorname{End}(V)$ – алгебра, порожденная $\varphi_{\omega_1,\omega_2}$ для всех симплектических $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{\Omega}$. **Тогда H изоморфна матричной алгебре $\operatorname{Mat}(2)$,** которая действует на V обычным образом.

Трисимплектические структуры как представления Mat(2)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обычное действие матричной алгебры Mat(2) на $V = V_0 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = \bigoplus^i \mathbb{C}^2$ есть такое действие, где Mat(2) действует на каждом из слагаемых $\mathbb{C}^2$ как на своем фундаментальном представлении.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть V – представление алгебры Mat(2), действующей на V обычным образом. Рассмотрим соответствующее действие $SL(2)$ на V, и продолжим его на тензорные степени V по мультипликативности. Пусть $g \in \operatorname{Sym}^2_{\mathbb{C}}(V)$ – $SL(2)$-инвариантная, невырожденная 2-форма на V, а $\{I, J, K\}$ – кватернионный базис в Mat(2). Тогда

$$g(x, Iy) = g(Ix, I^2 y) = -g(Ix, y)$$

значит, форма $\Omega_I(\cdot,\cdot) := g(\cdot, I\cdot)$ симплектическая, и очевидно невырожденная; формы Ω_J, Ω_K определяются аналогичным образом. Определим $\mathbf{\Omega} := \langle \Omega_I, \Omega_J, \Omega_K \rangle$. **Тогда $\mathbf{\Omega}$ есть трисимплектическая структура, и все трисимплектические структуры получаются из представлений Mat(2) таким образом.**

Трисимплектическое многообразие

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Трисимплектическая структура** на комплексном $2n$-многообразии есть тройка голоморфных симплектических форм Ω_1, Ω_2, Ω_3, таких, что любая линейная комбинация этих форм имеет постоянный ранг $2n$, n или 0. Обозначим за $\mathbf{\Omega}$ 3-мерное пространство, порожденное Ω_i. Очевидно, $\mathbf{\Omega}$ определяет трисимплектическую структуру в каждой точке M.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbf{\Omega}$. Рассмотрим $P(t) := \det(\Omega_1 + t\Omega_2)$ как полином от t. Поскольку собственные значения $\Omega_1 + t\Omega_2$ имеют кратность n, $P(t) = Q(t)^{n/2}$**, где** Q **– квадратичный полином**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Существует невырожденная квадратичная форма Q на $\mathbf{\Omega}$, такая, что $\Omega \in \mathbf{\Omega}$ **невырождена** $\Leftrightarrow Q(\Omega, \Omega) = 0$**.**

СЛЕДСТВИЕ: Для каждой вырожденной формы $\Omega \in \mathbf{\Omega}$, ее радикал $\ker \Omega$ задает подрасслоение коразмерности n в TM. Более того, **для любых непропорциональных вырожденных** $\Omega, \Omega' \in \mathbf{\Omega}$**, имеем** $TM = \ker \Omega \oplus \ker \Omega'$**.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку Ω замкнуты, подрасслоение $\ker \Omega$ **инволютивно**: $[\ker \Omega, \ker \Omega] \subset \ker \Omega$.

Голоморфные 3-ткани.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – комплексное многообразие, а S_1, S_2, S_3 – инволютивные, попарно трансверсальные голоморфные подрасслоения в TM размерности $\frac{1}{2}\dim M$. Тройка (S_1, S_2, S_3) называется **голоморфной 3-тканью** на M.

ЗАМЕЧАНИЕ: В гладкой ситуации, теория 3-тканей разработана Черном и Бляшке в 1930-е.

ТЕОРЕМА: (диссертация Черна, 1936) Пусть S_1, S_2, S_3 – голоморфная 3-ткань на комплексном многообразии M. **Тогда существует единственная голоморфная связность ∇ на M, сохраняющая подрасслоения S_i, такая, что ее кручение T удовлетворяет $T(S_1, S_2) = 0$.**

Голоморфные 3-ткани на трисимплектическом многообразии.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для трисимплектической структуры $\mathbf{\Omega}$, рассмотрим тройку попарно различных вырожденных форм $\Omega_i \in \mathbf{\Omega}$. **Тогда** $\ker \Omega_i$ **образуют голоморфную 3-ткань**.

ТЕОРЕМА: Пусть $\mathbf{\Omega}$ – трисимплектическая структура, а $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \in \mathbf{\Omega}$ – тройка попарно попарно различных вырожденных форм. Тогда **связность Черна ∇ соответствующей 3-ткани не зависит от выбора $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.** Более того, **$\nabla$ – связность без кручения.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Следовательно, **∇ есть связность Леви-Чивита голоморфной римановой метрики, связанной с Ω.**

ДАЛЬШЕ БУДУТ ПРИМЕРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ ТРИСИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Гиперкэлеровы многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гиперкомплексное многообразие** есть гладкое многообразие, снабженное комплексными структурами $I, J, K : TM \to TM$, которые удовлетворяют кватернионным соотношениям: $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\operatorname{Id}$. **Гиперкэлерово многообразие** есть гиперкомплексное многообразие, снабженное римановой метрикой g, которая кэлерова по отношению к I, J, K.

ЗАМЕЧАНИЕ: Кэлеровость I равносильна условию $\nabla(I) = 0$, где ∇ – связность Леви-Чивита, а гиперкэлеровость – **условию $\nabla(I) = \nabla(J) = \nabla(K) = 0$ плюс кватернионные соотношения.**

Пространство твисторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Индуцированная комплексная структура** на гиперкэлеровом многообразии есть комплексная структура вида $S^2 \cong \{L := aI + bJ + cK, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.\}$

ЗАМЕЧАНИЕ: Индуцированные комплексные структуры обычно неалгебраические. Если M компактно, то для общих a, b, c, многообразие (M, L) не имеет дивизоров.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство твисторов** гиперкэлерова многообразия есть **комплексное многообразие, полученное склеиванием этих комплексных стркутур в голоморфное семейство над $\mathbb{C}P^1$.** Более формально: Пусть $\mathrm{Tw}(M) := M \times S^2$. Рассмотримн комплексную структуру $I_x : T_m M \to T_m M$, индуцированную $x \in \mathbb{C}P^1 = S^2$. Пусть $I_{\mathbb{C}P^1}$ обозначает обычную комплексную структуру на $\mathbb{C}P^1$. Оператор $I_{\mathrm{Tw}}\big|_{(m,x)} = I_x \oplus I_{\mathbb{C}P^1}$ удовлетворяет $I_{\mathrm{Tw}}^2 = -\operatorname{Id}$, то есть задает почти комплексную структуру. **Эта почти комплексная структура интегрируема** (Саламон).

ПРИМЕР: Если $M = \mathbb{H}^n$, то $\mathrm{Tw}(M) = \mathrm{Tot}(\mathcal{O}(1)^{\oplus n}) \cong \mathbb{C}P^{2n+1} \backslash \mathbb{C}P^{2n-1}$

ЗАМЕЧАНИЕ: Если M компактно, то $\mathrm{Tw}(M)$ **никогда не допускает кэлеровой структуры.**

Рациональные кривые на $\mathrm{Tw}(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Рациональная кривая** на комплексном многообразии есть образ голоморфного отображения $\mathbb{C}P^1 \to M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за $\mathrm{Sec}(M)$ **пространство голоморфных сечений** твисторной проекции $\mathrm{Tw}(M) \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для каждой точки $m \in M$, **горизонтальное сечение** $C_m := \{m\} \times \mathbb{C}P^1$ – рациональная кривая в $\mathrm{Tw}(M)$, лежащая в $\mathrm{Sec}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Общая кривая $C \in \mathrm{Sec}(M)$ "однозначно восстанавливается по двум своим точкам" (как на $\mathbb{C}P^n$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Твисторное сечение $C \subset \mathrm{Tw}(M)$ называется **регулярным**, если его нормальное расслоение такое же, как у горизонтальных сечений: $NC = \mathcal{O}(1)^{\dim M}$. Множество регулярных сечений обозначим за $\mathrm{Sec}_0(M)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для любой пары $I \neq J \in \mathbb{C}P^n$, рассмотрим отображение эвалюации $\mathrm{Sec}(M) \xrightarrow{E_{I,J}} (M,I) \times (M,J)$, $s \to s(I) \times s(J)$. Тогда $E_{I,J}$ **этально (локальный диффеоморфизм) в окрестности любого регулярного сечения**.

Комплексификация гиперкэлерова многообразия

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим антикомплексную инволюцию $\operatorname{Tw}(M) \xrightarrow{\iota} \operatorname{Tw}(M)$, переводящую (m,t) в $(m,i(t))$, где $i: \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ центральная симетрия $S^2 = \mathbb{C}P^1$. Тогда ι переводит голоморфные сечения $\operatorname{Tw}(M) \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^1$, значит, задает антикомплексную инволюцию $\operatorname{Sec}(M)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: $\operatorname{Sec}_{hor}(M) = M$ **– одна из компонент множества неподвижных точек** $\iota: \operatorname{Sec}(M) \to \operatorname{Sec}(M)$**.**

СЛЕДСТВИЕ: $\operatorname{Sec}(M)$ **– комплексификация** M**.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $I \in \mathbb{C}P^1$, а $ev_I: \operatorname{Sec}_0(M) \to (M,I)$ – отображение эвалюации, переводящее $S \in \operatorname{Sec}_0(M)$ в $S(I)$. Обозначим за Ω_I голоморфную симплектическую форму (M,I). Тогда **2-формы** $ev_I^* \Omega_I$ **порождают трисимплектическую структуру на** $\operatorname{Sec}_0(M)$.

Голоморфные расслоения на $\mathbb{C}P^3$ и твисторные сечения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Инстантон** на $\mathbb{C}P^2$ есть стабильное расслоение B с $c_1(B) = 0$. **Инстантон с фреймингом** есть инстантон, снабженный тривиализацией $B|_C$ для фиксированной прямой $C \subset \mathbb{C}P^2$.

ТЕОРЕМА: (Нам, Атья, Хитчин) Пространство $\mathcal{M}_{r,c}$ инстантонов с фреймингом на $\mathbb{C}P^2$ **гладкое, связное, гиперкэлерово**.

ТЕОРЕМА: **Существует биекция** между голоморфными расслоениями на $\mathrm{Tw}(\mathbb{H}) = \mathbb{C}P^3 \backslash \mathbb{C}P^1$, с подходящими условиями стабильности и фреймингом, и пространством твисторных сечений $\mathrm{Sec}(\mathcal{M}_{r,c})$.

Это соответствие используется для доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА: **Пространство $\mathbb{M}_{r,c}$ фреймированных математических инстантонов на $\mathbb{C}P^3$ гладко**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для доказательства гладкости $\mathcal{M}_{r,c}$, используется **"гиперкэлерова редукция"** (Хитчин, Карлхеде, Линдстром, Рочек). Для доказательства гладкости $\mathbb{M}_{r,c}$ используется ее трисимплектический аналог – **"тригиперкэлерова редукция".**