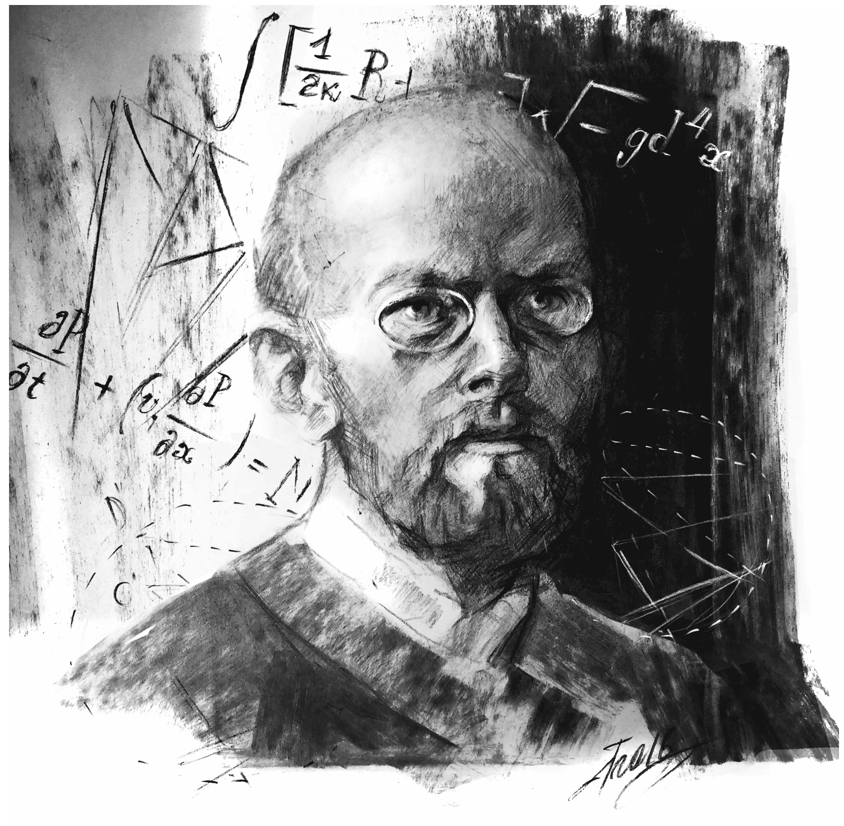
# O sonho de Hilbert

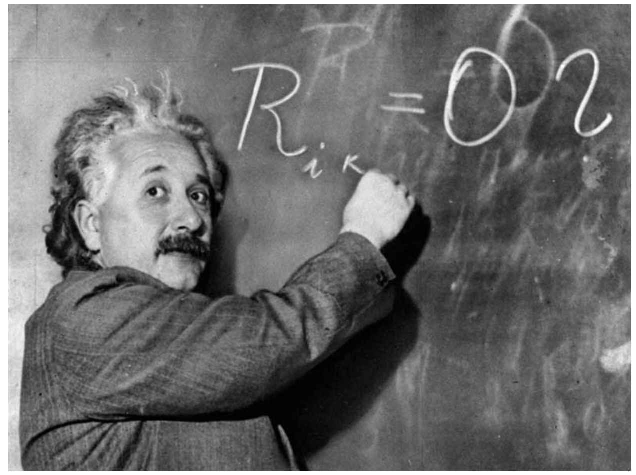
por Misha Verbitsky, IMPA

## David Hilbert



**David Hilbert** foi um famoso matemático da Alemanha. Nasceu em 1862 em Königsberg, atualmente Kaliningrado, e se formou na Universidade de Königsberg. Seu orientador foi Carl Louis Ferdinand von Lindemann, que é mais famoso porque ele provou que o número $\pi$ é "transcendental", não pode ser representado como uma raiz de um polinômio com coeficientes inteiros.

## Obras de David Hilbert

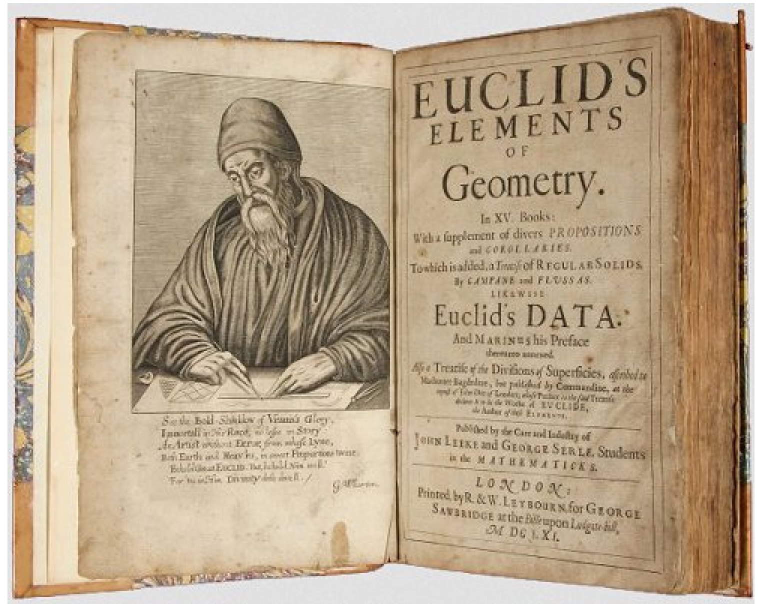


*Albert Einstein escreve as equações da relatividade geral*

Hilbert foi o matemático mais famoso de seu tempo. Ele foi possivelmente **o último matemático que trabalhou em todas as áreas da matemática.** Hilbert revolucionou a álgebra, a teoria dos números, teoria das representações de grupo, análise, equações diferenciais, física e lógica matemática. Junto com seu amigo **Albert Einstein,** Hilbert foi o fundador da **relatividade geral,** uma teoria que sintetiza a relatividade de Einstein com as leis da gravitação de Newton.

Entre outras coisas, Hilbert trabalhou em **planimetria,** a geometria plana que é estudada no ensino médio. Hilbert chegou a publicar um livro, chamado "Grundlagen der Geometrie" (1899), onde desenvolveu **sua própria versão de Euclides.**

## Euclides de Alexandria




**Os Elementos de Geometria**

**Euclides de Alexandria** foi um matemático grego antigo, que viveu cerca de 300 anos antes de Cristo. Ele escreveu vários livros importantes em matemática, incluindo o tratamento fundacional da geometria plana, Os Elementos. No entanto, o que é mais importante é sua abordagem para escrever matemática. Ele começou com **as definições,** afirmou verdades auto-óbvias, **os axiomas**. Então ele **provou teoremas, usando os axiomas e definições.**

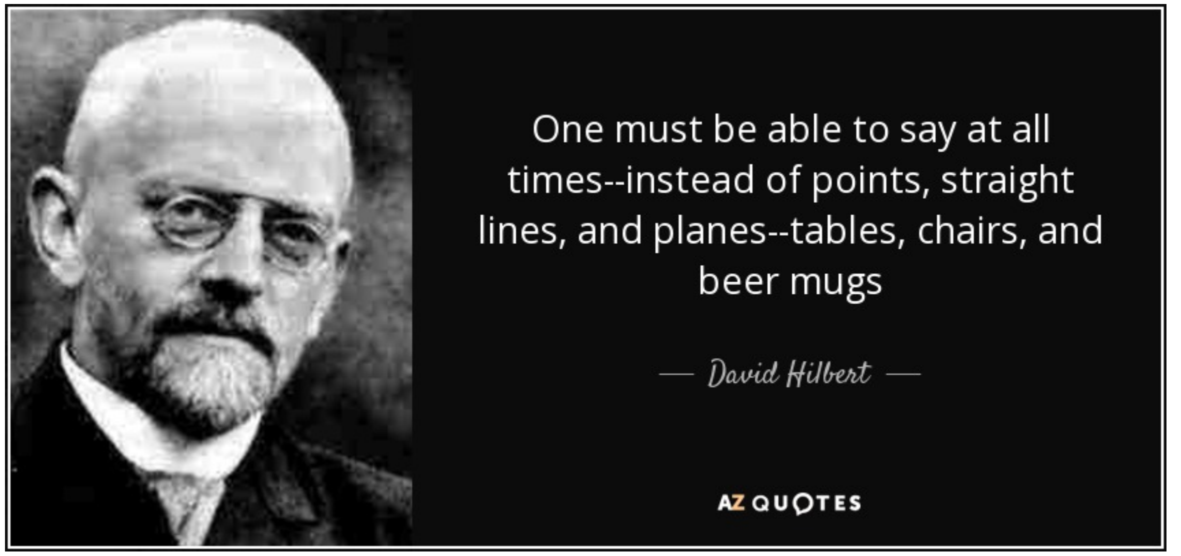
Agora todos os matemáticos fazem o mesmo, mas Euclides foi o primeiro matemático que usou **o método dedutivo.**

Euclides usou a lógica para reduzir todos os teoremas aos axiomas e as definições, ele ainda usou muitos argumentos informais, como as imagens. Hilbert queria ter um sistema de axiomas que seriam complete, **capazes de provar tudo sem recorrer à intuição e as imagens.**


Hilbert chamou essa filosofia da matemática **"formalismo".** Desta forma, toda a matemática pode ser reduzida a **um jogo de símbolos, sem significado atribuído.**

Muitos matemáticos **ficaram muito zangados** com Hilbert e não gostaram dessa filosofia.

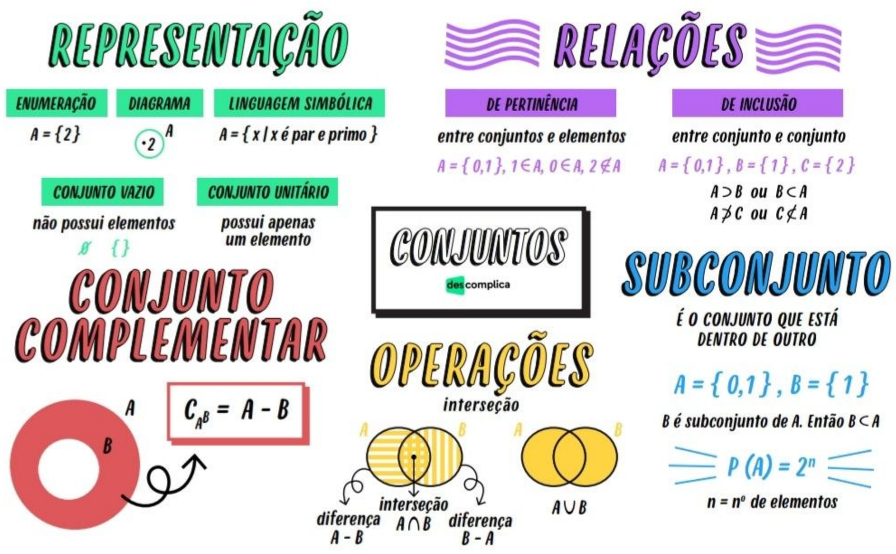
## Cadeiras, mesas e canecas de cerveja




**As famosas palavras de Hilbert em inglês**

Hilbert disse que a teoria deveria ser formulada em tal forma que o "significado" de cada palavra não teria importância. Em vez disso, deve-se usar as definições, axiomas e as regras de formal para deduzir os teoremas. Ele disse que em um tratamento formal da geometria euclidiana pode-se **substitua "pontos" por "cadeiras", "linhas" por "mesas" e "aviões" por "canecas de cerveja"**, e deduza todos os teoremas de Euclides dos axiomas que relacionam esses objetos. Por exemplo, o axioma **"para quaisquer dois pontos distintos existe uma linha única contendo eles"** se tornaria **"para quaisquer duas cadeiras distintas existe uma única mesa que os contém"**.

# O sonho de Hilbert




*Teoria dos conjuntos: noções básicas*

Seu sonho foi chamado de **"Programa de Hilbert".**

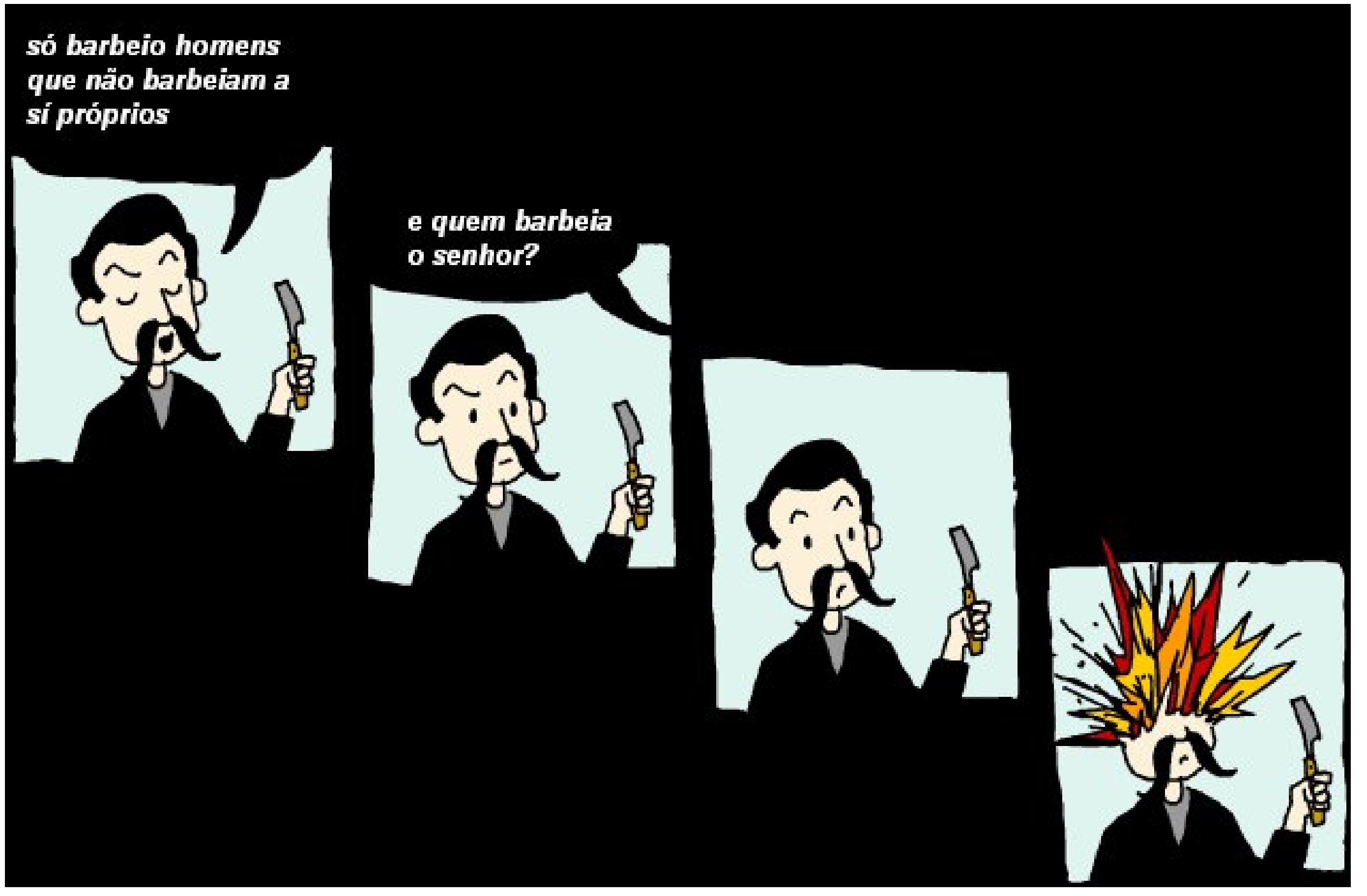
1. **Construa teoria axiomática dos conjuntos,** o fundamento da matemática.
2. **Reduza** toda a matemática a teoria de conjuntos.
3. **Prove** que todo teorema pode ser provado ou falsificado nesta teoria.
4. **Prove** que nenhuma contradição pode ser obtida.

**Os dois últimos pontos de seu programa acabaram sendo problemáticos.**

## Paradoxo do barbeiro

Nessa época, muitas pessoas estavam explorando o teoria dos conjuntos, fundada pelo matemático alemão **Georg Cantor.** Logo, eles descobriram que se você se aproximar do teoria dos conjuntos ingenuamente, **você chega a contradiçõe!**

Algumas dessas contradições são baseadas na famoso **Paradoxo do barbeiro.**

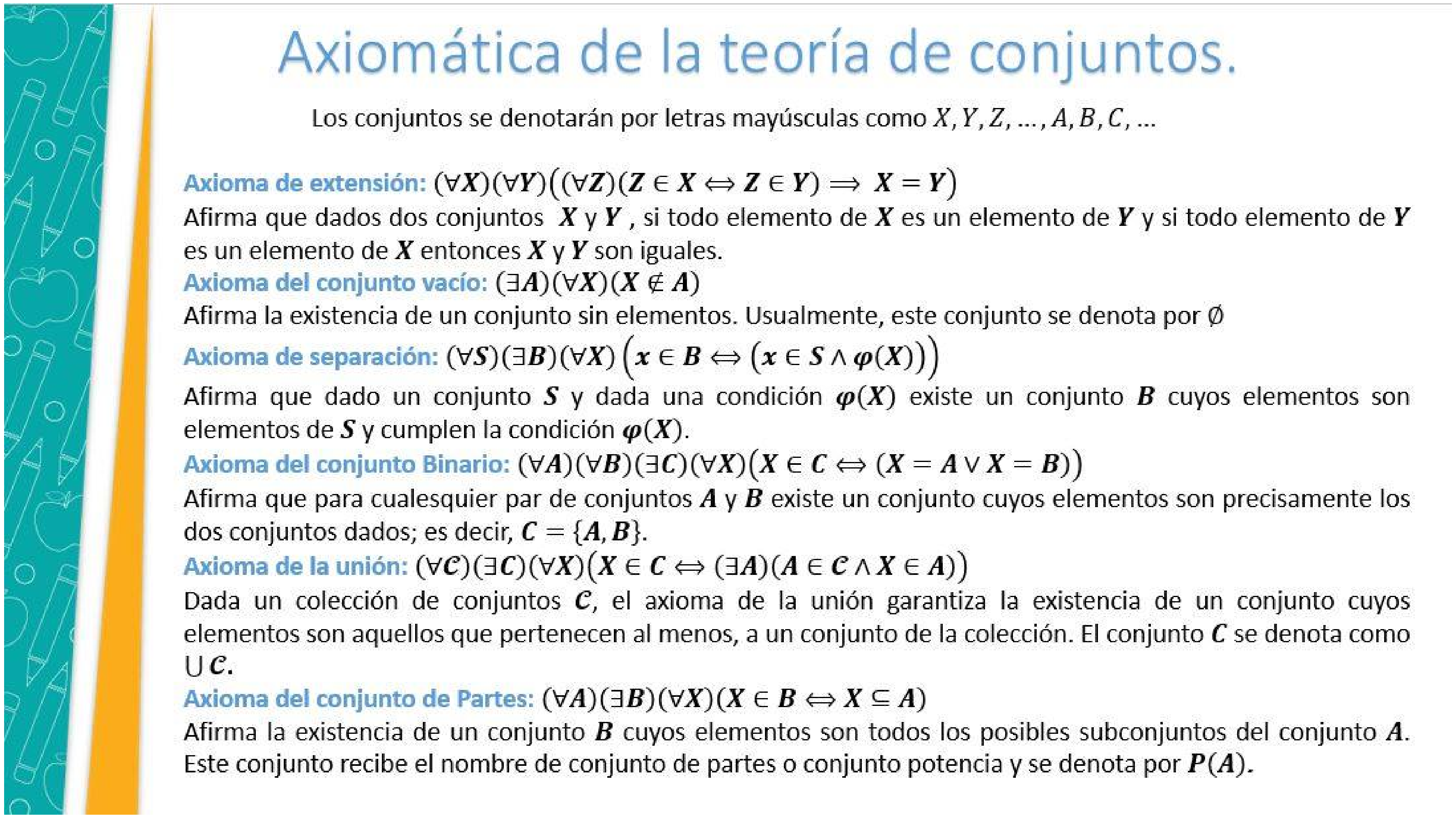



Na teoria ingênua dos conjuntos, **todos os conjuntos existem e todas as operações em conjuntos são possíveis.**

Claramente, **alguns conjuntos não se contêm,** por exemplo o conjunto vazio. Outros conjuntos **contêm a si mesmos,** por exemplo, o conjunto de todos os conjuntos.

Considere agora o conjunto de todos os conjuntos que não contêm em si. **Se este conjunto não contém a si mesmo, ele contém a si mesmo!**

## Teoria axiomática dos conjuntos



### Axiomática de la teoría de conjuntos.

Los conjuntos se denotarán por letras mayúsculas como $X, Y, Z, \ldots, A, B, C, \ldots$

**Axioma de extensión:** $(\forall X)(\forall Y)\big((\forall Z)(Z \in X \Leftrightarrow Z \in Y) \Longrightarrow X = Y\big)$
Afirma que dados dos conjuntos $X$ y $Y$, si todo elemento de $X$ es un elemento de $Y$ y si todo elemento de $Y$ es un elemento de $X$ entonces $X$ y $Y$ son iguales.
**Axioma del conjunto vacío:** $(\exists A)(\forall X)(X \notin A)$
Afirma la existencia de un conjunto sin elementos. Usualmente, este conjunto se denota por $\emptyset$
**Axioma de separación:** $(\forall S)(\exists B)(\forall X)\Big(x \in B \Leftrightarrow \big(x \in S \land \varphi(X)\big)\Big)$
Afirma que dado un conjunto $S$ y dada una condición $\varphi(X)$ existe un conjunto $B$ cuyos elementos son elementos de $S$ y cumplen la condición $\varphi(X)$.
**Axioma del conjunto Binario:** $(\forall A)(\forall B)(\exists C)(\forall X)\big(X \in C \Leftrightarrow (X = A \lor X = B)\big)$
Afirma que para cualesquier par de conjuntos $A$ y $B$ existe un conjunto cuyos elementos son precisamente los dos conjuntos dados; es decir, $C = \{A, B\}$.
**Axioma de la unión:** $(\forall \mathcal{C})(\exists C)(\forall X)\big(X \in C \Leftrightarrow (\exists A)(A \in \mathcal{C} \land X \in A)\big)$
Dada un colección de conjuntos $\mathcal{C}$, el axioma de la unión garantiza la existencia de un conjunto cuyos elementos son aquellos que pertenecen al menos, a un conjunto de la colección. El conjunto $C$ se denota como $\bigcup \mathcal{C}$.
**Axioma del conjunto de Partes:** $(\forall A)(\exists B)(\forall X)(X \in B \Leftrightarrow X \subseteq A)$
Afirma la existencia de un conjunto $B$ cuyos elementos son todos los posibles subconjuntos del conjunto $A$. Este conjunto recibe el nombre de conjunto de partes o conjunto potencia y se denota por $P(A)$.

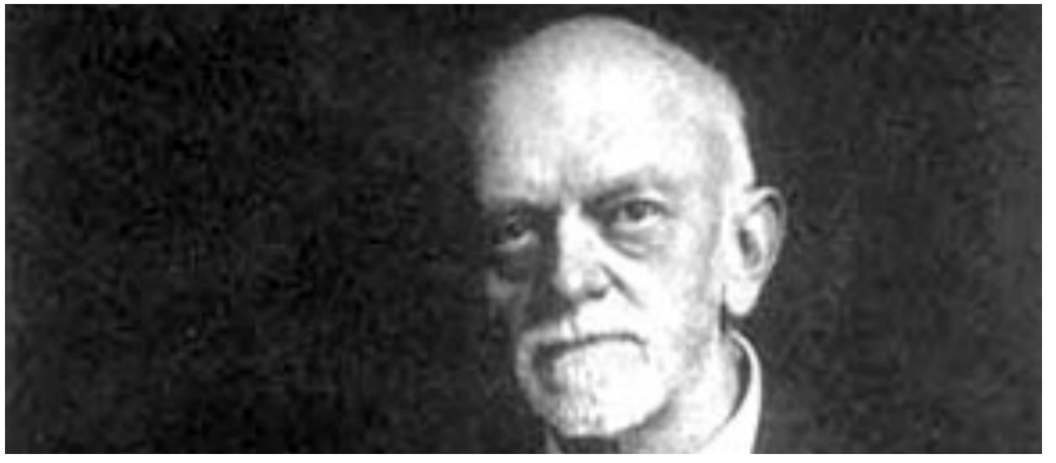
Vemos que os paradoxos na teoria dos conjuntos, se não se usa o método axiomático, são muito real. Agora, essa abordagem para a teoria dos conjuntos é chamada **"teoria ingênua dos conjuntos"**, distinta da **"axiomática teoria dos conjuntos"**, que usa a abordagem formal.

## Mathematicos in Göttingen


Amigos e colegas de David Hilbert. Da esquerda para a direita: Ernst Witt; Paul Bernays; Helene Weyl; Hermann Weyl; Joachim Weyl, Emil Artin; Emmy Noether; Ernst Knauf; desconhecido; Chiuntze Tsen; Erna Bannow (mais tarde tornou-se esposa de Ernst Witt). Localização: Nikolausberg (perto de Göttingen), 1932, by Natascha Artin.

## "Grundlagen der Mathematik"

A última obra de Hilbert foi **"Grundlagen der Mathematik"** (fundamento da matemática), um grande tratamento em dois volumes dos fundamentos da matemática onde ele elaborou o programa Hilbert, escrito em conjunto com Paul Bernays. Nesse momento os nazistas chegaram ao poder, seu co-autor Paul Bernays (que era judeu) perdeu o emprego e foi forçado a emigrar.



A Alemanha se tornou um país muito ruim para a matemática. Em 1934, David Hilbert estava conversando com Bernhard Rust, o ministro da educação nazista. Rust perguntou: "Como está a matemática em Göttingen, agora que está livre da influência judaica?" Hilbert respondeu: **"Não há mais matemática em Göttingen."**

E em 1931, Kurt Gödel provou que **quase tudo no programa de Hilbert está errado.**

## Teoremas da Incompletude

Gödel provou dois teoremas, chamados **Teoremas da Incompletude de Gödel.** O primeiro afirma que em teoria que contém a teoria dos números naturais **sempre há afirmações que não podem ser provadas ou refutada** - a menos que a teoria seja contraditória. A segunda afirma que, para tal teoria, **é impossível provar que não é contraditória.**

Kurt Gödel e Albert Einstein

A matemática formal ainda é válida (os livros de Nicola Bourbaki são baseados nele), mas **o sonho de Hilbert não pode ser realizado.**

## Devemos saber. Saberemos.

Hilbert morreu em 1943, na Alemanha nazista, esquecido e profundamente infeliz com o trabalho de sua vida sendo profanado e destruída pelos nazistas.

Na lápide de Hilbert, está escrito
**Wir müssen wissen**
**Wir werden wissen**
Em português:
**Devemos saber**
**Saberemos**


DAVID
HILBERT
WIR MÜSSEN WISSEN
WIR WERDEN WISSEN