Задачи ко второй главе книги Демайи, по курсу “Алгебраическая геометрия над $\mathbb{C}$” (М. Вербицкий, Д. Каледин).

Осенний семестр 2001.

Для сдачи экзамена надо решить все задачи, не отмеченные звездочкой, либо все задачи, отмеченные звездочкой, кроме двух (по выбору). Решение остальных задач приветствуется в обоих случаях.

1. Задачи на теорию пучков.

1.1 Пусть $\check{\mathcal{O}}_X$ – тотальное пространство пучка $\mathcal{O}_X$ на комплексном пространстве X. Доказать, что $\check{\mathcal{O}}_X$ хаусдорфово.

Указание: см. задачу 11.1 к главе 2 книги Демайи.

1.2 Пусть A – пучок колец, F, G – пучки A-модулей. Определим предпучок $\operatorname{Hom}_A(F,G)$ таким образом, что

$$\operatorname{Hom}_A(F,G)\big|_U = Hom_{A\big|_U}(F\big|_U, G\big|_U),$$

(с правой стороны равенства стоит пространство гомоморфизмов пучков $A\big|_U$-модулей). Доказать, что $\operatorname{Hom}_A(F,G)$ – пучок. Построить естественный гомоморфизм ростков

$$\operatorname{Hom}_A(F,G)_x \xrightarrow{\varphi_x} \operatorname{Hom}_{A_x}(F_x, G_x)$$

(справа стоит пространство гомоморфизмов A_x-модулей; A_x, F_x, G_x - это пространства ростков соответствующих пучков в точке x).

1.3 В условиях задачи 1.2, доказать следующее: если F конечно порожден, то φ_x инъективен. Если F конечно порожден и конечно представим, то φ_x – изоморфизм.

1.4 Пусть A когерентен, F и G тоже. Доказать, что $\operatorname{Hom}_A(F,G)$ когерентен.

1.5* Доказать, что пучок полиномов на $\mathbb{C}^n$ когерентен как пучок колец (в аналитической топологии; когерентность в топологии Зариского была доказана на лекциях). Доказать, что пучок гладких функций на $\mathbb{R}^n$ не когерентен.

1.6* Пусть X – компактное топологическое пространство, а R_X – пучок непрерывных, локально постоянных функций на X. Пара (X, R_X) это окольцованное пространство.

Докажите “теорему Гильберта о нулях” – нильрадикал $\sqrt{J}$ любого идеала $J \subset R_X$ равен идеалу всех функций, зануляющихся на общих нулях $f \in J$.

1.7* Какие множества могут быть общими нулями идеалов из R_X?

1.8* X называется квазикомпактным, если из любого бесконечного покрытия открытого множества открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Доказать, что если X квазикомпактен, то R_X нетерово. Верно ли обратное?

1.9* Доказать, что R_X когерентен, если X квазикомпактно.

2. Задачи на теорию аналитических множеств.

Для непустого подмногообразия X в $\mathbb{P}^n$, обозначим за $CX_0 \subset \mathbb{C}^{n+1}$ множество всех ненулевых векторов, которые проектируются в X при стандартной проекции $\mathbb{C}^{n+1} \backslash 0 \to \mathbb{P}^n$. Пусть CX это объединение CX_0 и $\{0\}$.

2.0 Воспользуйтесь теоремой Реммерта-Штейна и докажите, что CX – аналитическое подмножество в $\mathbb{C}^{n+1}$.

2.1 Пусть $X \subset \mathbb{C}P^n$ неприводимое алгебраическое подмногообразие, $CX \subset \mathbb{C}^{n+1}$ его конус. Докажите, что CX неприводим тогда и только тогда, когда X неприводим.

2.2 Пусть P – неприводимый полином в $\mathbb{C}[z_1, ...z_n]$. Доказать, что $P^{-1}(0)$ неприводимо как аналитическое множество. Постройте регулярную систему координат. Вычислите дискриминант P. Чему равен порядок ветвления разветвленного накрытия $P^{-1}(0) \to \mathbb{C}^{n-1}$?

2.3 Пусть A – неприводимое алгебраическое многообразие в $\mathbb{C}^n$, размерности p. Докажите, что есть система координат

$$(\underbrace{z_1, ..., z_p}_{z'}, \underbrace{z_{p+1}, ..., z_n}_{z''})$$

такая, что стандартная проекция $\pi' : \ A \to \mathbb{C}^p$ (проекция A на первые p координат) – собственное и конечное отображение. Докажите, что A содержится в конусе $|z''| \leqslant C(|z'| + 1)$ (для какой-то константы C).

2.4* Наоборот, пусть дано подмногообразие $A \subset \mathbb{C}^n$ чистой размерности p, которое содержится в конусе $|z''| \leqslant C(|z'| + 1)$. Докажите, что A алгебраическое.

3. Задачи на фактор-особенности.

Пусть G конечная группа, действующая на $\mathbb{C}^n$ линейными автоморфизмами. Особенности $X := \mathbb{C}^n/G$ называются фактор-особенностями, или особенностями орби-образия. Если f – G-инвариантная функция на $\mathbb{C}^n$, то f можно рассмотреть как функцию на X. Пространство X окольцовано пучком $\mathcal{O}{\mathbb{C}^n}^G$ G-инвариантных голоморфных функций.

Окольцованное пространство, локально устроенное как $\mathbb{C}^n/G$, называется многообразием с фактор-особенностями (примерно это называют также орбиобразием).

3.0 Пусть G конечная группа, действующая автоморфизмами на гладком многообразии M. Докажите, что фактор M/G является многообразием с фактор-особенностями.

3.1 Докажите, что многообразие с фактор-особенностями является комплексно-аналитическим пространством.

Указание. Воспользуйтесь индукцией по размерности $n = \dim X$ фактор-особенности $X = \mathbb{C}^n/G$. Поскольку группа $\mathbb{C}^*$, действующая на $\mathbb{C}^n$ растяжениями, коммутирует с G, то она действует также и на X. Имеем $X = CY$: X это конус над его проективизацией Y. Y имеет фактор-особенности, значит, комплексно-аналитичен (по предположению индукции). Воспользовавшись теоремой Реммерта-Штейна, как при доказательстве теоремы Чжоу, выведите, что X тоже комплексно аналитичен.

3.2* Пусть R – кольцо G-инвариантных полиномов на $\mathbb{C}^n$. Докажите, что R конечно порождено.

3.3 Пусть G_1 – конечная группа, действующая на $\mathbb{C}^n$ и на G автоморфизмами. Предположим, что это действие согласовано с действием G на $\mathbb{C}^n$. Постройте вложение $X \overset{q}{\hookrightarrow} \mathbb{C}^m$ такое, что G_1 действует на $\mathbb{C}^m$ линейными автоморфизмами, и отображение q G_1-эквивариантно.

3.4* Обозначим через X_{sing} множество особых точек X. Постройте естественное отображение $\varphi: \ G \to \pi_1(X\backslash X_{sing})$ из G в фундаментальную группу $\pi_1(X\backslash X_{sing})$. Докажите, что оно наложение.

3.5* Пусть G действует свободно на $\mathbb{C}^n\backslash 0$, $n > 1$. Докажите, что X не гладкое.

Указание: воспользуйтесь задачей 3.4.

3.6* Комплексное отражение – это линейный автоморфизм $g \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C}^n)$ конечного порядка, множество неподвижных точек которого имеет коразмерность 1. Пусть $\mathbb{C}^n/G$ – гладкое многообразие. Докажите, что группа G порождена комплексными отражениями.

Указание: воспользуйтесь задачей 3.5.

4. Задачи на когерентные пучки.

Пусть F – когерентный пучок на гладком связном многообразии M.

4.1 Для каждой точки $x \in M$, рассмотрим линейное пространство $F^x := F/\mathfrak{m}_x F$ (фактор по максимальному идеалу). Докажите, что функция $x \to \dim F^x$ полунепрерывна снизу. Обозначим за $Sing(F)$ множество, где $\dim F^x$ подскакивает. Докажите, что $Sing(F)$ комплексно аналитично. Это множество называется множеством особенностей F. Докажите, что $F\Big|_{M\backslash Sing(F)}$ – расслоение.

4.2 Пусть F когерентный пучок, $f \in F$ сечение. Докажите, что следующие утверждения равносильны:

а). Для какого-то открытого множества $U \subset M$, $f\Big|_U = 0$

б). $f\Big|_{M\backslash Sing(F)} = 0$.

Докажите, что сечения, удовлетворяющие условиям (а) и (б) образуют подпучок.

Этот подпучок называется подпучком кручения, обозначается $T(F)$.

4.3 Пусть F – когерентный пучок без кручения. Докажите, что для каждой точки $x \in M$ есть окрестность $U \ni x$ такая, что $F\Big|_U$ можно вложить в $\mathcal{O}_U^{\oplus p}$.

4.4 Обозначим $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, \mathcal{O}_X)$ за F^*. Пусть $\mu : \; F \to F^{**}$ – естественный гомоморфизм. Докажите, что $\ker \mu = T(F)$; другими словами, ядро μ – подпучок кручения.

4.5* Докажите, что пучок без кручения неособ в коразмерности 2 (т.е. $\mathrm{codim}\, Sing(F) \geqslant 2$).

Указание. Рассмотрим вложение $F \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_U^{\oplus p}$. Пусть F_i - образ $\varphi(F)$ при проекции на $\mathcal{O}_U^{\oplus i}$ (первые i координат). Докажите, что фактор F_i/F_{i-1} вкладывается в $\mathcal{O}_U$. Это позвоняет представить F в виде последовательности расширений пучков, вложенных в $\mathcal{O}_U$. Докажите, что подпучок $\mathcal{O}_U$ неособ в коразмерности 1, воспользовавшись теоремой Гильберта о нулях.

4.6 *Определение.* Пучок F называется рефлексивным, если естественное отображение $\mu : \; F \to F^{**}$ изоморфизм. Пучок F называется нормальным, если для каждого открытого множества $U \subset M$, комплексно аналитического подмножества $A \subset U$, $\mathrm{codim}\, A \geqslant 2$, имеем

$$F\Big|_U = F\Big|_{U \setminus A}.$$

Докажите, что рефлексивный пучок нормален.

4.7* Докажите, что нормальный пучок без кручения рефлексивен.

4.8* Докажите, что рефлексивный пучок ранга 1 есть расслоение.

4.9* Докажите, что рефлексивный пучок неособ в коразмерности 3.

5. Задачи на комплексно аналитические схемы.

5.1* Пусть F – рефлексивный пучок над M. Рассмотрим кольцо $\oplus_i S^i F^*$, где S^i это симметрическая степень. Обозначим $Proj$ этого градуированного кольца за $\mathbb{P}F \xrightarrow{p} M$. Тотальное пространство F это конус соответствующего проективного морфизма, т.е. пополненный аналитическими функциями спектр алгебры $\oplus_i S^i F^*$. Оно обозначается $Tot(F)$ и снабжено естественной проекцией $Tot(F) \to M$.

Докажите, что $Tot(F)$ неособо в тех и только тех точках M, где неособ F. Придумайте определение групповой комплексно аналитической схемы и докажите, что $Tot(F)$ - групповая схема над M. Докажите, что $Tot(F)$ нормально и $\mathbb{C}^*$ действует на нем автоморфизмами.

5.2* Пусть V – нормальная групповая схема над M с действием $\mathbb{C}^*$. Докажите, что V – это тотальное пространство рефлексивного когерентного пучка.